

Изв.вузов «ПНД», т.8, № 5, 2000

УДК 517.9

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕННОГО И ТОЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ «ПРЫГАЮЩЕГО ШАРИКА»

*А.П. Кузнецов, А.П.Широков*

Представлены приближенное и точное отображение прыгающего шарика. Приведены результаты сравнения динамики, описываемой этими отображениями: фазовые портреты, карты динамических режимов, бифуркационные значения параметров и др. Показано, что отображение прыгающего шарика в своем традиционном варианте занимает скорее промежуточное положение между физически мотивированными и формальными моделями, а в определенной области параметров его следовало бы отнести к формальным моделям.

### 1. Дискретные модели с соударением

Модели с соударением изначально возникли для описания стохастического механизма ускорения частиц. Этот механизм был предложен Э.Ферми [1] для объяснения происхождения быстрых частиц в космических лучах. Для его описания Уламом была предложена следующая модель: частица с некоторой массой движется между двумя стенками, последовательно ударяясь и отскакивая от каждой из них. Одна из стенок при этом неподвижна, а другая совершает колебания по заранее выбранному закону (динамическому или случайному). Дискретное отображение, описывающее подобную систему, стало весьма популярным среди исследователей (см., например, работы [2–7] и обширную библиографию в них). Это отображение являлось одним из первых отображений, в которых проводилось изучение консервативного и диссипативного хаоса. Оно представляет интерес как само по себе, так и с точки зрения возможных приложений для описания различных физических систем. В работе [5], например, с помощью отображения Улама проводится изучение диффузионной ионизации ридберговских состояний атомов микроволновым полем.

Дальнейшее развитие этого направления привело к задаче о гравитационной машине. Изначально идея гравитационной машины была сформулирована в астрофизике и состояла в том, чтобы использовать переменное гравитационное поле, например двойной звезды, для ускорения летательного аппарата или просто тела [8]. Модель гравитационной машины можно представить себе следующим образом. Шарик массой  $m$  подпрыгивает вертикально на осциллирующей плите и падает обратно под действием силы тяжести (рис. 1). Такая система была реализована экспериментально в Bryn Mawr College (США) [4].

Приближенное отображение «прыгающего шарика», описывающее изображенную на рис. 1 систему, в силу богатства его свойств и простоты

физической интерпретации стало одной из эталонных моделей нелинейной динамики [2, 9]. Используемое приближение состоит в том, что во внимание принимают только скорость плиты, а ее смещение считают очень малым и пренебрегают им.

В настоящей работе проведен сравнительный анализ точного и приближенного отображений прыгающего шарика для случая гармонического закона колебаний плиты. Оказывается, что переход к приближенному варианту является весьма тонким моментом и правомерен не всегда.

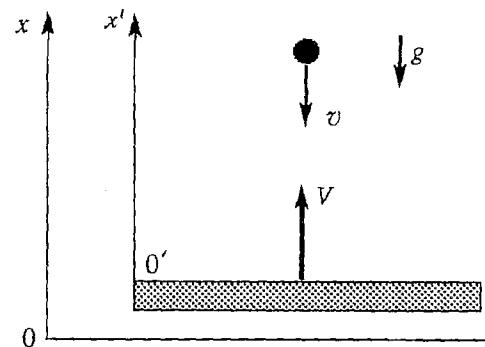


Рис. 1. Модель гравитационной машины Заславского

## 2. Приближенное и точное отображения

Для дальнейшего нам важен детальный вывод приближенного и точного отображений. Обратимся к рис. 1. Введем лабораторную систему отсчета  $OX$ , и, связав «штрихованную» систему отсчета  $O'X'$  с поверхностью плиты. Пусть скорость движения плиты определяется законом  $V(t)$ . Скорость шарика в момент удара  $t=t_n$  о поверхность плиты представим для удобства в виде  $v=-v_n$ .

Обозначим через  $v'$  скорость шарика в системе отсчета, связанной с плитой. Тогда можно записать скорость до удара

$$v' = -v_n - V \quad (1)$$

и после удара

$$v' = v_n + V.$$

С учетом потери энергии в системе получим

$$v' = (1 - \varepsilon)(v_n + V),$$

где  $\varepsilon$  – коэффициент, характеризующий уровень диссипации ( $\varepsilon=0$  для консервативного случая,  $\varepsilon=1$  в пределе очень сильной диссипации). Окончательное выражение для скорости шарика после удара о плиту в лабораторной системе отсчета примет вид

$$v'_n = (1 - \varepsilon)(v_n + V) + V.$$

Для получения приближенного отображения обычно пренебрегают смещением плиты, то есть считают координату плиты постоянной величиной  $x=0$  [2,9]. Физическая мотивация может состоять в том, что шарик при ударе получает значительный импульс, подпрыгивает достаточно высоко, так что смещение плиты не существенно.

В рамках этого приближения легко найти момент времени  $t_{n+1}$  следующего удара, поскольку плита неподвижна,

$$t_{n+1} = t_n + 2v'_n/g,$$

а также скорость шарика  $v_{n+1}$

$$v_{n+1} = v'_n - g(t_{n+1} - t_n) = -v'_{n+1},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения. Собирая все представленные соотношения вместе, получим отображение прыгающего шарика в общем виде

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon)(v_n + V) + V,$$

$$t_{n+1} = t_n + 2v_{n+1}/g.$$

Далее будем рассматривать движение плиты по гармоническому закону  $V=V_0\sin(\omega t)$ . Введем безразмерные фазу  $\phi_n=\omega t_n$  и коэффициент  $k=2(2-\varepsilon)V_0\omega/g$ , пропорциональный частоте колебаний плиты. Для безразмерной скорости  $2\omega v_{n+1}/g$  сохраним старое обозначение  $v_{n+1}$ . Тогда полученное отображение в безразмерном виде можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (1 - \varepsilon)v_n + k\sin\phi_n, \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + v_{n+1}, \quad (\text{mod } 2\pi). \end{aligned} \tag{2}$$

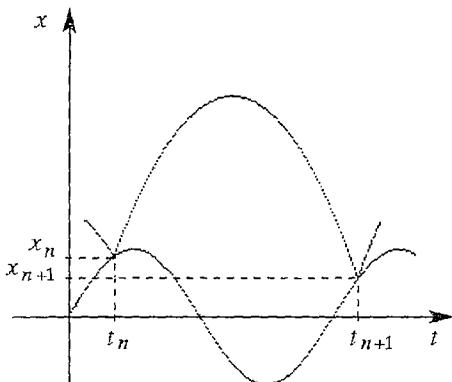


Рис. 2. Координаты шарика и плиты в зависимости от времени

скорость плиты;  $x_n = -x_0\cos(\omega t_n)$  – координата точки, в которой происходит удар.

Сразу после удара в момент времени  $t=t_n+0$  выражение для скорости шарика примет вид  $v'_n = (1-\varepsilon)(v_n + V_n) + V_n$ . Дальнейшая эволюция плиты и шарика описывается с помощью уравнений

$$v_{\text{ш}} = v'_n - g(t-t_n) \text{ – скорость шарика,}$$

$$x_{\text{ш}} = x_n + v'_n(t-t_n) - g(t-t_n)^2/2 \text{ – координата шарика,}$$

$$x_n = -x_0\cos(\omega t) \text{ – координата плиты.}$$

Для того чтобы найти момент времени следующего удара, необходимо приравнять значения координат шарика и плиты

$$x_n + v'_n(t-t_n) - g(t-t_n)^2/2 = -x_0\cos(\omega t). \tag{3}$$

Уравнение (3) относительно переменной  $t$  может иметь несколько корней, но нам нужно значение  $t=t_{n+1}$ , ближайшее к  $t_n$ . Зная момент удара  $t_{n+1}$ , находим скорость шарика

$$v_{n+1} = -(1-\varepsilon)(v_n + V_n) - V_n + g(t_{n+1} - t_n). \tag{4}$$

Далее, подставляя в уравнения (3) и (4) выражения для величин  $x_n$ ,  $v'_n$  и  $V_n$  и используя замену переменных, аналогичную указанной выше, приходим к точному отображению прыгающего шарика

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -(1-\varepsilon)v_n - k \sin \phi_n + 2(\phi_{n+1} - \phi_n), \\ [(1-\varepsilon)v_n + k \sin \phi_n](\phi_{n+1} - \phi_n) - (\phi_{n+1} - \phi_n)^2 &= k(\cos \phi_n - \cos \phi_{n+1})/(2-\varepsilon). \end{aligned} \quad (5)$$

Второе уравнение системы (5) определяет в неявном виде «безразмерный» момент времени следующего удара шарика о плиту  $\phi_{n+1}$ , а первое уравнение системы дает значение скорости шарика.

В следующих разделах представлены результаты исследования точного и приближенного отображений.

### 3. Анализ отображения прыгающего шарика в диссипативном случае

Приближение, использованное при выводе отображения (2), является удовлетворительным в том случае, когда скорость шарика много больше скорости осциллирующей плиты. Этого, например, можно добиться с помощью выбора соответствующих начальных условий. Однако подобные соображения будут «работать» хорошо только в консервативном случае  $\varepsilon=0$ . При наличии диссипации в системе скорость шарика  $v_n$  может уменьшиться, и в конечном итоге даже стать отрицательной. Как видно из второго уравнения системы (2), это лишено физического смысла. Условие  $v_n > 0$  является необходимым, но не достаточным условием того, что результаты, полученные с помощью отображения (2), были адекватными физически реализуемым. Действительно, для того чтобы удар вообще произошел, скорость шарика  $v'$  в системе отсчета, связанной с плитой, должна быть отрицательной

$$v' = -v_n - V < 0,$$

следовательно  $v_n > V_0$ . В безразмерном виде получим  $v_n > k/(2-\varepsilon)$ .

Перейдем к более детальному сопоставлению отображений (2) и (5). Обратимся сначала к фазовым портретам, причем выберем значения параметров, аналогичные представленным в [9]. На рис. 3 показаны фазовые портреты приближенного (слева) и точного (справа) отображений в диссипативном случае для различных значений параметра  $k$ . Видно, что они различны не только количественно, но и качественно. Так, при значениях параметров  $k=1.0$ ,  $\varepsilon=0.4$  приближенное отображение имеет неподвижную точку  $v_n=0$ ,  $\phi_n=\pi$  (рис. 3, а). Точное отображение в качестве предельного имеет множество точек, показанных на рис. 3, б, причем изображающая точка обходит его последовательно слева направо. Этот динамический режим соответствует случаю, когда шарик в результате диссипации потерял свою энергию, «прилип» к плите, и дальнейшие их колебания происходят совместно. На остальных рисунках серии можно видеть фазовые портреты хаотических аттракторов, которые совершенно различны для приближенного и точного отображений.

На рис. 4 представлены карты динамических режимов приближенного и точного отображений. Цифрами отмечены области параметров, отвечающие существованию устойчивого цикла соответствующего периода. Цифрой «0» на рис. 4, а отмечен режим, изображенный на рис. 3, а, а знаком тильда в нижней части рис. 4, б обозначена область параметров, где реализуется режим, изображенный на рис. 3, б. Области параметров, соответствующие существованию цикла периода 1 (неподвижная точка отображения:  $v_n=2\pi$ ,  $\phi_n=\pi$ ), качественно совпадают. При увеличении параметра  $k$  этот режим становится неустойчивым, и возникает устойчивый цикл периода 2. При дальнейшем увеличении параметра  $k$  в обоих отображениях наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода (см. табл. 1).

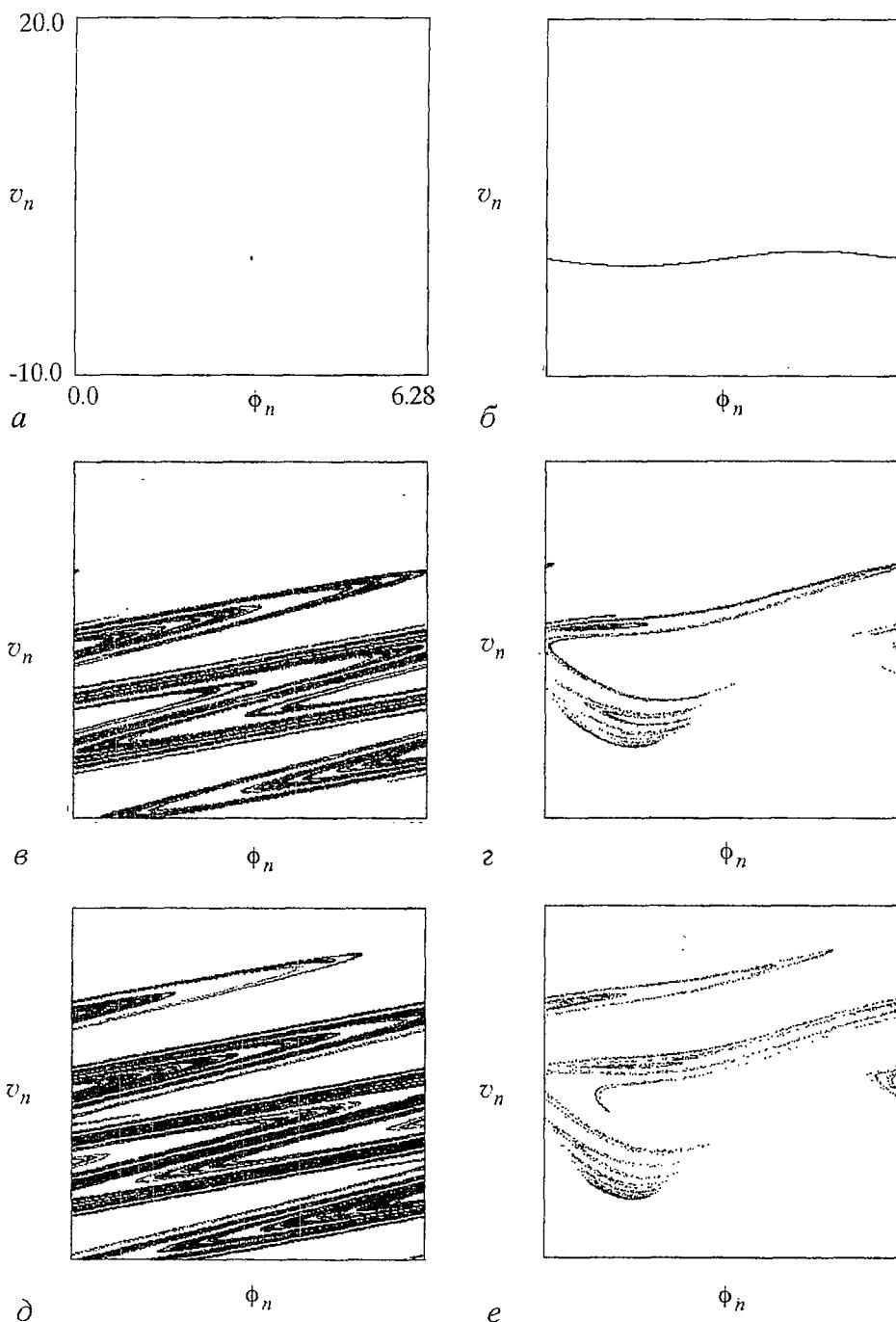


Рис. 3. Фазовые портреты приближенного (слева) и точного (справа) отображений в случае диссипации  $\epsilon = 0.4$  и различных  $k$ :  $a, b - 1.0$ ;  $c, d - 6.5$ ;  $e, f - 8.0$

На рис. 4,  $a$  обнаруживается еще одна последовательность смены динамических режимов, отвечающая удвоениям неподвижной точки ( $v_n=0$ ,  $\phi_n=\pi$ ), но поскольку этот режим не имеет аналога в точном отображении, он здесь подробно не рассматривается.

В правом верхнем углу карты приближенного отображения видна характерная конфигурация бифуркационных линий crossroad-area на базе цикла периода 4. Для точного отображения подобная конфигурация не наблюдается.

Таблица 1

Бифуркационные значения параметра  $k$  и оценка константы  $\delta$   
в диссипативном случае ( $\varepsilon=0.5$ ).

Бифуркация цикла	Приближенное отображение		Точное отображение	
	$k$	$\delta$	$k$	$\delta$
1	4.343915791	—	4.580471101	—
2	4.627666187	6.303	5.001391982	4.732
4	4.672685801	5.090	5.090342237	4.663
8	4.681529825	4.673	5.109541576	4.651
16	4.683422286	4.664	5.113669407	4.664
32	4.683828055	4.666	5.114554390	4.668
64	4.683915012	—	5.114743975	—
...	...	...	...	...
$\infty$	4.683933636	4.669201609	5.114784578	4.669201609

Как уже отмечалось выше, точное отображение может демонстрировать режим, когда шарик «прилип» к плите. На рис. 4, б он обозначен знаком тильда в области хаотической динамики, причем нельзя провести точную границу между ним и другими режимами. Причина в том, что в этой области параметров уже непригодно и наше «точное» отображение: шарик настолько мало отрывается от плиты, что адекватный поиск нужного корня второго уравнения (5) невозможен.

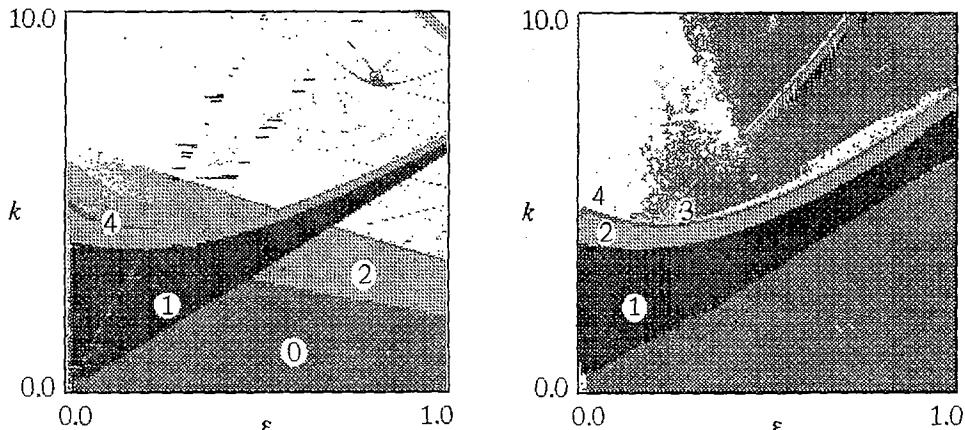


Рис. 4. Карты динамических режимов приближенного (слева) и точного (справа) отображений. Цифрами отмечены периоды реализующегося в отображении цикла

Как видим, универсальность и реализация удвоений не являются достаточными мотивами сами по себе для правомерного использования модели. Лишь полноценное двухпараметрическое исследование позволяет провести более детальное сопоставление точной и приближенной модели.

#### 4. Динамика отображения прыгающего шарика в консервативном случае

В консервативном случае (то есть при  $\varepsilon=0$ ) якобианы преобразования для рассматриваемых приближенного и точного отображений тождественно равны единице. Это приводит к сохранению фазовой площади и, следовательно, к отсутствию аттракторов в системах. Реализация того или иного динамического режима обеспечивается выбором соответствующих начальных условий.

На рис. 5 представлены фазовые портреты рассматриваемых отображений в консервативном случае для различных значений параметра  $k$ . Поскольку в системе нет аттракторов, то для их построения проводился выбор некоторой последовательности начальных значений скорости и фазы и для каждой пары значений результаты итерации отображения наносились на фазовую плоскость. Из рисунка видно, что поведение рассматриваемых отображений качественно

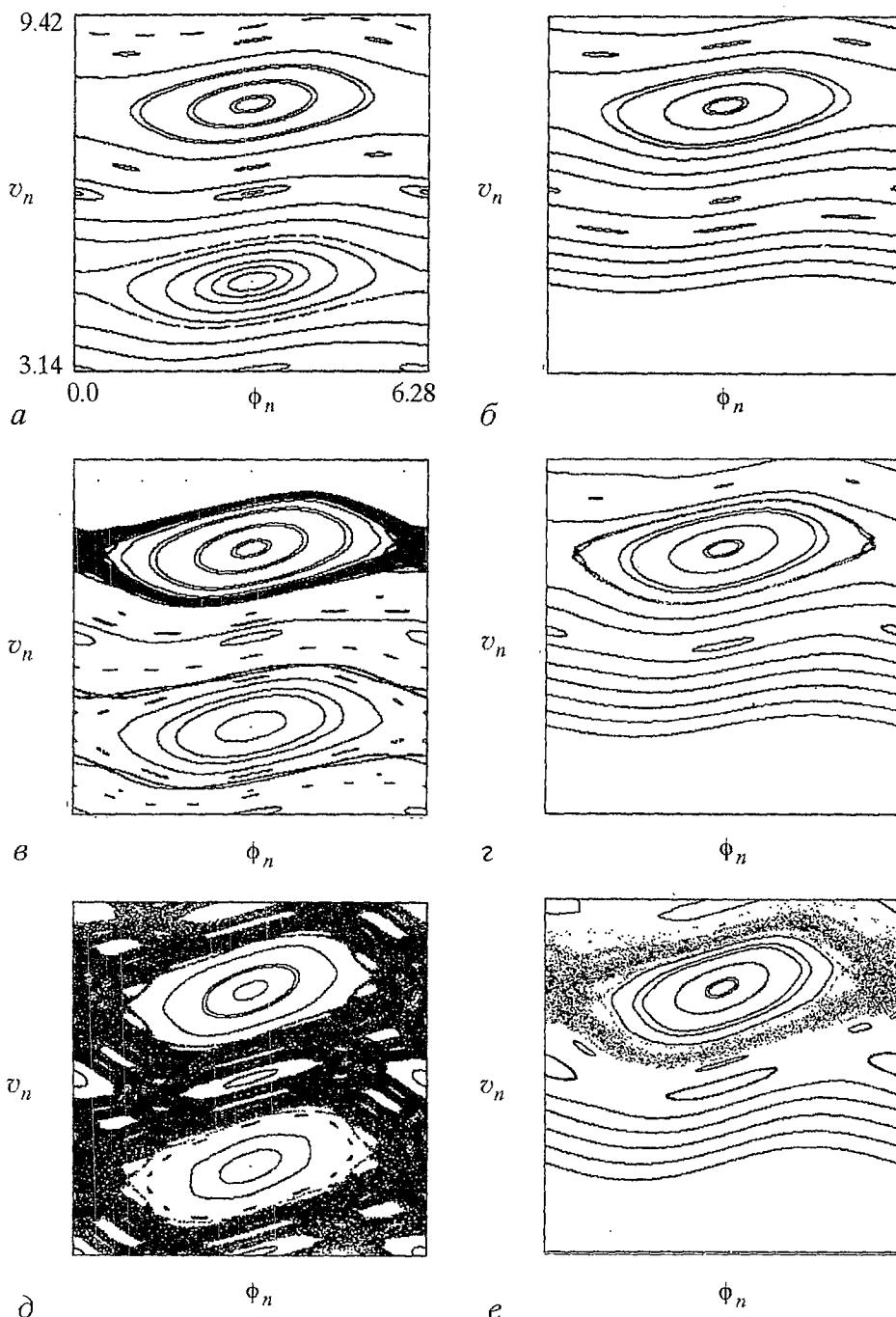


Рис. 5. Фазовые портреты приближенного (слева) и точного (справа) отображений в консервативном случае  $\varepsilon=0.0$  и различных  $k$ :  $a, b - 0.6; c - 0.8; d, e - 1.2$

совпадает при больших значениях скорости шарика. Однако можно заметить и ряд различий в структуре динамических режимов. Так, в точном отображении отсутствует основной резонанс  $v_n=0$ ,  $\phi_n=\pi$  и целое множество инвариантных кривых вместе с сепаратрисами этого резонанса. Другой отличительной чертой этого отображения является то, что в нем разрушение инвариантных кривых и переход к глобальной стохастичности происходит при большем значении параметра  $k$ .

Согласно [2, 11], в консервативном отображении также возможна бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода, однако, в этом случае универсальная константа скейлинга имеет значение  $\delta=8.721097200$ . Точно при бифуркационном значении параметра эллиптическая неподвижная точка какого-либо резонанса становится неустойчивой гиперболической, а в ее окрестности рождаются две новые эллиптические точки, принадлежащие уже циклу периода 2. При дальнейшем изменении параметра происходит последовательность бифуркаций, результатом которой в пределе является фрактальное множество точек. Бифуркационные значения параметра  $k$  приведены в табл. 2. Как видно из этой таблицы, оценки универсальной константы  $\delta$  с определенной точностью подтверждают наличие сценария перехода к хаосу, характерного для сохраняющих площадь отображений [2]. Значения критических точек накопления удвоений близки, но все же различаются.

Таблица 2

Бифуркационные значения параметра  $k$  и оценка константы  $\delta$   
в консервативном случае ( $\epsilon=0.0$ )

Бифуркация цикла	Приближенное отображение		Точное отображение	
	$k$	$\delta$	$k$	$\delta$
1	4.0	—	4.0	—
2	5.0731158	10.151	4.795963340	3.473
4	5.178834361	11.031	5.025124544	6.667
8	5.188418137	8.145	5.059496651	8.841
16	5.189594712	8.716	5.063384248	8.681
32	5.189729706	7.604	5.063832086	8.723
64	5.189747460	—	5.063883425	—
...	...	...	...	...
$\infty$	5.189749496	8.721097200	5.063889312	8.721097200

### Заключение

Мотивация введения в рассмотрение дискретных отображений может быть различной. Прежде всего, дискретное отображение можно получить с помощью метода сечений Пуанкаре. Этот метод устанавливает глубокую связь между дифференциальными уравнениями и дискретными отображениями, но, к сожалению, не избавляет от необходимости решать первые.

Успехи теории динамических систем привели также к широкому распространению простых формальных дискретных отображений. Среди ставших классическими можно назвать логистическое отображение, отображение «сдвиг Бернуlli», кубическое отображение, отображение Эно, отображение «кот Арнольда», отображение кольца и др. [2,9,10]. С их помощью оказалось возможным изучение многих интересных явлений, присущих нелинейным

системам, например переход к динамическому хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода или через разрушение квазипериодических колебаний, режимы перемежаемости, а также всевозможные бифуркации. Однако указанные выше дискретные отображения не соответствуют какой-либо реальной физической системе. Это придает оттенок искусственности получаемым результатам.

Наконец, отображение может быть получено для конкретной физической системы из «первых принципов» – из законов ее эволюции. Такая возможность появляется, если система характеризуется некоторой естественной дискретизацией. Например, в задаче о распространении луча света в волноводе с одной гофрированной стенкой (модель Тенисона – Либермана – Лихтенберга [2]) естественная дискретизация возникает за счет отражений от стенок. Далее, это различные задачи с соударениями и электронные схемы с импульсным возбуждением (например, релаксационный генератор с управляемым уровнем «срыва» колебаний и др.). Для физически мотивированных отображений переменные и параметры имеют ясный смысл, что значительно усиливает их ценность. Например, можно легко учесть флуктуации, чего не скажешь о формальных отображениях, для которых шум также приходится вводить формально.

Даже при наличии естественной дискретизации для получения отображения аналитическим путем обычно приходится делать те или иные приближения. Как правило, они имеют достаточно серьезное обоснование, однако, когда речь идет о режимах сильной нелинейности, о явлениях, связанных с чувствительной зависимостью от начальных условий, как мы видели на примере отображения прыгающего шарика, даже весьма логичные приближения могут оказаться неудачными или имеющими ограниченную область применения. Поэтому исследование отображений реальных физических систем представляет особую ценность, но требует осторожного подхода, когда речь идет о явлениях нелинейной динамики. Так, весьма популярное отображение прыгающего шарика в своем приближенном варианте занимает, пожалуй, промежуточное положение между физическими и формальными моделями, а в определенной области параметров его следует относить скорее к формальным моделям.

*Работа поддержанна грантом РФФИ № 00–02–17509.*

## Библиографический список

1. Fermi E. On the origin of the cosmic radiation // Phys. Rev. 1949. Vol. 75. P. 1169.
2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М. : Мир, 1984.
3. Lieberman M., Lichtenberg A. Stochastic and adiabatic behavior of particles accelerated by periodic forces // Phys.Rev. 1972. Vol. 5. P. 1852.
4. Tufillaro N.B., Albano A.M. Chaotic dynamics of a bouncing ball // Am. J.Phys. 1986. Vol. 54, № 10. P. 939.
5. Роцупкин А.С., Крайнов В.П. Проблема Улама и ионизация ридберговских атомов СВЧ-полем // ЖЭТФ. 1998. Т. 114, вып.1(7). С. 37.
6. Zaslavsky M. Classical and quantum localization and delocalization in the Fermi accelerator, kicked rotor and two-sided kicked rotor models // Chaos. 1996. Vol. 6, № 2. P. 184.
7. Lopac V., Dananic V. Energy conservation and chaos in the gravitationally driven Fermi oscillator // Am. J. Phys. 1998. Vol. 66, № 10. P. 892.
8. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
9. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990, 312 с.
10. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer, 1997.

11. Greene J.M., MacKay R.S., Vivaldi F., Feigenbaum M.J. // Physica. 1981. Vol. 3D. P. 468.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 24.04.2000  
после доработки 27.09.2000

## COMPARATIVE ANALYSIS OF APPROXIMATE AND PRECISE MAPPING FOR A «BOUNCING BALL»

Kuznetsov A.P., Shirokov A.P.

Approximate and precise mappings for a bouncing ball are presented. The results of comparison of dynamics showed by these mappings are given: phase portraits, dynamical regimes topography charts, bifurcation parameter values etc. It is shown that the mapping of a bouncing ball in its traditional form occupies an intermediate position between the physically motivated and formal models, and in certain areas of parameter space it should be regarded as a formal model.



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Опубликовал более 50 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000), научный руководитель молодежного научного центра «Нелинейная динамика и сложные структуры» СО ИРЭ РАН и студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» СГУ и СО ИРЭ РАН. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и двух популярных книг.



Широков Андрей Петрович – родился в Ершове Саратовской области (1977). Окончил Саратовский государственный университет (1999), Соросовский студент (1998, 1999), лауреат премии фонда им. Н.И. Вавилова. Занимался научной работой в студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». В настоящее время – инженер Саратовского отделения Института радиофизики и электроники РАН, аспирант базовой кафедры динамических систем. Автор трех научных публикаций.