



О синхронизации квазипериодических колебаний при С-бифуркациях в кусочно-линейной неавтономной динамической системе

Ж.Т. Жусубалиев, Е.Ю. Емельянова

Исследуется поведение кусочно-линейной динамической системы с внешним периодическим воздействием при С-бифуркациях, связанное с возникновением резонансных циклов, являющихся следствием синхронизации квазипериодических колебаний. В качестве примера рассматривается динамика системы автоматического управления с широтно-импульсной модуляцией первого рода, описываемой трехмерной кусочно-линейной неавтономной динамической системой. В плоскости параметров обнаружены области существования резонансных циклов на двумерном торе (области синхронизации) специфической формы, аналогичные языкам Арнольда, но имеющие существенные различия в сравнении с последними в структуре внутреннего устройства и бифуркационных переходах, которые принципиально не реализуются в гладких динамических системах. Детально изучается структура С-границ и бифуркационные переходы внутри области синхронизации.

Введение

Многие задачи из приложений, например, осцилляторы с сухим трением, виброударные системы [1], релейные и импульсные системы автоматического управления [2,3], электронные и радиотехнические схемы с кусочно-гладкими характеристиками или с ключевыми элементами (см., например, [4]), широкий класс устройств преобразовательной техники [5] и др. часто приводят к исследованию поведения решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых имеют разрывы первого рода на некоторых гладких гиперповерхностях (поверхностях) [6–8]. Эти поверхности разделяют фазовое пространство динамической системы на некоторые области, в каждой из которых поведение системы описывается различными дифференциальными уравнениями с достаточно гладкими правыми частями. При переходе изображающей точки из одной области гладкости в другую решения этих уравнений «сшиваются» тем или другим образом на границах областей, например, по непрерывности или условиями разрыва [1,3,7,8].

Рассмотрению колебательных режимов динамических систем с разрывными правыми частями посвящены многочисленные статьи. В работах [9–11] исследовалась динамика системы автоматического управления с широтно-импульсной модуляцией второго рода (ШИМ-2), описываемой двумерной кусочно-линейной динамической системой с внешним периодическим воздействием. Было показано, что в такой системе наряду с периодическими могут

возникать и хаотические колебания. Как следует из результатов этих работ, переход от режимов периодических колебаний к хаотическим при изменении параметров может происходить по типичным сценариям, например, через каскад бифуркаций удвоения периода, либо через жесткое возникновение множества различных локально устойчивых периодических движений, каждое из которых с изменением параметров может претерпевать конечную или бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающихся переходом к хаосу.

В то же время, в динамических системах с разрывными правыми частями переходы к хаосу могут иметь некоторые особенности, связанные со специфическими для таких систем бифуркациями. Как известно, в кусочно-гладких динамических системах возможны различные типы периодических решений (см., например, [1,3]). Периодическое решение конкретного типа характеризуется вполне определенной последовательностью прохождения фазовой точкой областей кусочной гладкости, а следовательно, определенным порядком сшивания траектории этого движения из отдельных участков. При изменении параметров возможны специфические нарушения условий существования периодического решения, связанные с изменением числа участков фазовых траекторий, из которых сшивается траектория движения [1]. Подобные нарушения топологической структуры фазового пространства получили название S -бифуркаций периодических решений [1].

К числу первых работ, в которых были описаны S -бифуркации, по-видимому, следует отнести работы М.И.Фейгина [12–14]. В [12] были получены аналитические критерии удвоения периода колебаний, а также слияния двух циклов различных типов с последующим их исчезновением. Для примера в [12] приведены результаты анализа удвоения периода колебаний и слияния двух циклов при S -бифуркациях в двумерной кусочно-линейной неавтономной динамической системе, описывающей поведение механической системы с ограничителем перемещения. В [13] для этой динамической системы с использованием описанного в работе [12] локального подхода получены аналитические условия рождения сложных субгармонических колебаний и показана возможность рождения семейств неустойчивых циклов. В [14] установлено соответствие между аналитическими условиями S -бифуркаций, приведенными в [12,13], и спектром собственных значений матриц локальных точечных отображений. В [14] эта методика применена сначала к случаю двумерного кусочно-линейного отображения, зависящего от трех параметров, для построения карты динамических режимов и изучения структуры бифуркационных границ, а затем – для иллюстрации возможности возникновения хаотических колебаний при S -бифуркациях в одномерном кусочно-линейном отображении. Эти результаты были систематизированы в монографии [1], где приводится классификация типичных S -бифуркаций коразмерности один в общем классе кусочно-гладких динамических систем.

В более поздних работах [15–17] Н.Е. Nusse и J.A. Yorke назвали S -бифуркации *border collision bifurcations*. На основе кусочно-линейного двумерного отображения и отображения Хенона они построили семейство кусочно-гладких двумерных отображений [15]. Там же представлены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие типичные S -бифуркационные переходы (см. также [16,17]) такие, например, как переходы от устойчивого цикла периода 2 к устойчивым циклам периода m , а также от устойчивого цикла к так называемым циклам хаотических интервалов [18] (в [15–17] они названы *m-piece chaotic attractor*). Подробное исследование механизмов возникновения и динамических свойств таких притягивающих множеств приведено в [18,19].

Бифуркации для семейства кусочно-гладких одномерных отображений численно и аналитически исследованы в [16]. Детальное обсуждение S -бифуркаций в одномерных кусочно-линейных отображениях приведено в [17] (см. также [14, 18,19]).

Для кусочно-линейного трехсегментного (бимодального) отображения –

three-segment (bimodal) piecewise-linear continuous 1D-map – в трехмерном пространстве параметров аналитически построены [19] области периодичности с различными числами вращения, соответствующие языкам Арнольда. Показано, что разрушение двумерного тора (авторы этой работы используют термин «разрушение языков Арнольда») связано с С-бифуркациями.

Сводка некоторых результатов М.И.Фейгина в контексте современной теории бифуркаций имеется в [20]. Там же можно найти ссылки на более поздние его работы, опубликованные в середине и конце 90-х годов. Обсуждаются типичные динамические особенности кусочно-гладких систем, связанных с С-бифуркациями, grazing bifurcations, приводится классификация С-бифуркаций. Основное внимание уделено вопросам управления бифуркациями и хаосом в кусочно-гладких динамических системах. Для примера рассматриваются трехмерная кусочно-линейная автономная модель схемы Чуа и двумерная неавтономная кусочно-линейная модель преобразователя постоянного напряжения с широтно-импульсной модуляцией.

При исследовании двумерной системы неавтономных дифференциальных уравнений в [9] обнаружен случай слияния двух циклов и последующего их исчезновения через С-бифуркации, а также С-бифуркации простого изменения типа решения. Однако для целей, преследуемых в указанной работе, это не имело принципиального значения и внимание на этом не акцентировалось.

Для двумерной модели релейной системы с внешней принудительной синхронизацией в [21] были выявлены С-бифуркации удвоения периода 3-цикла, С-бифуркации простого изменения типа решения с потерей локальной устойчивости. Описано явление бесконечного каскада аддитивного увеличения периода. Из результатов численных расчетов, представленных в этой работе, следует, что хаотизация колебаний при движении по параметрам от одной области периодичности к другой происходит по следующему сценарию: сначала от устойчивого цикла возникает цикл хаотических интервалов через С-бифуркацию (см., например, [19]), который затем с изменением управляющего параметра преобразуется в односвязное хаотическое множество.

Для трехмерной кусочно-линейной системы дифференциальных уравнений с внешним периодическим воздействием в [22,23] изучены более сложные случаи поведения при С-бифуркациях. Показано, что при С-бифуркациях возможно не только удвоение, но и утроение, учетверение и упятерение периода колебаний, возникновение множества периодических режимов с кратными периодами, описаны сценарии перехода к хаосу через последовательность С-бифуркаций. Результаты детальных исследований С-бифуркаций и переходов к хаосу в многомерных кусочно-гладких системах дифференциальных уравнений представлены в [24].

В данной работе исследуются С-бифуркации резонансных циклов на двумерном торе для трехмерной кусочно-линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений. В качестве примера рассматривается динамика системы автоматического управления с широтно-импульсной модуляцией первого рода (ШИМ-1), описываемой трехмерной кусочно-линейной неавтономной динамической системой.

Показано, что в плоскости параметров на линии, где устойчивый цикл с периодом внешнего воздействия бифурцирует в двумерный тор, существуют точки коразмерности два, на которые опираются языки синхронизации специфической формы, аналогичные языкам Арнольда [25–27]. Такие области в работе названы «языками С-синхронизации» в силу того, что имеют существенные различия в структуре внутреннего устройства и бифуркационных переходах в сравнении с языками Арнольда. Как показывает численный анализ, языки С-синхронизации в плоскости параметров расположены всюду плотно. Такие области можно условно разделить на два типа. Первый тип отвечает резонансным циклам с четным, а второй – с нечетным периодом. Резонансные кловы ограничены не кривыми седло-узловой бифуркации (см., например, [25,26]), а С-бифуркационными линиями, где сливаются и исчезают устойчивый и неустойчивый циклы различных

типов. Детально изучается структура С-границ и бифуркационные переходы внутри области С-синхронизации.

1. Постановка задачи и методы исследования

В качестве примера системы управления с широтно-импульсной модуляцией рассмотрим транзисторный преобразователь постоянного напряжения [5], схема замещения которого приведена на рис. 1, а, где ТП – транзисторный преобразователь; КУ – пропорционально интегрирующее корректирующее звено; ДН – датчик напряжения; ШИМ – широтно-импульсный модулятор; $U_{osc}(t)$ – внешнее периодическое воздействие. Регулирование выходного напряжения x_2 осуществляется методом широтно-импульсной модуляции первого рода [5]. Временные диаграммы, поясняющие принципы формирования импульсов управления ключевыми элементами транзисторного преобразователя, приведены на рис. 1, б.

Уравнение движения рассматриваемой системы имеет вид

$$dX/dt = AX + B(t,X), \quad B(t+a,X) \equiv B(t,X), \quad (1)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L & 0 \\ 1/C & -1/(CR_{II}) & 0 \\ 0 & -\alpha\beta/\tau & -1/\tau \end{bmatrix}, \quad B(t,X) = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 K_F(\xi)/L \\ 0 \\ -\alpha U_{ref}/\tau \end{bmatrix}, \quad B(t,X) = B(K_F(\xi)).$$

Здесь $\xi = \xi(t,X)$, $\xi(t+a,X) \equiv \xi(t,X)$; $K_F(\xi)$ – управляющий сигнал и сигнал на выходе широтно-импульсного модулятора. Выходной сигнал $K_F(\xi)$ модулятора в пределах интервала $(k-1)a < t < ka$, $k=1,2,3,\dots$ определяется [9–11] следующим образом:

$$K_F(\xi) = \begin{cases} 1, & (k-1)a < t < t_k \\ 0, & t_k < t < ka \end{cases} \quad k = 1,2,3,\dots,$$

где a – период внешнего воздействия (период модуляции); величина t_k определяется в зависимости от ξ по алгоритму [9–11]

$$t_k = \begin{cases} (k-1)a, & \xi((k-1)a, X_{k-1}) \leq 0, \\ \rightarrow \xi(t_k, X_{k-1}) = 0, & \xi((k-1)a, X_{k-1}) > 0, \quad \xi(ka, X_{k-1}) < 0, \\ ka, & \xi(t, X_{k-1}) > 0, \quad (k-1)a \leq t \leq ka, \end{cases} \quad (2)$$

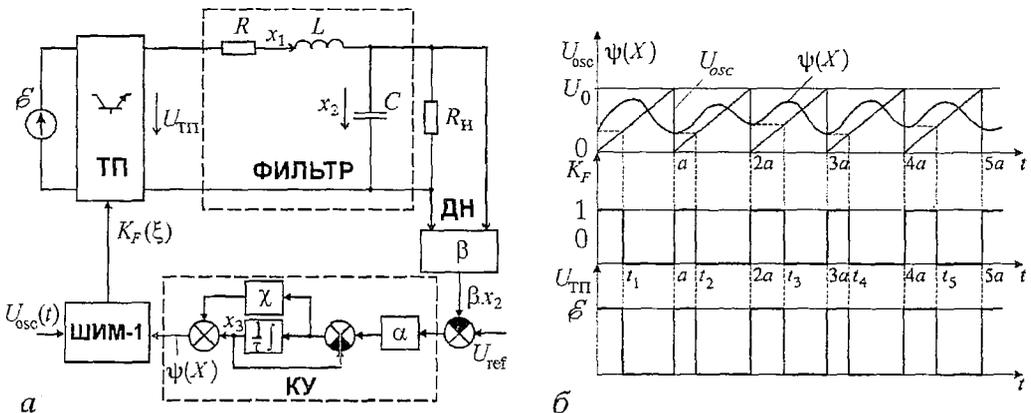


Рис. 1. а – схема замещения преобразователя напряжения с широтно-импульсной модуляцией первого рода; б – временные диаграммы, поясняющие принципы формирования импульсов управления транзисторным преобразователем

$$\xi(t, X) = \psi(X) - U_{\text{osc}}(t), \quad \psi(X) = \alpha \chi(U_{\text{ref}} - \beta x_2) + (1 - \chi)x_3,$$

$$U_{\text{osc}} = U_0(t/a - E_1(t/a)), \quad X_k = X(ka)$$

или

$$\xi(t, X) = \alpha \chi U_{\text{ref}} - U'X - U_0(t/a - E_1(t/a)).$$

Здесь $U' = (0, \alpha\beta\chi, (\chi-1))$ – матрица–строка, определяющая закон регулирования; $E_1(t/a)$ – целая функция.

Параметры динамической системы (1): $R=10.6$ Ом, $L=0.1$ Гн, $R_n=100$ Ом, $C=10^{-6}$ Ф, $E_0=104$ В, $U_0=10$ В, $U_{\text{ref}}=5$ В, $\beta=0.1$, $a=10^{-4}$ с, $\tau=4 \cdot 10^{-4}$ с, $\alpha > 0$, $0 < \chi < 1$.

Исследование динамической системы (1) было сведено к изучению свойств трехмерного отображения

$$X_k = CX_{k-1} + V_k, \quad (3)$$

$$C = \exp(Aa), \quad V_k = [\exp(Aa) - \exp(Aa(1-z_k))]A^{-1}B_1 - [E - \exp(Aa(1-z_k))]A^{-1}B_0,$$

$$B_1 = B(1), \quad B_0 = B(0),$$

$$z_k = \begin{cases} 0, & \alpha\chi U_{\text{ref}} - U'X_{k-1} \leq 0, \\ \alpha\chi U_{\text{ref}}/U_0 - U'X_{k-1}/U_0, & 0 < \alpha\chi U_{\text{ref}} - U'X_{k-1} < U_0, \\ 1, & \alpha\chi U_{\text{ref}} - U'X_{k-1} \geq U_0. \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь $z_k = t_k/a - k + 1$ – относительная длительность импульса (коэффициент заполнения). Период T периодического решения динамической системы (1) в общем случае является кратным периоду внешнего воздействия: $T = ma$, $m = 1, 2, \dots$. Движение с таким периодом будем называть m -циклом [9,11].

Периодические движения находились численно из решения системы трансцендентных уравнений (4) относительно z_1, z_2, \dots, z_m , полученной на основе (3) и условия периодичности [9,11],

$$\Phi_k(z_1, z_2, \dots, z_m) = \mu_k(z_k), \quad k = \overline{1, m}, \quad (4)$$

$$\mu_k(z_k) = \begin{cases} < 0, & z_k = 0, \\ > 0, & z_k = 1, \\ 0, & 0 < z_k < 1, \end{cases}$$

$$\Phi_k(z_1, z_2, \dots, z_m) = \alpha\chi U_{\text{ref}} - U'X_{k-1}^c - U_0 z_k,$$

$$X_{k-1}^c = C^{k-1} [E - C^m]^{-1} \sum_{i=1}^m C^{m-i} V_i + \sum_{i=1}^{k-1} C^{k-1-i} V_i.$$

Для определения типа периодического решения аналогично тому, как это делалось в [1], нами введена характеристика, определяющая порядок прохождения фазовой точкой областей кусочной непрерывности. В качестве таковой естественно было выбрать последовательность циклических точек периода

m : z_k^c , $k = \overline{1, m}$, $z_k^c = z_{k+m}^c$, $k = \overline{1, m}$. Очевидно, что z_k^c , $k = \overline{1, m}$ – суть решение уравнения (4). Тогда порядок сшиваания траектории периодического движения конкретного типа будет определяться любой из характеристик

$$S_{m,1} = (z_1^c z_2^c \dots z_{m-1}^c z_m^c), \quad S_{m,2} = (z_2^c z_3^c \dots z_m^c z_1^c), \quad \dots, \quad S_{m,m} = (z_m^c z_1^c \dots z_{m-2}^c z_{m-1}^c), \quad (5)$$

переходящих друг в друга при циклической перестановке компонент.

Последовательности z_k^c , $k = \overline{1, m}$ можно поставить в соответствие

последовательность, составленную из трех символов 1,0,*, где символы 1 и 0 соответствуют тем z_k^c , $k=\overline{1,m}$, которые принимают значение 1 и 0, а «*» – $0 < z_k^c < 1$. Тогда характеристики (5), определяющие тип движения, могут быть записаны в символической форме, получаемой заменой z_k^c , $k=\overline{1,m}$ в (5) соответствующими символами. Использование символической характеристики позволяет существенно упростить понимание общей картины возможных типов движений и бифуркаций.

Число участков фазовых траекторий, из которых сшивается траектория цикла периода m ,

$$N = 2 \cdot (m - r - l),$$

где r, l – число нулей и единиц в символической характеристике. Изменению числа участков сшиваемых фазовых траекторий соответствует обращение символа «*» в нуль или единицу, или наоборот.

Локальная устойчивость периодических решений определяется собственными числами ρ_i , $i=1,2,3$ (мультипликаторами) основной матрицы $F(T)$, являющимися корнями уравнения

$$\det(F(T) - \rho E) = 0,$$

где основная матрица рассчитывается по рекуррентной формуле [11]

$$F_k = F_{k-1} \partial X_k^c / \partial X_{k-1}^c, \quad F_0 = E, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad F(T) = F_m,$$

$$\partial X_k^c / \partial X_{k-1}^c = C + \begin{cases} \partial X_k^c / \partial z_k (\partial z_k / \partial X_{k-1}^c)', & 0 < z_k < 1, \\ 0, & z_k = 1, \quad z_k = 0. \end{cases}$$

Здесь O – нулевая матрица.

2. Анализ областей существования резонансных циклов на двумерном торе

Результаты двухпараметрического анализа динамической системы в плоскости параметров $\Pi = \{(\alpha, \chi): 14 \leq \alpha \leq 43; 0.097 \leq \chi \leq 0.124\}$ представлены на рис. 2. На этом рисунке через Π_m обозначены области, образованные множеством точек $P = (\alpha, \chi)$, $P \in \Pi$, в которых существуют резонансные циклы периода m , $m > 1$. На рис. 2, а показаны четырнадцать относительно широких языков S -синхронизации. На самом деле число языков в Π бесконечно. Между языками синхронизации расположены области квазипериодичности и хаоса. Языки синхронизации опираются на линию N_ϕ , в точках которой цикл периода 1 бифурцирует в двумерный тор (рис. 2, б), и ограничены S -бифуркационными линиями, где устойчивый m -цикл одного типа сливается с неустойчивым другого типа того же периода и исчезает. Ключи S -синхронизации расположены всюду плотно. Тем не менее, суммарная их ширина на кривой N_ϕ равна нулю, а вправо от N_ϕ растет, но немонотонно.

На диаграмме можно выделить две группы областей S -синхронизации. Первую группу составляют области, которые отвечают резонансным циклам с нечетным периодом, а вторую – с четным. Такое разделение связано с различием в структуре их внутреннего устройства в Π , которое состоит в том, что в Π_m с четным m существует единственный устойчивый m -цикл, непрерывный по параметрам, в то время как в Π_m с нечетным m имеются области, где существуют два m -цикла различных типов.

Начнем рассмотрение с анализа структуры S -границ областей Π_m с

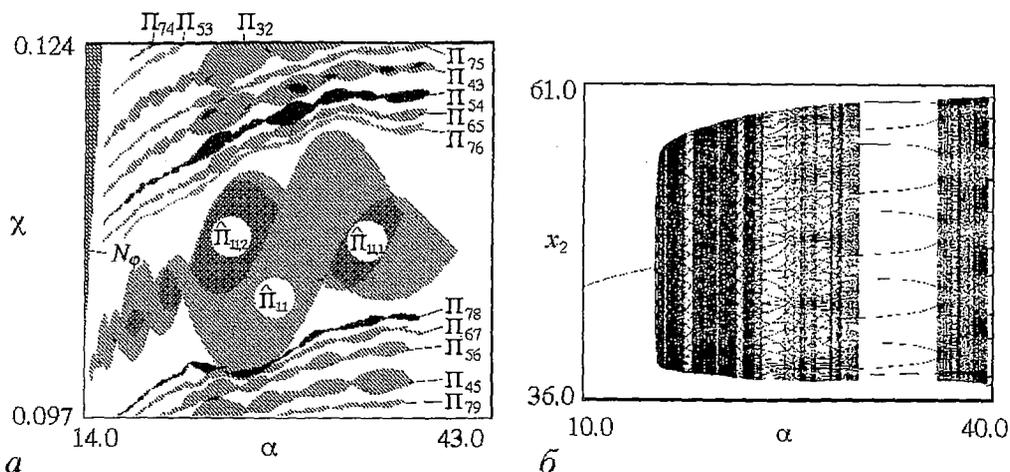


Рис. 2. *a* – двухпараметрическая диаграмма областей существования резонансных циклов в плоскости параметров $P = \{(\alpha, \chi): 14 \leq \alpha \leq 43; 0.097 < \chi < 0.124\}$; *b* – однопараметрическая бифуркационная диаграмма, построенная в сечении, иллюстрирующая возникновение двумерного тора из цикла периода 1

нечетным периодом на примере Π_{11} . Результаты двухпараметрического бифуркационного анализа приведены на рис. 3, *a*. На диаграмму нанесены четыре С-бифуркационные линии L_1, L_2, L_3, L_4 , каждая из которых состоит из совокупности С-границ двух типов

$$L_j = \cup_i L_{ji}^{\pm}, \quad j = \overline{1,4}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где линии L_{ji}^+ соответствуют С-границам слияния устойчивого и неустойчивого циклов разных типов и последующего их исчезновения, а L_{ji}^- – С-границам простого изменения типа решения.

Область Π_{11} ограничена совокупностью С-бифуркационных линий L_{ji}^+ . На рис. 3, *a* через $\hat{\Pi}_{11,i}, i = 1, 2, \dots, \hat{\Pi}_{11,i} \subset \Pi_{11}$, обозначены те части Π_{11} , где для всех точек $P \in \hat{\Pi}_{11,i}$ существуют два устойчивых 11-цикла разных типов. Области $\hat{\Pi}_{11,i}, i = 1, 2, \dots$ ограничены С-бифуркационными линиями L_{ji}^+ , в точках которых устойчивый 11-цикл одного типа сливается с неустойчивым другого типа и исчезает. Внутри каждой из $\hat{\Pi}_{11,i}, i = 1, 2, \dots$ периодические движения гладко зависят от параметров, а при переходе через точки С-границ L_{ji}^+ наблюдаются жесткие переходы от устойчивого 11-цикла одного типа к устойчивому 11-циклу другого типа и наоборот, с типичным для таких переходов гистерезисом. Бифуркационные линии L_{ji}^+ внутри Π_{11} опираются на точки $P_{11,i}, i = 1, 2, \dots$ коразмерности два (рис. 4). На диаграмме (см. рис. 3) приведены символические характеристики устойчивых циклов. Рядом с каждой С-бифуркационной кривой указаны те из $z_k^c, k = 1, 2, \dots, m$ символической характеристики, обращение которых в нуль или единицу приводит к изменению типа решения.

На рис. 3, *a* штриховые и пунктирные линии соответствуют С-границам, где происходит простое изменение числа сшиваемых участков фазовых траекторий (простое изменение типа решения [1]). Они являются продолжением С-границ L_{ji}^+ , обозначенных на диаграмме сплошными линиями. Это означает, что если двигаться по параметрам вдоль $L_j, j = 1, 2, 3, 4$, то при переходе через точки $P_{11,i}, i = 1, 2, \dots$ коразмерности два, линии L_{ji}^+ непрерывно переходят в С-бифуркационные линии L_{ji}^- простого изменения типа решения. Пунктиром обозначены С-границы изменения типа устойчивого цикла, а штриховой линией – неустойчивого.

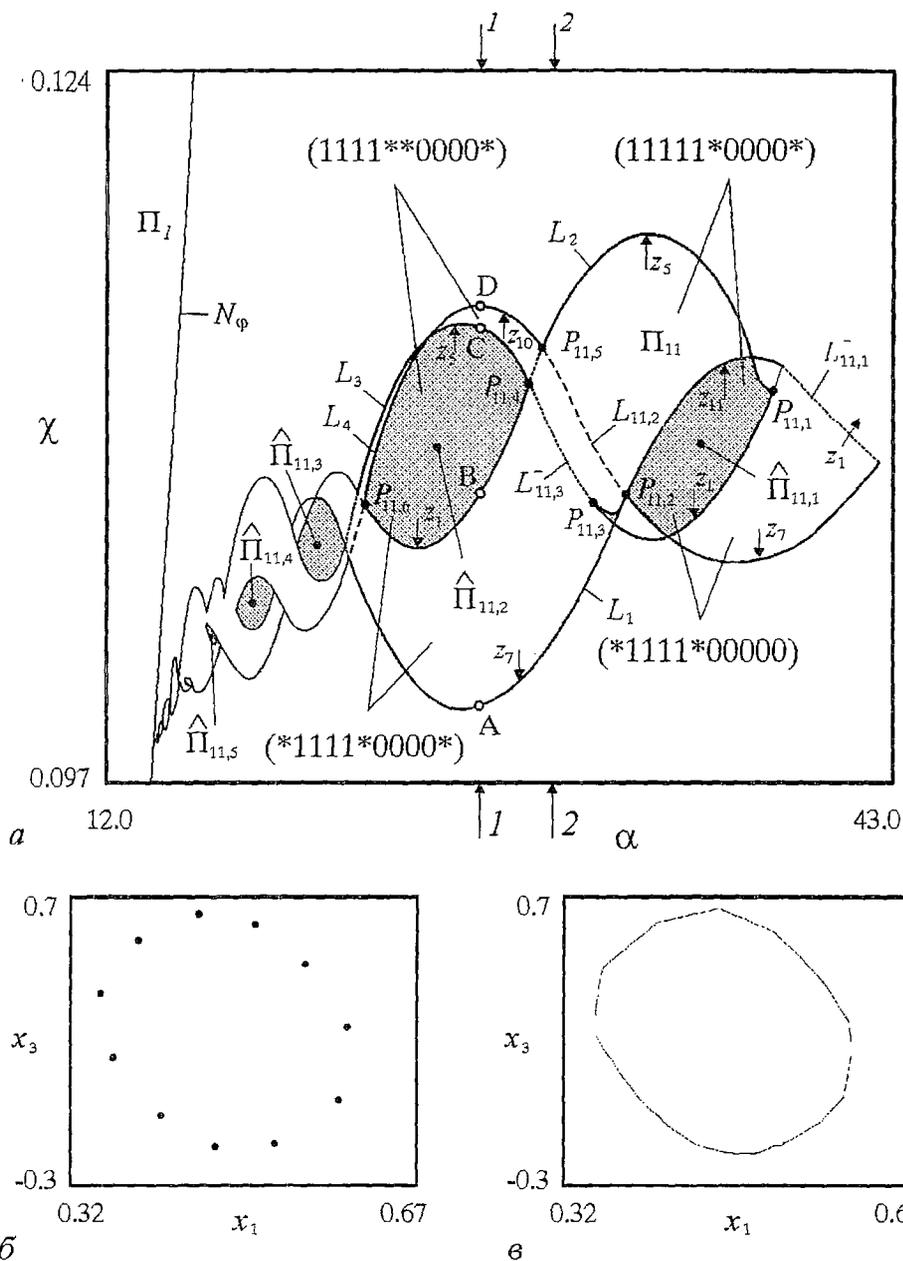


Рис. 3. а – двухпараметрическая бифуркационная диаграмма в плоскости параметров $\Pi = \{(\alpha, \chi) : 12 \leq \alpha \leq 43; 0.097 < \chi < 0.124\}$: сплошные линии соответствуют С-границам, в точках которых происходит слияние устойчивого цикла с неустойчивым; штриховые – С-границам изменения типа устойчивого цикла (для примера на рисунке через $L_{11,2}^-$ обозначена одна из них); пунктирные – С-границам изменения типа неустойчивого цикла (например, линия $L_{11,3}^-$). б – двумерная проекция сечения Пуанкаре для двумерного тора с периодической обмоткой; диаграмма соответствует резонансному циклу периода 11, существующему в области Π_{11} ; сечение Пуанкаре рассчитано для внутренней точки нижней границы Π_{11} при $\alpha=21, \chi=\chi_{\text{int}}$; $\chi_{\text{int}}=0.104470752376667$. в – двумерная проекция сечения Пуанкаре для двумерного тора с квазипериодической обмоткой; диаграмма рассчитана для внешней точки нижней границы Π_{11} при $\alpha=21, \chi=\chi_{\text{int}} - 10^{-14}$, лежащей в области существования двумерного эргодического тора

При переходе из области $\hat{\Pi}_{11,i}$ в область $\hat{\Pi}_{11,i+1}$ число сшиваемых участков фазовых траекторий устойчивых 11-циклов последовательно увеличивается ровно на два. Например, траектории устойчивых циклов, существующих в $\hat{\Pi}_{11,1}$, сшиваются из четырех участков, в $\hat{\Pi}_{11,2}$ из шести, а в $\hat{\Pi}_{11,9}$ — из двадцати. Так как максимальное число сшиваемых участков фазовых траекторий для 11-цикла равно 22, то число областей $\hat{\Pi}_{11,i}$, $i=1,2,\dots,\hat{\Pi}_{11,i} \in \Pi_{11}$ является конечным. В пределе С-границы непрерывно переходят в кривые седло-узловой бифуркации, опирающиеся на линию N_ϕ в точке коразмерности 2. На диаграммах (см. рис. 2, 3) точки, на которые опираются клыки синхронизации, не показаны вследствие чрезвычайной узости областей Π_m вблизи N_ϕ . На рис. 3, б, в приведены двумерные проекции сечения Пуанкаре для двумерного тора с периодической и квазипериодической обмоткой, соответственно. Сечения Пуанкаре рассчитаны для двух близких точек, различающихся на величину 10^{-14} по параметру χ при $\alpha=21$, которые соответствуют внутренней и внешней точке нижней границы Π_{11} . Диаграммы иллюстрируют переход от резонансного цикла к двумерному эргодическому тору при пересечении границы Π_{11} . Численные эксперименты показывают, что вблизи указанного сечения проходит линия разрушения двумерного тора.

Остановимся более подробно на анализе бифуркаций при переходе через точки С-границ. Сначала проведем анализ в сечении $D_1 = \{(\alpha, \chi) : \alpha = 26.7; 0.099 < \chi < 0.116\}$, обозначенном на диаграмме рис. 3, а цифрой 1. Указанное сечение пересекает трансверсально линии L_j , $j=1,2,3,4$ в точках $P \in \Pi$, которые обозначены как А, В, С, D. Значения параметра χ в этих точках обозначим через $\chi_A, \chi_B, \chi_C, \chi_D$.

Результаты бифуркационного анализа приведены на рис. 5: сплошные линии отвечают эволюции устойчивых, а штриховые — неустойчивых циклов. Зависимости мультипликаторов устойчивых и неустойчивых 11-циклов от параметра χ изображены на рис. 6. Отметим существенную особенность рассматриваемой бифуркации. Нетрудно видеть, что мультипликаторы ρ_i , $i=1,2,3$ неустойчивых 11-циклов (а точнее, мультипликаторы тех циклов, у которых происходит изменение числа сшиваемых участков фазовых траекторий) гладко зависят от χ , за исключе-

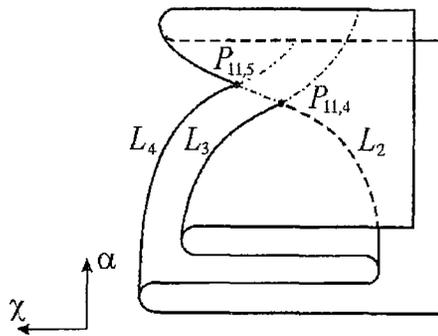


Рис. 4. Фазопараметрическая диаграмма, иллюстрирующая особенности устройства С-границ вблизи точек $P_{11,4}$ и $P_{11,5}$

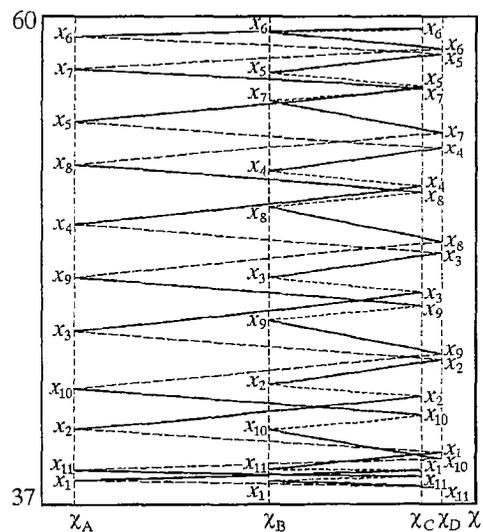


Рис. 5. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для сечения $D_1 = \{(\alpha, \chi) : \alpha = 26.7; 0.099 < \chi < 0.116\}$, обозначенного на рис. 3, а цифрой 1: сплошные линии соответствуют эволюции устойчивых, а штриховые — неустойчивых 11-циклов; $\chi_A, \chi_B, \chi_C, \chi_D$ — точки С-границ, в которых происходит слияние устойчивого цикла с неустойчивым

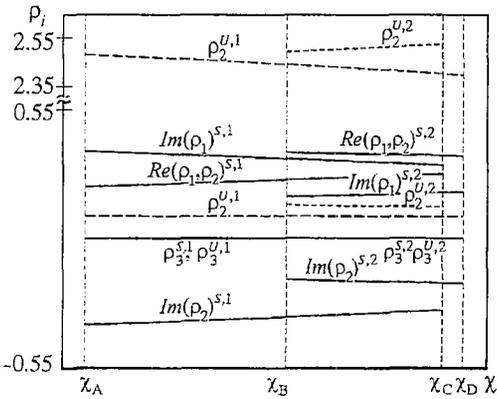


Рис. 6. Зависимости мультипликаторов устойчивого и неустойчивого циклов от параметра χ для сечения $D_1 = \{(\alpha, \chi): \alpha = 26.7; 0.099 < \chi < 0.116\}$: $\rho_i^{s,1}, \rho_i^{s,2}, i=1,2,3$ – мультипликаторы устойчивых 11-циклов $X_{11,1}^s, X_{11,2}^s$; $\rho_i^{u,1}, \rho_i^{u,2}, i=1,2,3$ – мультипликаторы неустойчивых 11-циклов $X_{11,1}^u, X_{11,2}^u$

происходит слияние и последующее исчезновение конечного или бесконечного числа неустойчивых циклов с кратными периодами.

В точке $P = (26.7, \chi_A)$, $\chi_A \approx 0.09988107$, лежащей на линии L_1 , возникает пара 11-циклов: устойчивый и неустойчивый. Обозначим их через $X_{11,1}^s$ и $X_{11,1}^u$, соответственно. Траектория устойчивого цикла $X_{11,1}^s$ сшивается из шести участков: (*1111*0000*), а неустойчивого $X_{11,1}^u$ из восьми: (*1111**000*). С ростом параметра χ вдоль прямой D_1 , в точке $P = (26.7, \chi_C)$, $\chi_C \approx 0.11415795$, лежащей на линии L_3 , устойчивый 11-цикл $X_{11,1}^s$ сливается с неустойчивым 11-циклом $X_{11,2}^u$ и исчезает. Неустойчивый 11-цикл $X_{11,2}^u$ возникает на линии L_2 в паре с устойчивым 11-циклом $X_{11,2}^s$ другого по отношению к $X_{11,1}^s$ типа. Из рис. 5 легко видеть, что при движении по параметру χ , неустойчивый 11-цикл $X_{11,1}^u$ исчезает, сливаясь с устойчивым $X_{11,2}^s$ при переходе через линию L_4 в точке $P = (26.7, \chi_D)$, $\chi_D \approx 0.11498787$.

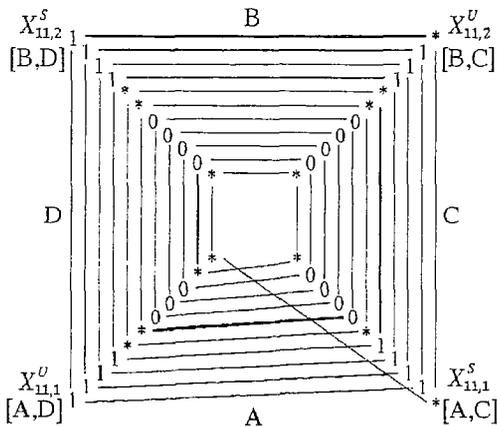


Рис. 7. Диаграмма, иллюстрирующая последовательность С-бифуркационных переходов в сечении $D_1 = \{(\alpha, \chi): \alpha = 26.7; 0.099 < \chi < 0.116\}$

нием бифуркационных значений, в окрестности которых $\rho_i, i=1,2,3$ терпят разрыв первого рода. Это свойство легко доказывается и является типичным для С-бифуркаций [9,15–17,23,24].

Другое свойство состоит в том, что С-бифуркации не связаны с обращением одного из мультипликаторов в +1 или в -1, либо комплексно-сопряженной пары мультипликаторов в $\exp(\pm i\psi)$, $\psi \neq 0, \pi, \pi/2, 2\pi/3$. Например, как видно из рис. 6, максимальный по модулю мультипликатор 11-цикла при бифуркационном значении параметра не обращается в +1, как в случае седло-узловой бифуркации.

В особых случаях, как это показано в [1,23,24], возможно слияние двух неустойчивых циклов разных типов с последующим исчезновением. В указанных работах описаны более сложные переходы, когда в точках С-границы

Описанную последовательность С-бифуркаций можно выразить символически в виде диаграммы, изображенной на рис. 7. На диагоналях этой диаграммы приведены символические характеристики устойчивых $X_{11,1}^s, X_{11,2}^s$ и неустойчивых $X_{11,1}^u, X_{11,2}^u$ циклов, а в вершинах указаны диапазоны их существования по параметру χ . Вертикальные и горизонтальные линии соответствуют переходам через точки С-границ, при которых происходит слияние устойчивого и неустойчивого циклов разных типов и последующее их исчезновение. Выделенные линии отражают динамику изменения тех из $z_k^c, k=1,2,\dots,m$, которые отвечают за изменение числа сшиваемых участков фазовых траекторий при С-бифуркациях.

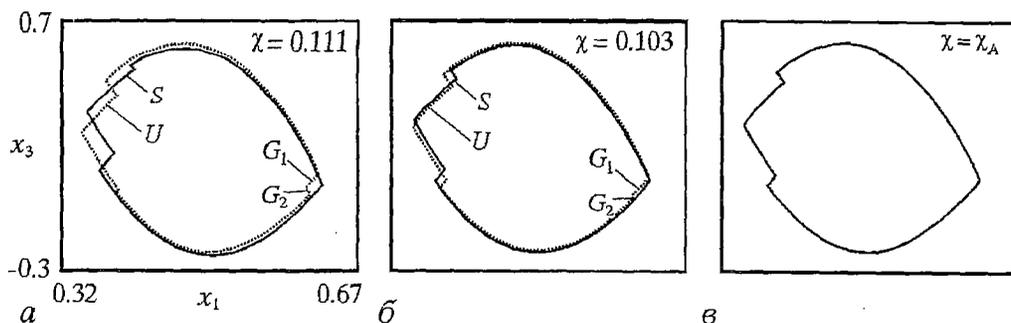


Рис. 8. Двумерные проекции фазовых траекторий устойчивого $X_{11,1}^S$ и неустойчивого $X_{11,1}^U$ 11-циклов для трех значений χ сечения D_1 , иллюстрирующие слияние устойчивого цикла одного типа с неустойчивым другого и последующее их исчезновение через С-бифуркацию: а – фазовые портреты устойчивого и неустойчивого циклов в области резонанса при $\alpha=26.7$, $\chi=0.111$; б – вблизи границы области резонанса при $\alpha=26.7$ и $\chi=0.103$; в – для точки $P=(26.7; \chi_A)$, лежащей на С-бифуркационной линии, где происходит слияние устойчивого цикла с неустойчивым и последующее их исчезновение

На рис. 8 приведены двумерные проекции фазовых траекторий устойчивого (сплошная линия, обозначенная S) и неустойчивого (штриховая линия, обозначенная U) 11-циклов, участвующих в бифуркации, рассчитанные для трех значений χ в сечении D_1 . При движении по параметру χ к точке $P=(26.7; \chi_A)$ величина z_6^c в символической характеристике неустойчивого цикла стремится к нулю. На С-границе z_6^c обращается в нуль (см. рис. 7), вследствие чего исчезают два участка G_1 и G_2 траектории неустойчивого цикла.

Как мы видим из диаграммы рис. 7 (см. также рис. 8), устойчивый цикл $X_{11,1}^S$, также как и $X_{11,2}^S$, сшивается из шести участков фазовых траекторий. Различие $X_{11,1}^S$ и $X_{11,2}^S$ состоит не в числе участков фазовых траекторий, а в порядке их сшивания. Это следует из того, что символические характеристики циклов $X_{11,1}^S$, $X_{11,2}^S$ не переходят друг в друга при циклической перестановке их компонент. Аналогичная картина имеет место и для неустойчивых циклов $X_{11,1}^U$, $X_{11,2}^U$, сшиваемых из восьми участков фазовых траекторий.

Остается теперь рассмотреть переходы через точки С-границ, отвечающих бифуркации простого изменения типа решения. Результаты численных расчетов для сечения $D_2=\{(\alpha, \chi): \alpha=29.7; 0.101 < \chi < 0.116\}$, обозначенного на рис. 3, а цифрой 2, приведены на рис. 9. Здесь изображена эволюция устойчивых и неустойчивых циклов при вариации параметра χ , а на рис. 10 показана динамика изменения их мультипликаторов. На рис. 11 приведена динамика изменения устойчивого и неустойчивого 11-циклов в зависимости от χ в проекции на плоскость (x_1, x_2) . Кружочками отмечены

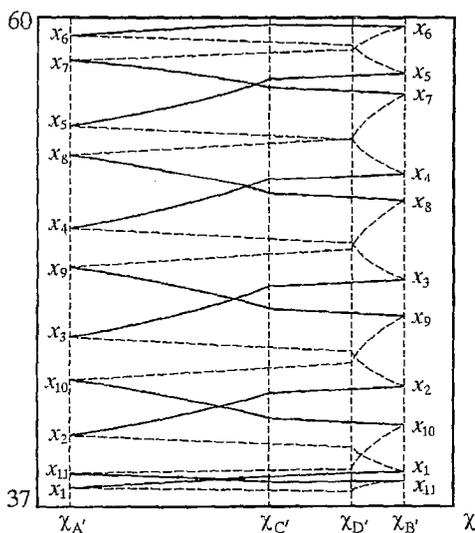


Рис. 9. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для сечения $D_2=\{(\alpha, \chi): \alpha=29.7; 0.101 < \chi < 0.116\}$, обозначенного на рис. 3, а цифрой 2: сплошные линии соответствуют эволюции устойчивых, а штриховые – неустойчивых 11-циклов; χ_A', χ_B' – точки С-границ, в которых происходит слияние устойчивого цикла с неустойчивым; χ_C', χ_D' – точки С-границ изменения типа устойчивого и неустойчивого 11-циклов, соответственно

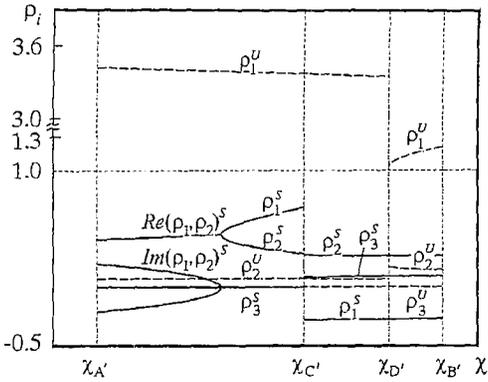


Рис. 10. Зависимости мультипликаторов устойчивого и неустойчивого циклов от параметра χ для сечения $D_2 = \{(\alpha, \chi) : \alpha = 29.7; 0.101 < \chi < 0.116\}$: $\rho_i^s, \rho_i^u, i=1,2,3$ — мультипликаторы устойчивого X_{11}^s и неустойчивого X_{11}^u 11-циклов, соответственно

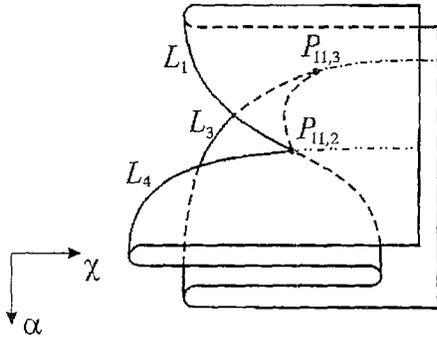


Рис. 12. Фазопараметрическая диаграмма, иллюстрирующая особенности устройства С-границ вблизи точек $P_{11,2}$ и $P_{11,3}$

области ограничены С-бифуркационными линиями слияния устойчивого и неустойчивого циклов. Линии С-границ опираются на точки $P_{11,2}$ и $P_{11,3}$ коразмерности два. Особенности устройства С-границ вблизи этих точек проиллюстрированы на рис.12.

Заключение

В представленной работе рассмотрены особенности поведения трехмерной кусочно-линейной динамической системы с внешним периодическим воздействием при С-бифуркациях.

В плоскости параметров обнаружены области периодичности специфической формы, аналогичные языкам Арнольда, отвечающие областям существования резонансных циклов на двумерном торе, которые возникают вследствие синхронизации квазипериодических колебаний. Такие области в работе названы «языками С-синхронизации». Показано, что языки С-синхронизации имеют существенные различия в структуре внутреннего устройства и бифуркационных переходах по сравнению с языками Арнольда. Детально изучены структура С-границ и бифуркационные переходы внутри области С-синхронизации.

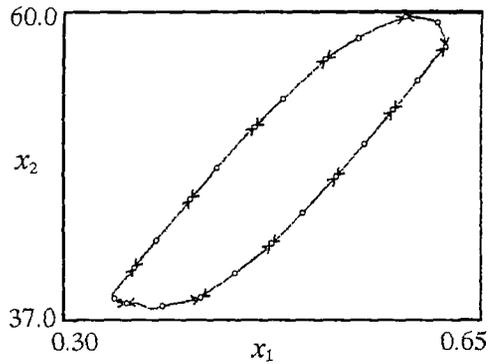


Рис. 11. Диаграмма, иллюстрирующая динамику изменения точек устойчивого и неустойчивого 11-циклов в зависимости от χ в проекции на плоскость (x_1, x_2) : кружочками отмечены проекции $X_k^s, X_k^u, k=1,2,\dots,11$ на плоскость (x_1, x_2) в точках пересечения траектории деформации с линиями С-границ; остальная часть диаграммы иллюстрирует эволюцию устойчивого и неустойчивого 11-циклов вдоль инвариантной кривой двумерного тора при движении по параметру χ

проекции $X_k^s, X_k^u, k=1,2,\dots,11$ на плоскость (x_1, x_2) в точках пересечения траектории деформации с линиями С-границ, а остальная часть диаграммы иллюстрирует эволюцию устойчивого и неустойчивого 11-циклов вдоль инвариантной кривой двумерного тора при движении по параметру χ .

В правой части Π_{11} имеются еще две области, в которых существуют два устойчивых 11-цикла разных типов. Эти

Один из авторов этой работы (Жусубалиев Ж.Т.) выражает искреннюю благодарность Е. Mosekilde за участие в совместных исследованиях, регулярное обсуждение и критику результатов, постоянный интерес и интеллектуальную поддержку. Автор благодарит Ю.Л. Майстренко за предоставление работы [19] и обсуждение некоторых математических проблем теории С-бифуркаций, а также G.Chen, указавшему на ряд публикаций по border collision bifurcations и grazing bifurcations, содержащихся в ссылках работы [20].

В представленной работе авторы коснулись только С-бифуркаций резонансных циклов. Мы не сочли возможным включить в статью методы, которые используются для анализа и классификации С-бифуркаций. В [15–17] сделана попытка разработать методiku анализа С-бифуркаций, где для этой цели используется понятие индекса орбиты. В [16] авторы говорят, что им удалось найти общий критерий определения С-бифуркаций. Однако как таковых критериев классификации типов С-бифуркаций, как это сделано в [1,12–14], авторами найдено не было. Следует заметить, что индексы орбиты являются своеобразным индикатором, позволяющим лишь констатировать факт, что переходы от одного динамического состояния к другому связаны с С-бифуркациями, а не с локальными бифуркациями. При исследовании многомерных кусочно-гладких дифференциальных систем или многомерных отображений, динамика которых гораздо сложнее, чем динамика модельных одно- и двумерных отображений [15–17], индексы орбиты не могут быть использованы.

Главная трудность связана с поиском циклов, участвующих в бифуркации. Если циклы найдены, то задача нахождения аналитических критериев, аналогичных приведенным в [1,12–14,20] для классификации С-бифуркаций, теряет свою актуальность, так как в этом случае бифуркационный анализ можно проводить эффективно на базе нелокального подхода, разработанного авторами статьи.

Исследования последних двух-трех лет как у нас, так и за рубежом показывают, что С-бифуркации охватывают чрезвычайно большое многообразие бифуркационных явлений и переходов к хаосу. Пока даже не ставится проблема их классификации, аналогичной той, что сложилась для гладких динамических систем и дифференцируемых отображений. Хотя попытки в этом направлении предпринимаются. В статье мы преследовали цель обратиться на это внимание исследователей. Надеемся, что приведенная в [24] и настоящей работе трехмерная система дифференциальных уравнений (см. также [9,10,23]), может послужить одной из базовых моделей для исследований с целью создания содержательной теории С-бифуркаций. К моменту представления этого варианта рукописи статьи Ж.Т. Жусубалиеву, Е. Mosekilde и Е.А. Сухотерину удалось значительно развить эти исследования. В частности, получены важные результаты, касающиеся механизмов разрушения двумерного тора и переходов к хаосу, связанных с С-бифуркациями резонансных циклов, обнаружены удивительные по своей красоте закономерности в устройстве языков синхронизации и свойствах их в совокупности. Результаты этих исследований будут представлены в отдельной работе.

Библиографический список

1. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.
2. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1969.
3. Розенвассер Е.Н. Колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1969.
4. Rodriguez-Vazquez A., Huertas J.L., Rueda A., Perez-Verdu B., Chua L.O. Chaos from switched-capacitor circuits: discrete maps// Proc. of the IEEE. 1987 Vol. 75, № 8. P. 1090.
5. Кобзев А.В., Михальченко Г.Я., Музыченко Н.М. Модуляционные источники питания РЭА. Томск: Радио и связь, Томский отдел, 1990.

6. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

7. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.

8. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т., Колоколов Ю.В., Терехин И.В. К расчету локальной устойчивости периодических режимов в импульсных системах автоматического регулирования // АяТ. 1992. № 6. С. 93.

9. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т. О недетерминированных режимах функционирования стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // Электричество. 1992. № 8. С.47.

10. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т., Михальченко С.Г. Стохастичность в динамике стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // Электричество. 1996. № 3. С. 69.

11. Жусубалиев Ж.Т. К исследованию хаотических режимов преобразователя напряжения с широтно-импульсной модуляцией // Электричество. 1997. № 6. С. 40.

12. Фейгин М.И. Удвоение периода колебаний при С-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах // ПММ. 1970. Т. 34, вып. 5. С. 861.

13. Фейгин М.И. О рождении семейств субгармонических режимов в кусочно-непрерывной системе // ПММ. 1974. Т. 38, вып. 5. С. 810.

14. Фейгин М.И. О структуре С-бифуркационных границ кусочно-непрерывных систем // ПММ. 1978. Т. 42, вып. 5. С. 820.

15. Nusse H.E., Yorke J.A. Border-Collision bifurcations including «Period two to three» for piecewise smooth systems // Physica. 1992. D57. P.39.

16. Nusse H.E., Ott E, Yorke J.A. Border-collision bifurcations: an explanation for observed bifurcation phenomena // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49, № 2. P. 39.

17. Nusse H.E., Ott E, Yorke J.A. Border-collision bifurcations for piecewise smooth one-dimensional maps // Int. J. Bifurc. and Chaos. 1995. Vol. 5, № 1. P. 189.

18. Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Vikul S.I. and Chua L.O. Bifurcations of attracting cycles from time-delayed Chua's circuit // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1995. Vol.5, № 3. P.653.

19. Майстренко В.Л., Майстренко Ю.Л., Сушко И.М. Бифуркационные явления в генераторах с линиями задержки // РЭ. 1994. Т. 39, вып. 8-9. С. 1367.

20. Mario di Bernardo and Chen G. Controlling bifurcations in nonsmooth dynamical systems // Controlling chaos and bifurcations in engineering systems / Ed. by G.Chen. crt press. boca raton. London, New York, Washington, D.C. 2000. P. 391.

21. Бабковский А.Г., Жусубалиев Ж.Т., Колоколов Ю.В., Косчинский С.Л., Пинаев С.В., Рудаков В.Н. Недетерминированные режимы в динамике автоматизированных тяговых электроприводов // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. 1997. № 4. С.25.

22. Жусубалиев Ж.Т., Емельянова Е.Ю. Анализ структуры С-бифуркационных границ кусочно-спитой модели системы управления с широтно-импульсной модуляцией // Информационные технологии моделирования и управления: Межвуз. сб. науч. тр. / Воронежский гос. техн. ун-т, 1999. С.68.

23. Zhusubaliyev Zh.T., Titov V.S., Emeliyanova E.Yu., Soukhoterin E.A. C-bifurcations in the dynamics of control system with pulse-width modulation // Proc. of second int. conf. on control oscillations and chaos. St.Peterburg, Russia, July 5-7, 2000. Vol. 1. P.203.

24. Zhusubaliyev Zh.T., Soukhoterin E.A. and Mosekilde E. Border-collision bifurcations and chaotic oscillations in piecewise-smooth dynamical system // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000 (to be submitted).

25. Анищенко В.С. Сложные колебания простых систем. М.: Наука, 1990.

26. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.

27. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.

Курский государственный
технический университет

Поступила в редакцию 31.03.2000
после доработки 30.08.2000

ON SYNCHRONIZATION OF QUASI-PERIODIC OSCILLATION AT C-BIFURCATIONS IN A PIECEWISE-LINEAR NONAUTONOMOUS DYNAMIC SYSTEM

Zh.T. Zhusubaliyev, E.Yu. Emelyanova

The behaviour is examined of a piecewise-linear dynamic system with external periodic force at C-bifurcations which is related to resonance cycles arising from synchronization of quasi-periodic oscillation. As example the dynamics of the system of automatic control with pulse-width modulation first kind is considered which is represented by a three-dimensional piecewise-linear nonautonomous dynamic system. It has been revealed that within the parameter plane there are domains of existence of resonance cycles on two-dimension torus (domains of synchronization). These domains have specific shape similar to Arnold's tongues, but differ from them essentially in their internal structural organization and bifurcation transitions which cannot be achieved in smooth dynamic systems in principle. A detailed analytical description of C-boundaries structure and bifurcation transitions within the synchronization domain is there in this paper.



Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич – родился в Ошской области Киргизской ССР (1958). Окончил Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники (ТИАСУР, 1982). После окончания ТИАСУР работал в НИИ автоматики и электромеханики при ТИАСУР. В настоящее время работает доцентом кафедры вычислительной техники Курского государственного технического университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в Томском политехническом институте (1989) по электротехническим комплексам и системам, включая их управление и регулирование, применение математического моделирования и нелинейной динамики в системах автоматического управления. Область научных интересов: нелинейная динамика и хаос, математическое моделирование нелинейных динамических систем, бифуркации и хаотические колебания в динамических системах с разрывными частями, применение нелинейной динамики в теории импульсных и

релейных автоматических систем управления. Опубликовал около 80 научных работ по указанным направлениям. E-mail: cct@cafct.kursk.ru



Емельянова Елена Юрьевна – родилась в Курске (1976). Окончила Курский государственный технический университет (1997) и очную аспирантуру КГТУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (2000, КГТУ). В настоящее время работает преподавателем на кафедре вычислительной техники КГТУ. Научные интересы – математическое моделирование нелинейных систем автоматического управления. Имеет 11 публикаций по вышеуказанному направлению.