



## РЕЛАКСАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ ФЕРХЮЛЬСТА С «РОЗОВЫМ» ШУМОМ

*О.В. Музыкачук*

Рассмотрена релаксация вероятностных характеристик решения стохастического уравнения Ферхюльста, имеющего широкий спектр приложений. Случайное воздействие на систему считалось гауссовым марковским процессом с произвольным временем корреляции. На основе численного решения уравнений релаксации моментов предложены две модели нестационарных вероятностных распределений, одно из которых имеет точную стационарную асимптотику для случая дельта-коррелированной случайной силы, другое – для квазистатической. Исследована зависимость релаксации основных вероятностных характеристик от нелинейности системы, начальных условий, интенсивности и вида спектра шума. Построена эволюция модельных вероятностных распределений.

Статистический анализ нестационарных процессов в динамических системах, находящихся под воздействием случайных сил, актуален для широкого круга задач нелинейной динамики и ее приложений (см., например, [1–3]). Математическим аппаратом исследования подобных систем является теория марковских процессов и процессов диффузионного типа (см., например, [4–6]), но, как известно, аналитических решений нестационарных уравнений Фоккера – Планка для искомым вероятностных распределений в нетривиальных случаях нет. Ясно также, что аппроксимация реальных случайных воздействий дельта-коррелированными не всегда правомерна. Очевидно, что для статистического описания динамических систем с отличными от нуля временами корреляции случайных сил приходится комбинировать аналитические и численные методы анализа.

В настоящей работе рассматривается релаксация вероятностных характеристик стохастического уравнения Ферхюльста (имеющего широкий спектр приложений в экологических моделях, теории фазовых переходов [3] и других областях). Случайное воздействие на систему полагаем гауссовым марковским шумом с произвольным временем корреляции. На основе численного решения уравнений релаксации моментов строятся два модельных вероятностных распределения, одно из которых имеет точную стационарную асимптотику для случая дельта-коррелированного шума, а другое – для квазистатического. Численным образом исследуется также релаксация вероятностных характеристик под действием квазистатической случайной силы.

# 1. Рассмотрим стохастическое уравнение Ферхюльста

$$Tdx/dt = [1 + \xi(t)]x - \gamma x^2. \quad (1)$$

В «экологической» терминологии здесь  $x(t)$  – численность изолированной популяции;  $T=1/a$ , где  $a$  – среднее значение трофического коэффициента;  $\gamma$  – безразмерный коэффициент внутривидовой конкуренции. Случайный шум  $\xi(t)$  считаем гауссовым марковским процессом с произвольной шириной спектра  $\Pi$ , определив его стохастическим уравнением

$$d\xi/dt + \Pi\xi = \eta(t), \quad (2)$$

где  $\eta(t)$  – чисто вспомогательный дельта-коррелированный шум, то есть

$$\langle \eta \rangle = 0, \quad \langle \eta(t)\eta(t-\tau) \rangle = D_\eta \delta(\tau). \quad (3)$$

На основании уравнений (1)–(3) можно получить следующую цепочку уравнений релаксации совместных моментов решения уравнения (1) и случайной силы (здесь и ниже используем безразмерное время  $\theta=t/T$ )

$$\langle x^n \xi^m \rangle' = (n - \nu m) \langle x^n \xi^m \rangle + n \langle x^n \xi^{m+1} \rangle - \nu n \langle x^{n+1} \xi^m \rangle + m(m-1) \nu p \langle x^n \xi^{m-2} \rangle, \quad (4)$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots,$$

где  $p = \langle \xi^2 \rangle = D_\eta / 2\Pi$  – мощность шума  $\xi$ ,  $\nu = \Pi T$  – относительная ширина его спектра. Для замыкания системы (4) используем гауссово приближение по совокупности случайных переменных  $\{x, \xi\}$ , учитывая только корреляционные связи этих переменных и опуская кумулянты высших порядков. (В теории стохастических линейных систем соответствующий прием известен как приближение Бурре.)

Ограничившись рассмотрением релаксации среднего значения и дисперсии  $D_x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ , на основании (4) получим

$$\begin{aligned} \langle x \rangle' &= (1 - \gamma \langle x \rangle) \langle x \rangle + \langle x \xi \rangle - \gamma D_x, \\ \langle x \xi \rangle' &= (1 - \nu - 2\gamma \langle x \rangle) \langle x \xi \rangle + p \langle x \rangle, \\ 1/2 D_x' &= (1 - 2\gamma \langle x \rangle) D_x + \langle x \rangle \langle x \xi \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Стационарные значения искомых величин запишем в виде

$$\langle x \rangle_{st} = 1/\gamma, \quad \langle x \xi \rangle_{st} = D \langle x \rangle / (1 + \tau), \quad D_{st} = D \langle x \rangle^2 / (1 + \tau), \quad (6)$$

где  $\tau = 1/\nu$ ,  $D = p\tau$  – относительное время корреляции шума и его спектральная плотность в «нуле», соответственно. (Как легко видеть из уравнения (1), стационарное среднее значение  $\langle x \rangle_{st}$  вообще не зависит от наличия и вида случайного воздействия  $\xi$ .)

Интересно отметить, что, хотя второе и третье уравнения системы (5) приближенные, стационарные значения (6) являются точными в предельных случаях как дельта-коррелированного, так и квазистатического шума  $\xi$ . Первое легко установить, используя марковский аппарат, а второе – непосредственно из уравнения (1). Соответствующие предельные переходы в (6) к белому шуму

$$\tau \rightarrow 0, \quad D = \text{const} \quad (7a)$$

и квазистатическому

$$\tau \rightarrow \infty, \quad p = \text{const} \quad (7b)$$

очевидны. Как следует из (6), с ростом времени корреляции дисперсия  $D_x$  уменьшается при фиксированном значении  $D$  и увеличивается при фиксированной мощности шума  $p$ , что свидетельствует о преобладающем влиянии низкочастотных спектральных компонент процесса  $\xi(t)$ .

Заметим, что релаксацию моментов при квазистатическом случайном воздействии можно найти и непосредственно из уравнения Ферхольста. Если относительное время корреляции  $\tau \gg 1$ , то, рассматривая в уравнении (1)  $\xi$  как случайную величину и интегрируя, получим

$$x(s;t) = s/[\gamma + (s/x_0 - \gamma)\exp(-st)], \quad s = \xi + 1 \quad (7)$$

( $x_0$  – начальное значение). При этом релаксация моментов находится интегрированием выражения (7) с заданной плотностью вероятности  $w_s(s)$

$$\langle x^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n(s;t) w_s(s) ds = 1/(2\pi p)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^n(s;t) \exp[-(s-1)^2/(2p)] ds. \quad (8)$$

Последнее интегрирование (для гауссова распределения  $\xi$ ) выполняется численным образом.

**2.** Обратимся теперь к построению релаксации вероятностного распределения  $W_x(x;t)$ . Как известно [7,8], стационарное решение соответствующего уравнения Фоккера – Планка (при дельта-коррелированном шуме) имеет вид

$$w_x(x) = Cx^{1/D-1} \exp(-\gamma x/D), \quad x > 0, \quad (9)$$

а стационарные значения моментов определяются рекуррентной формулой

$$\langle x^{n+1} \rangle_{st} = (1+nD) \langle x^n \rangle_{st} / \gamma, \quad n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

В частности, для среднего и дисперсии имеем (как и из формул (6))

$$\langle x \rangle_{st} = 1/\gamma, \quad D_{st} = D \langle x \rangle_{st}^2. \quad (11)$$

Для построения нестационарной плотности вероятности воспользуемся приемом, предложенным в работе [9] для случая дельта-коррелированного шума  $\xi(t)$ . На основании выражений (11) распределение (9) представим в виде

$$w_x(x) = Cx^{1/d_x-1} \exp(-x/\langle x \rangle d_x), \quad C^{-1} = (\langle x \rangle d_x)^{1/d_x-1} \Gamma^{-1}(1/d_x), \quad (12)$$

где  $d_x = D_x / \langle x \rangle^2$  – нормированная дисперсия,  $\Gamma(z)$  – гамма-функция. В качестве первой модели нестационарного вероятностного распределения возьмем выражение (12) с «размороженными» параметрами  $\langle x(t) \rangle$  и  $d_x(t)$ , значения которых находим численным решением системы уравнений (5), то есть положим\*

$$W_x^{(1)}(x;t) = w_x[x; \langle x(t) \rangle, d_x(t)]. \quad (13a)$$

В другом предельном случае квазистатического шума стационарная плотность вероятности  $w_x(x)$  имеет тот же вид, что и распределение величины  $\xi$ ; если последнее является гауссовым, из (1) элементарно находим

$$w_x(x) = \gamma/(2\pi p)^{1/2} \exp[-(\gamma x - 1)^2/(2p)]. \quad (13)$$

При этом, как видно из (6), стационарная дисперсия  $D_x = p \langle x \rangle^2$ , поэтому в качестве

\* Численные оценки адекватности такой модели, основанные на сравнении с некоторыми точными решениями, приведены в [9].

другой модели нестационарного распределения можно взять гауссову плотность вероятности

$$W_x^{(2)}(x;t) = 1/[2\pi D_x(t)]^{1/2} \exp[-(x - \langle x(t) \rangle)^2 / (2D_x(t))]. \quad (14a)$$

Релаксацию среднего значения и дисперсии, как и ранее, находим численным интегрированием системы (5), а при больших значениях  $\tau$  для сравнения используем квазистатическую формулу (8).

Начальными значениями для распределений (13a) и (14a) будем считать соответствующие выражения при начальных условиях

$$\langle x(0) \rangle = \langle x \rangle_0, \quad D_x(0) = D_0. \quad (14)$$

Отметим, что оба распределения при  $t \rightarrow 0$  и  $D_x \rightarrow 0$  стягиваются в дельта-функцию

$$W_x(x;0) = \delta(x - \langle x \rangle_0), \quad (15)$$

что позволяет для обеих моделей использовать и детерминированные начальные условия ( $x(0) = x_0, D_x(0) = 0$ ).

Заметим также, что, поскольку гамма-распределение (12) при малых  $d_x$  является асимптотически гауссовым, при относительно слабом шуме различие между указанными модельными распределениями незначительно.

Как показывает анализ, релаксация среднего значения  $\langle x(t) \rangle$  даже при сильном шуме мало отличается от релаксации при  $\xi = 0$ , поэтому ниже для модельного распределения (13a) рассмотрим также установление соответствующего наиболее вероятного значения  $x^*$ . Как следует из (12),

$$x^*(t) = \langle x(t) \rangle (1 - d_x(t)). \quad (16)$$

Отметим, что при  $d_x < 0$  у вероятностного распределения (13a) имеется интегрируемая особенность в нуле.

**3.** Обсудим теперь основные результаты, полученные изложенным методом. Нас интересует влияние параметров системы, а также интенсивности и времени корреляции случайной силы на релаксацию вероятностных характеристик. На рис. 1 показана релаксация наиболее вероятного значения  $x^*$  и стандартного отклонения  $\sigma_x = D_x^{1/2}$  (а) и соответствующие стационарные вероятностные распределения при разных значениях мощности и времени корреляции шума ( $\sigma$ ). На рис. 1, а кривые 1 ( $1\sigma$ ) и 2 ( $2\sigma$ ) для относительно слабого шума  $p=0.1$  с временами корреляции  $\tau=0.5, 4.0$ , соответственно. Кривые 3 ( $3\sigma$ ) и 4 ( $4\sigma$ ) для более сильного шума  $p=0.4$  и  $\tau=0.5, 4.0$ , соответственно;  $\gamma=0.1$  всюду. Все кривые выходят на свои стационарные значения, определяемые формулами (6) и (16).

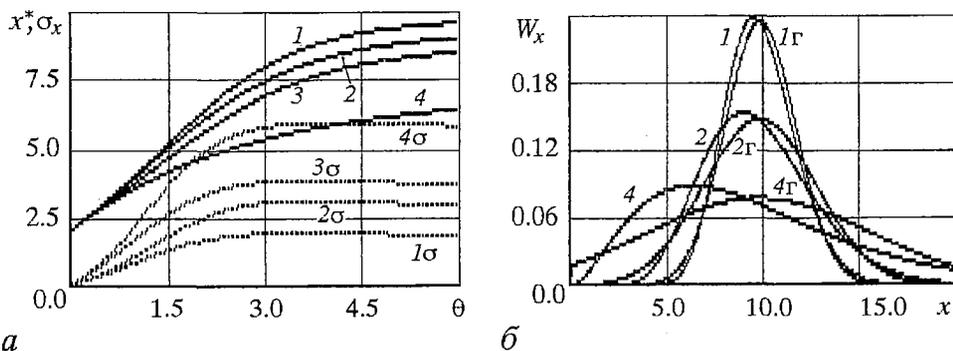


Рис. 1. а – релаксация наиболее вероятного значения и стандартного отклонения; б – стационарные модельные вероятностные распределения

На рис. 1, б кривые 1–4 – модельное распределение (13а), кривые 1г–4г – гауссово модельное распределение (14а). Значения параметров соответствуют кривым рис. 1, а (кривые 3, 3г опущены). Кривые 1 для относительно слабых и быстрых флуктуаций  $\xi(t)$ , 2 – для слабых медленных, 4 – для сильных медленных (низкочастотных). Различие модельных распределений достаточно заметно (кривые 4 и 4г) лишь при сильных низкочастотных флуктуациях, при этом  $\sigma_x \approx x^*$  (см. рис. 1, а). Как следует из приведенных результатов, при фиксированной мощности большее дестабилизирующее действие на систему оказывает низкочастотный шум  $\xi(t)$ .

На рис. 2 приведена релаксация наиболее вероятного значения (а) и модельной плотности вероятности (б) при разных начальных условиях  $x_0$  ( $\gamma=0.2$ ;  $p=0.4$  всюду). Кривые 1–4 на обоих рисунках соответствуют значению  $x_0=8$ , а кривые 1' – 3' –  $x_0=1$ . На рис. 2,а кривые 1, 1' – для широкополосного шума ( $\tau=0.25$ ), кривые 2, 2' – для низкочастотного ( $\tau=5$ ) той же мощности. Релаксация модельного распределения (13а) построена (см. рис. 2, б) для случая широкополосного шума ( $\tau=0.25$ ); здесь кривые 1, 1' – начальные дельта-распределения, 4 – стационарная плотность вероятности (9), промежуточные кривые соответствуют моментам, показанным метками на оси времени рис. 2, а. Отметим, что установление вероятностного распределения при большом значении  $x_0$  идет существенно быстрее, чем при малом. Из сравнения кривых 2 и 1 на рис. 2, а, видно, что при низкочастотном шуме установление происходит несколько медленнее, чем при широкополосном.

На рис. 3 показана релаксация нормированной дисперсии  $d_x$  при различных значениях начальных условий и времен корреляции шума (а) и установление гауссовой модельной плотности вероятности  $W_x$  (б). (Неизменяемые параметры –  $\gamma=0.1$ ,  $p=0.15$ .) Отметим, что при малых начальных условиях релаксация нормированной дисперсии (см. рис. 3, а) немонотонна, что связано с различной динамикой установления среднего значения и дисперсии. Кривые 1–3 построены для  $x_0=1$  и  $\tau=0.25, 1.0, 4.0$ , соответственно; кривая 4 – «квазистатическая релаксация», полученная на основании численного интегрирования выражения (8). Кривые 2' и 3' соответствуют значению  $x_0=5$ , при этом установление идет значительно быстрее и монотонно. Рис. 3, б показывает эволюцию модельного распределения (14а) при низкочастотном шуме ( $\tau=4$ ). Здесь кривая 1 – начальная дельта-функция, кривые 2–4 соответствуют моментам времени, отмеченным на рис. 3, а; кривая 5 – квазистатическое ( $\tau=\infty$ ) стационарное распределение (13).

Приведенная ниже таблица показывает зависимость времени релаксации среднего значения  $\tau_{\langle v \rangle}$  и дисперсии  $\tau_{D_x}$  от основных параметров системы и шума.

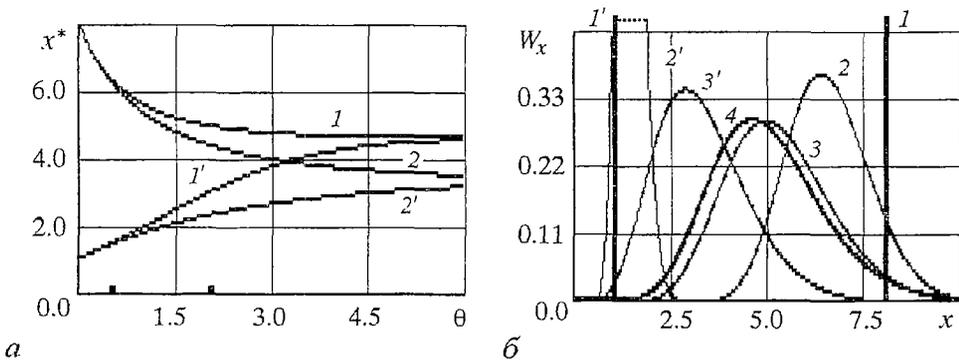


Рис. 2. а – релаксация наиболее вероятного значения при различных начальных условиях; б – эволюция модельных вероятностных распределений при широкополосном шуме

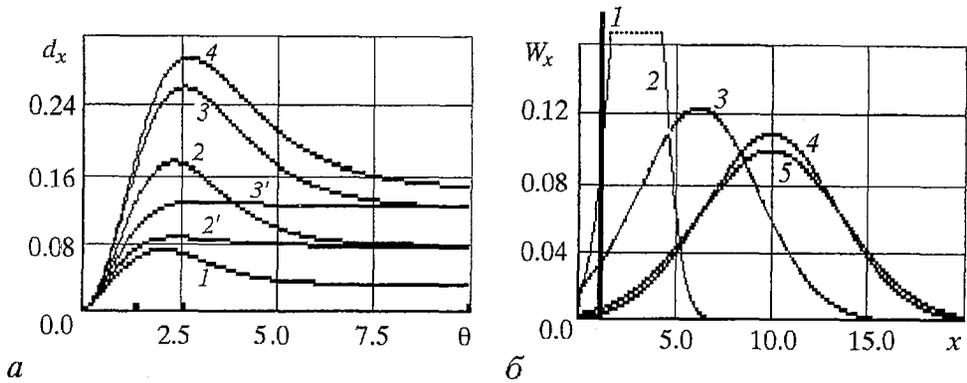


Рис. 3. а – релаксация нормированной дисперсии; б – эволюция модельного вероятностного распределения при низкочастотном шуме

Эти времена определялись численным образом по заданному отклонению (10%) от стационарных значений.

Таблица

$x_0$	0.5		7.0		0.5		7.0		0.5		7.0	
$\gamma$	$\tau_{(x)}$	$\tau_{Dx}$										
0.05	6.0	5.4	2.8	1.8	6.3	5.5	3.0	1.8	6.2	7.2	2.7	2.0
0.2	4.4	2.5	1.2	1.2	4.5	2.5	1.5	1.2	4.4	5.2	2.2	1.3
	$\tau=0.5,$		$p=0.1$		$\tau=0.5,$		$p=0.4$		$\tau=4.0,$		$p=0.1$	

Видно, что с ростом нелинейности времена установления уменьшаются; как отмечалось выше, при малых начальных значениях релаксация идет медленнее. Дисперсия устанавливается обычно быстрее среднего значения и при широкополосном шуме несколько быстрее, чем при низкочастотном. На релаксацию средних значений шум не оказывает существенного влияния.

Выполненный анализ показывает, что полученные результаты не только качественно, но и количественно описывают релаксацию вероятностных характеристик системы в широком диапазоне значений мощности и времен корреляции случайного воздействия. При широкополосном шуме более адекватно модельное гамма-распределение (13а), а при низкочастотном – гауссово (14а); при слабом шуме модели эквивалентны.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 99-02-17544 и № 00-15-96620.

### Библиографический список

1. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
2. Noise in nonlinear dynamical systems / Eds F. Moss and P.V.E. McClintock. England, Cambridge: Cambridge University Press, 1989. Vol. 1-3.
3. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987. 397 с.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964. Т. 1, 2.
5. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-

6. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.

7. Диментберг М.Ф. Точные решения уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для некоторых многомерных динамических систем // ПММ. 1983. Т. 47, вып.4. С. 55.

8. Музычук О.В. Некоторые точные результаты для вероятностных характеристик стохастического уравнения Ферхюльста // Изв. вузов. ПНД. 1996. Т. 4, № 3. С.18.

9. Музычук О.В. Аналитико–численное построение нестационарных вероятностных распределений для одного класса нелинейных стохастических систем // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 9.

Нижегородский архитектурно–  
строительный университет

Поступила в редакцию 2.06.2000  
после доработки 14.08.2000

## RELAXATION OF PROBABILITY CHARACTERISTICS OF DYNAMICAL SYSTEMS, DESCRIBED BY FERHULST STOCHASTIC EQUATION WITH «PINK» NOISE

*O.V. Muzychuk.*

Probability characteristics relaxation of a solution of Ferhulst stochastic equation is considered. It was supposed, that random influence on the system is Gaussian Markov process with arbitrary values of correlation time. Two models of nonstationary probability distributions with exact stationary athymptotic are proposed on the basis of numerical solutions of relaxation equations for moments: in the case of delta–correlated random force and quasistationary force. Relaxation of main probability characteristics is examined in dependence on nonlinearity, initial conditions, noise intensity and kind of noise spectrum. Evolution of the model probability distributions has been constructed.



*Музычук Олег Владимирович* – родился в городе Ярцево Смоленской области (1947). Окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1970). После окончания работал на кафедре статистической радиофизики ГГУ, там же защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (1978) в области исследования динамических систем с флуктуирующими параметрами. С 1978 года работает на кафедре физики Нижегородского архитектурно–строительного института. Автор примерно 40 статей в центральных журналах. Круг интересов – стохастические системы с интенсивными не дельта–коррелированными случайными силами. E–mail: physics @ anatolic.da.ru