



БИСТАБИЛЬНАЯ СИСТЕМА С ВНЕШНИМ ДИНАМИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

О.С. Сергеев

Исследуется влияние аддитивного периодического и динамического хаотического возмущений на положение бифуркационной границы, разделяющей моно- и бистабильный режимы в одномерной динамической системе с кубической нелинейностью.

Введение

Данная работа посвящена исследованию аддитивного воздействия динамического происхождения на одномерную бистабильную динамическую систему с кубической нелинейностью, а именно, влиянию возмущения данного типа на положение бифуркационной границы, отвечающей слиянию устойчивого и неустойчивого состояний равновесия. Бистабильные динамические системы являются базовыми элементами для построения сетей взаимосвязанных активных элементов, к изучению которых в настоящее время проявляется большой интерес. Динамика подобных систем напрямую зависит от динамики базового элемента, который, в зависимости от условий задачи, может быть подвержен воздействиям той или иной природы. Исследование показывает, что какое-либо возмущение (регулярное или хаотическое), внесенное в систему, может сместить границы моно- и бистабильного режимов. Величина и характер возможного смещения будут зависеть от величины и типа возмущения. В зависимости от природы внешнего воздействия рассмотрение такой задачи может вестись либо статистическими, либо динамическими методами. Классическая постановка задачи о статистическом рассмотрении динамических систем была дана в работе [1]. Задача здесь сводится к решению уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для плотности вероятности переменных системы. Иллюстрация такого подхода с применением кумулянтного анализа [2] дана, например, в [3], а также в [4], где исследовалось влияние на бистабильную систему белого шума, в частности, зависимость величины смещения границы режимов от интенсивности шума.

В данной работе представлен динамический подход к решению подобной задачи. Здесь рассматривается та же модель, что и в [4], однако исследование проводится для возмущений не статистической, а динамической природы на примерах периодического воздействия и воздействия типа динамического хаоса (на примере системы Чуа) в предположении их достаточной малости.

1. Модель

Одномерная бистабильная система описывается уравнением

$$du/dt = -u^3 + au + \gamma, \tag{1}$$

где a и γ – параметры. Система имеет либо одно глобально устойчивое состояние равновесия (моностабильный режим), либо два устойчивых состояния равновесия, разделенных неустойчивым (бистабильный режим) (рис. 1). Пространством параметров системы (1) является плоскость (a, γ) . Область параметров, при которых система бистабильна, расположена правее кривой L (рис. 2), описываемой уравнением

$$|\gamma| = 2(a/3)^{3/2}. \tag{2}$$

Область левее кривой L отвечает моностабильному режиму. Кривая L соответствует бифуркации слияния устойчивого и неустойчивого состояний равновесия.

Возмущенная система описывается уравнением

$$du/dt = -u^3 + au + \gamma + \Delta q(t), \tag{3}$$

где Δ – амплитуда воздействия ($\Delta \geq 0$), а $q(t)$ есть T -периодическая функция со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} q(t+T) &= q(t), \\ q(t+T/2) &= -q(t), \\ |q(t)| &\leq 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Система (3) заменой t и u и введением новых параметров

$$\begin{aligned} t &= \bar{t}T/\pi, \quad u = \bar{u}(\pi/T)^{1/2}, \\ a &= \bar{a}\pi/T, \quad \gamma = \bar{\gamma}(\pi/T)^{3/2}, \\ \Delta &= \bar{\Delta}(\pi/T)^{3/2}, \quad \bar{q}(\bar{t}) = q(\bar{t}T/\pi) \end{aligned}$$

может быть преобразована к виду

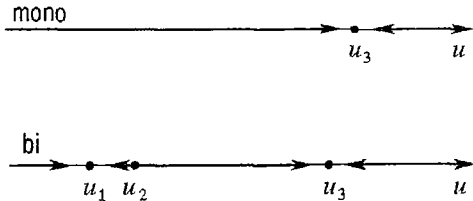


Рис. 1. Фазовая прямая невозмущенной системы в моно- и бистабильном режимах

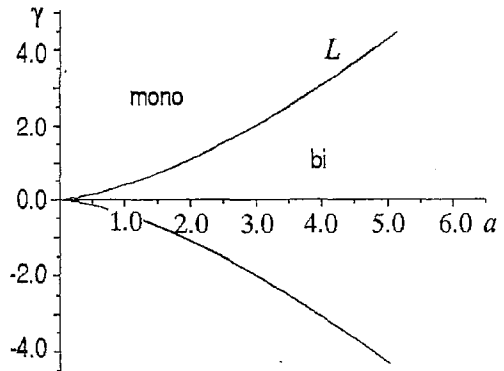


Рис. 2. Граница моно- и бистабильного режимов в невозмущенной системе

$$\dot{u} = -u^3 + au + \gamma + \Delta q(t), \quad (5)$$

где $(\dot{}) = d/dt$ и $q(t)$ — π -периодическая функция. Поэтому рассмотрение периодических возмущений без потери общности может быть ограничено изучением лишь π -периодических воздействий. Тогда значки () при величинах и параметрах в дальнейшем можно опустить.

2. Поведение системы вблизи границы моно- и бистабильного режимов при периодическом возмущении

Система (5) неавтономна и не имеет состояний равновесия. Поэтому моно- и бистабильный режим в данном случае означает наличие одного или двух устойчивых периодических движений, соответственно, в цилиндрическом фазовом пространстве, где система автономна.

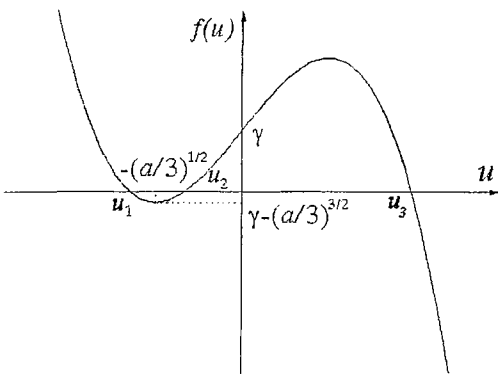


Рис. 3. Качественный вид нелинейности системы вблизи границы моно- и бистабильного режимов. Здесь $f(u) = -u^3 + au + \gamma$

Дальнейшее рассмотрение задачи будет продолжено для таких значений параметров, при которых одно из двух устойчивых состояний равновесия и неустойчивое состояние равновесия невозмущенной системы расположены близко друг от друга (рис. 3): $u_2 - u_1 \ll \ll (a/3)^{1/2}$, то есть для значений параметров вблизи границы моно- и бистабильного режимов невозмущенной системы. Данное условие означает близость состояний равновесия u_1 и u_2 к точке с координатой $u_* = -(a/3)^{1/2}$, где происходит их слияние в момент бифуркации. Система (5) симметрична относительно знака γ и моностабильна для любых $a \leq 0$. Поэтому для определенности можно положить в дальнейшем рассмотрении $\gamma \geq 0$ и $a > 0$. Предполагая, что

$$u_2 - u_1 = 2\mu(a/3)^{1/2}/3^{1/2},$$

где $0 < \mu \ll 1$, и что u_1 и u_2 симметричны относительно точки $(a/3)^{1/2}$

$$u_{1,2} = (a/3)^{1/2}(-1 \mp \mu/3^{1/2}),$$

можно получить, отыскивая u_1 и u_2 по формуле Кардано,

$$\gamma = 2(a/3)^{3/2}(1 - \mu^2/2),$$

то есть

$$\mu = \{2[1 - \gamma/(2(a/3)^{3/2})]\}^{1/2}. \quad (6)$$

Полагая $u(t) = u_{1,2} + \xi(t)$, где ξ достаточно малая величина, и разлагая правую часть (5) в ряд Тейлора до второго порядка по $\xi(t)$, можно получить

$$\dot{\xi} = 2\alpha\xi + \Delta q(t) + \varepsilon\xi^2, \quad (7)$$

где

$$\alpha = \mp a\mu/3^{1/2} - \mu^2/9,$$

$$\varepsilon = (3a)^{1/2}(1 \pm \mu/3^{1/2} - \mu^2/18).$$

Уравнение (7) есть общее уравнение Риккати [5], которое заменой

$$\xi = -(y'/y + \alpha)/\varepsilon \quad (8)$$

преобразуется в уравнение

$$\ddot{y} + [-\alpha^2 + \Delta\varepsilon q(t)]y = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой уравнение Матье, динамика которого рассмотрена в [6].

Как видно из (7), если $\Delta=0$, то система имеет два состояния равновесия: устойчивое и неустойчивое. Если Δ увеличивать от нуля, то из состояний равновесия рождаются, соответственно, устойчивое и неустойчивое периодические движения, которые при дальнейшем увеличении Δ сливаются, образуя полуустойчивое периодическое движение, и далее исчезают. (Все траектории с одной стороны полуустойчивого периодического движения стремятся к нему и удаляются от него с другой стороны при $t \rightarrow +\infty$ [7].) Соотношение параметров, отвечающее полуустойчивому периодическому движению, в данном случае определяет границу моно- и бистабильного режимов исходной системы (5).

Для того, чтобы уравнение (7) имело ограниченное решение $\xi_*(t)$, достаточно, чтобы существовало не имеющее нулей решение уравнения (9) $y_*(t)$, так как стремление $y_*(t)$ к нулю означает, согласно (8), стремление $\xi_*(t)$ к бесконечности.

Согласно [6] любое решение уравнения Матье

$$\ddot{y} + [A + Bq(t)]y = 0 \quad (10)$$

является неосциллирующим, то есть имеющим не более одного нуля на любом конечном интервале, если параметры A и B принадлежат зоне неустойчивости с нулевым номером или границе этой зоны с зоной устойчивости с нулевым номером. Для любых других значений параметров любое решение (10) является осциллирующим, то есть имеет счетное число нулей.

Область пространства параметров, состоящая из нулевой зоны неустойчивости и ее границы с нулевой зоной устойчивости, может быть описана согласно [6] неравенством

$$A \leq -\Psi_q(B),$$

где $\Psi_q(B)$ определяется функцией $q(t)$ и обладает следующими свойствами:

$$\Psi_q(B) \geq 0, \quad \Psi_q(0) = 0,$$

$$\Psi_q(B) < |B|, \quad \Psi_q(-B) = \Psi_q(B),$$

$$\Psi_q(B \rightarrow 0) = O(B^2), \quad 0 < d\Psi_q/dB < 1,$$

при этом уравнение

$$\Psi_q(B) = \kappa B, \quad |\kappa| < 1,$$

имеет два и только два корня, один из которых равен нулю. Поэтому неосциллирующее решение (9) и соответствующее ему ограниченное решение (7) следует искать в области параметров

$$\alpha^2 \geq q\Psi_q(\varepsilon\Delta).$$

Всегда существует такое $y_*(t)$, что $\xi_*(t)$, соответствующее ему согласно преобразованию (8), есть π -периодическая функция. Утверждение следует из того факта, что условие $\xi_*(t+\pi)=\xi_*(t)$ и равенство нулю определителя Вронского для решений $y_*(t+\pi)$ и $y_*(t)$ эквивалентны. Последнее означает линейную зависимость между $y_*(t+\pi)$ и $y_*(t)$. Но согласно теории Флоке [6] такое решение уравнения (10) всегда существует для любых значений параметров A и B .

Уравнение (7) может быть линеаризовано около предполагаемого ограниченного периодического движения $\xi_*(t)$. В результате можно найти условие полуустойчивости $\xi_*(t)$ как условие ненарастания и неубывания малых возмущений вблизи $\xi_*(t)$ на периоде

$$\int_0^\pi (\alpha + \varepsilon \xi_*(t)) dt = 0,$$

что эквивалентно

$$|y_*(\pi)/y_*(0)| = 1.$$

Последнее уравнение означает условие принадлежности параметров границе зон неустойчивости и устойчивости уравнения Матье. На основе полученных результатов можно заключить: отвечающая полуустойчивому периодическому движению в (7) бифуркационная граница совпадает с границей зон неустойчивости и устойчивости с нулевым номером уравнения Матье (9). Таким образом, искомое уравнение границы

$$\alpha^2 = \Psi_q(\varepsilon\Delta). \quad (11)$$

Согласно [6] зависимость $A = -\Psi_q(B)$ для уравнения (10) может быть найдена как удовлетворяющая краевой задаче

$$\ddot{y} + [A + Bq(t)]y = 0,$$

$$y(\pi) = y(0), \quad \dot{y}(\pi) = \dot{y}(0).$$

Решение данной краевой задачи эквивалентно нахождению такого соотношения параметров, что характеристическая константа Ляпунова $\Lambda_q(A, B)$ для (10) равна 1. Согласно определению

$$\Lambda_q(A, B) = 1/2(y_1(\pi) + \dot{y}_2(\pi)),$$

где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – решения уравнения Матье с начальными условиями

$$y_1(0) = 1, \quad \dot{y}_1(0) = 0,$$

$$y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 1.$$

При вычислении характеристической константы Ляпунова за начальную точку необходимо принять $\Lambda_q(0, 0) = 1$, что соответствует границе зон с нулевым номером. Как видно, в отсутствие внешнего воздействия $\Psi_q(B) \equiv 0$. Таким образом, задача нахождения полуустойчивого периодического движения в неавтономной системе (7) (достаточно сложная для общего случая произвольной функции $q(t)$) сведена к более простой задаче решения дифференциального уравнения и нахождения нулей функции.

Уравнение (11) можно переписать в виде

$$(\mp a\mu/3^{1/2} - \mu^2/9)^2 = \Psi_q[\Delta(3a)^{1/2}][1 \pm \mu/3^{1/2} - \mu^2/18].$$

Чтобы упростить рассмотрение, слагаемое с μ^2 в левой части и слагаемые с μ и μ^2 в правой части уравнения можно отбросить как несущественные, тогда уравнение границы принимает вид

$$a^2\mu^2/3 = \Psi_q(\Delta(3a)^{1/2}). \quad (12)$$

Полагая $\mu < \mu_0 \ll 1$, $\mu_0 = \text{const}$ как условие применимости для (12) и принимая во внимание симметрию задачи относительно знака γ , можно получить уравнение бифуркационной кривой, разделяющей области моно- и бистабильности системы (5)

$$|\gamma| = 2(a/3)^{3/2} - \Psi_q(\Delta(3a)^{1/2})/(3a)^{1/2} \quad (13)$$

с условием применимости

$$a > 3(\Delta/\mu_0^2)^{2/3}. \quad (14)$$

Неравенство (14) следует из условий $\mu < \mu_0$ и $\Psi_q(B) < |B|$. Кроме того, условие (14) может быть интерпретировано как приближение малого возмущения. Из формулы (13) следует, что граница моно- и бистабильного режимов смещается в сторону бистабильной области. Это означает, что при возмущении одномерной бистабильной системы периодическим воздействием образуется область параметров, отвечающая бистабильному режиму в невозмущенной системе и моностабильному режиму в возмущенной.

На рис. 4 представлены примеры функций Ψ_q . Функции Ψ_{rec} , Ψ_{sin} и Ψ_{sin^3} соответствуют прямоугольному, синусоидальному (sin) и \sin^3 π -периодическим воздействиям. Пунктиром на рисунке показана биссектриса. Функции Ψ_{sin} и Ψ_{sin^3} построены численно, функция Ψ_{rec} найдена аналитически. Стоит отметить, что согласно свойствам функции Ψ_q и условию применимости теории

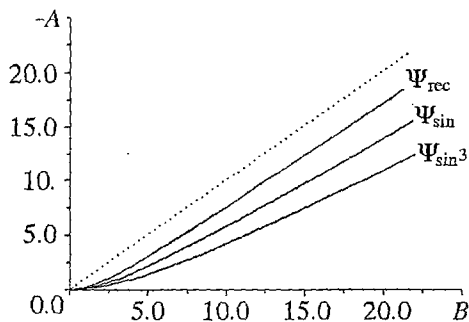


Рис. 4. Примеры функций Ψ_q для прямоугольного (Ψ_{rec}), синусоидального (Ψ_{sin}) и \sin^3 (Ψ_{sin^3}) π -периодических воздействий

$$\Psi_q(\Delta(3a)^{1/2})/(3a)^{1/2} < \Delta < \mu_0^2(a/3)^{3/2} \ll 2(a/3)^{3/2},$$

поэтому судить о величине смещения границы режимов для различных внешних воздействий удобно по виду функций Ψ_q на плоскости $(B, -A)$.

3. Поведение системы вблизи границы моно- и бистабильного режимов при возмущении типа динамического хаоса

В данном разделе рассматривается система (3) в предположении, что $q(t)$ динамическое хаотическое воздействие, то есть воздействие порожденное внешней динамической системой с n -мерным фазовым пространством и хаотическим аттрактором. Встает вопрос, как в данном случае определить моно- и бистабильный режимы? По аналогии с предыдущим разделом моно- и бистабильный режимы могут быть определены как наличие соответственно одного или двух притягивающих множеств в $(n+1)$ -мерном фазовом пространстве, где система автономна.

Пусть аттрактор, отвечающий $q(t)$, центральносимметричен (условие

аналогичное симметрии периодического сигнала), а $q(t)$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T q(t) dt = 0,$$

$$|q(t)| \leq 1.$$

В предположении близости параметров к границе моно- и бистабильного режимов невозмущенной системы и в полном соответствии со случаем периодического воздействия система (3) может быть сведена к уравнению Матье (9). Продолжением построения аналогии между периодическим и хаотическим случаями могут служить следующие рассуждения.

Предполагаем, что аттрактор, реализующий $q(t)$, обладает свойством рекуррентности траекторий, то есть для любой точки x на аттракторе и для любого $\delta > 0$ существует такой временной отрезок $T_x(\delta)$, что расстояние в фазовом пространстве между начальной точкой $x(t=0)$ и конечной точкой дуги траектории временной длины $T_x(\delta)$ меньше δ . Если отрезок $T_x(\delta)$ использовать в качестве периода при вычислении $\Lambda_q(A, B)$ в уравнении Матье, и функции $A = -\Psi_q(B)$, вычисленные для любых начальных точек на аттракторе, будут совпадать друг с другом с точностью δ , то аналогия между периодическим и хаотическим воздействиями можно считать построенной. Иными словами, воздействие динамического хаотического сигнала на смену режимов в одномерной бистабильной системе эквивалентно с точностью δ воздействию периодического сигнала, полученного повторением отрезка реализации временной длины, равной периоду возвращаемости для любой точки на аттракторе.

Для доказательства высказанных предположений был проведен численный эксперимент. В качестве источника внешнего воздействия была использована система Чуа [8]

$$\dot{x} = \sigma(y - f(x)),$$

$$\dot{y} = x - y + z,$$

$$\dot{z} = -\beta y,$$

где $f(x) = 0.0625x^3 - 0.1666x$. Хаотическому режиму в данной системе отвечает аттрактор типа двойного завитка (double scroll). Временные интервалы $T_x(\delta)$ были найдены для четырех произвольных точек на аттракторе: $T_1 = 28.777$, $T_2 = 76.815$,

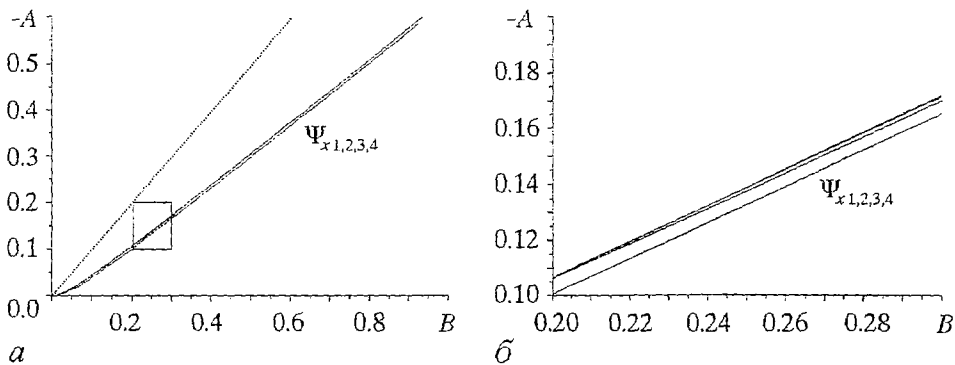


Рис. 5. График функций Ψ_q , построенных по четырем отрезкам реализации x -координаты аттрактора Чуа (а); выделенная область в увеличенном масштабе (б)

$T_3=49.304$, $T_4=43.577$ (для параметров: $\delta=0.01, \sigma=5.9, \beta=7.7$). Вычисление функции Ψ_q было сделано для всех трех координат аттрактора.

На рис. 5 представлены кривые $-A=\Psi_q(B)$ для x -координаты аттрактора для всех четырех точек (кривые $\Psi_{x1,2,3,4}$). На рис. 6 и 7 представлены кривые для y - и z -координат аттрактора, соответственно, для тех же точек (кривые $\Psi_{y1,2,3,4}$ и $\Psi_{z1,2,3,4}$). Кривые для различных периодов воздействия построены с одинаковой точностью, этим объясняется различная длина кривых. Пунктирные линии на рисунках – биссектрисы. Как видно, кривые, отвечающие разным точкам и соответственно различным интервалам $T_x(\delta)$, практически совпадают. Этот факт подтверждает предположение о возможности построения аналогии данным способом.

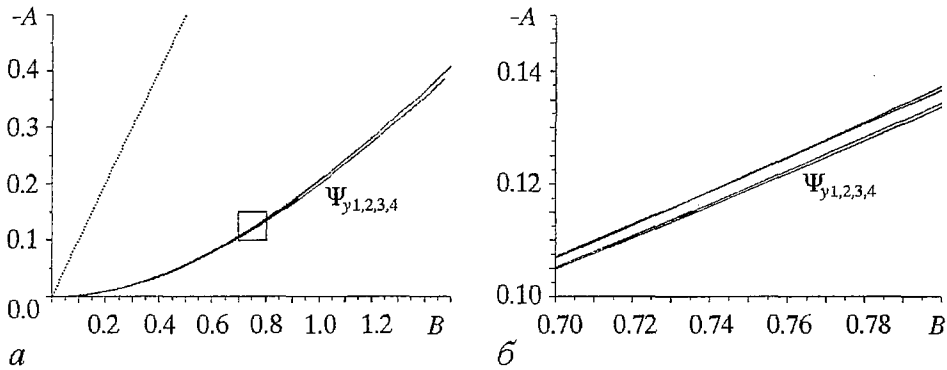


Рис. 6. График функций Ψ_q , построенных по четырем отрезкам реализации y -координаты аттрактора Чуа (а); выделенная область в увеличенном масштабе (б)

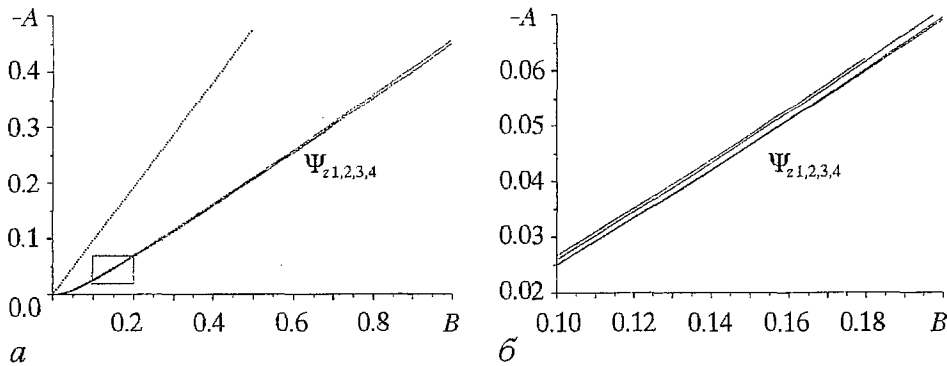


Рис. 7. График функций Ψ_q , построенных по четырем отрезкам реализации z -координаты аттрактора Чуа (а); выделенная область в увеличенном масштабе (б)

Заключение

В данной работе сделана попытка исследования эффекта смещения бифуркационной границы, разделяющей моно- и бистабильный режимы в одномерной системе с кубической нелинейностью при аддитивном воздействии на нее малого периодического и динамического хаотического возмущения. На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.

- В случае периодического воздействия граница моно- и бистабильного режимов смещается в бистабильную область невозмущенной системы. Существует

общий закон смещения границы для любого периодического воздействия, нахождение которого сводится к задаче отыскания границы зон неустойчивости и устойчивости уравнения Матье.

• В численном эксперименте доказано, что задача нахождения закона смещения границы моно- и бистабильного режимов при динамическом хаотическом воздействии малой амплитуды может быть сведена с некоторой точностью к периодическому случаю. В качестве периода может быть взят временной интервал возвращаемости траектории на хаотическом аттракторе для любой точки аттрактора. Граница режимов в данном случае также смещается в бистабильную область невозмущенной системы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ 99-02-17742, 15-00-96582).

Библиографический список

1. Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А. О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, № 3. С. 165.
2. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Советское радио, 1978.
3. Бочков Г.Н., Цветов М.А., Шалфеев В.Д. Исследование статистических свойств системы ФАПЧ методом кумулянтов // Динамика систем. Фазовая синхронизация / Под. ред. Ю.И. Неймарка. Горький: Изд-во ГГУ, 1976. С. 68.
4. Сергеев О.С. О смене режимов в бистабильной системе с шумом // Вестник ННГУ. Радиофизика. 1998. № 1. С. 151.
5. Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1978.
6. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
7. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
8. Chua's circuit: A Paradigm for Chaos / Ed. by R.N. Madan. Singapore: World Scientific, 1993.

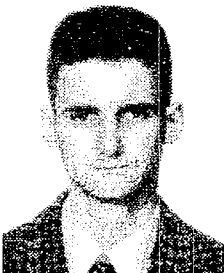
Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 17.10.2000
после доработки 21.11.2000

BISTABLE SYSTEM WITH EXTERNAL DYNAMICAL INFLUENCE

O.S. Sergeev

In this paper we have studied the influence of additive periodical and dynamical chaos perturbation on the location of the bifurcation boundary which separates mono- and bistable regimes in bistable one-dimensional dynamical system with cubic nonlinearity.



Сергеев Олег Сергеевич – родился в Дзержинске Горьковской области (1973). Окончил радиофизический факультет ННГУ (1996). В настоящее время является аспирантом кафедры теории колебаний указанного факультета. Область научных интересов – теория колебаний и волн, влияние внешних воздействий на динамику систем. Является соавтором нескольких научных публикаций по указанным направлениям.