Изв.вузов «ПНД», т.8, № 6, 2000 УДК 519.216

САМООРГАНИЗОВАННАЯ КРИТИЧНОСТЬ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ УПРАВЛЕНИЯ

А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Исследуется динамика иерархических устроенных систем. Показано, что подобные системы могут демонстрировать явление самоорганизованной критичности.

Феномен самоорганизованной критичности в последнее время привлекает большой интерес исследователей как универсальное свойство систем самой различной природы, составленных из большого числа элементов, взаимодействующих друг с другом. Начиная с классической работы P. Bak и K. Wiesenfield [1], в которой анализировалось явление самоорганизованной критичности на примере кучи песка, степенной закон распределения описан многими исследователями для различных систем (см., например, [2,3]).

В настоящей работе рассматривается динамика иерархической структуры, являющейся своего рода моделью управления социальной многоуровневой системой. Каждому отдельному индивидууму ставится в соответствие элемент, находящийся на j–м уровне иерархической структуры. Каждый элемент j–го иерархического уровня (за исключением нулевого) имеет в своем подчинении n_j элементов нижележащего (j–1)–го уровня и, в свою очередь, находится в подчинении у элемента (j+1)–го уровня (рис. 1). Понятно, что элементов на (j–1)–м уровне будет в n_j раз больше, чем на j–м иерархическом уровне. Если на самом высшем иерархическом уровне n находится один «руководитель» высшего n–го уровня, то на самом низшем нулевом уровне (при условии, что у любого элемента j–го уровня находится в подчинении n_j элементов (j–1)–го уровня) оказывается

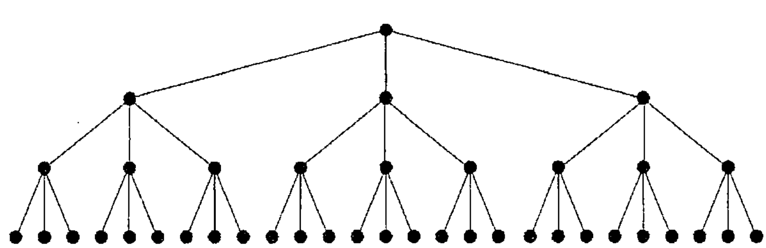


Рис. 1. Иерархическая структура, содержащая четыре уровня иерархии, n_j=3, j=1,…,3

$$N = \Pi_{j=1}^{n} n_j \qquad (1)$$

элементов.

Каждый из элементов в каждый момент дискретного времени с вероятностью p_{ij} ($0<p_{ij}<1$) принимает значение $s_{ij}=0$, и с вероятностью $(1-p_{ij})$ – значение $s_{ij}=1$, что соответствует штатному (нормальному) выполнению своих обязанностей индивидуумом ($s_{ij}=0$) или ошибочному действию ($s_{ij}=1$). Значения вероятностного порога ошибочного действия p_{ij} индивидуума, позиционируемого на иерархической структуре дискретными координатами i и j (i – позиция на j–м иерархическом уровне), первоначально выбираются случайным образом, а затем могут изменяться с течением времени по правилам, которые будут описаны несколько позднее.

Понятно, что должно существовать как влияние действий подчиненных на действия руководителя, так и наоборот («обратная связь»). Предполагается, что чем большее число подчиненных (находящихся на $(j-1)$–м уровне) руководителя j–го уровня допустили ошибки, тем больше вероятность ошибки этого руководителя. Поведение системы может быть описано следующим набором правил.

Правило 1. Для каждого i–го элемента иерархической структуры самого нижнего (нулевого) уровня выбирается случайная величина ξ, плотность вероятности которой распределена равномерным образом на отрезке [0;1]. Если $\xi \le p_{i0}$, считается, что i–й элемент сработал «штатно», то есть без ошибок ($s_{i0}=0$); в противном случае – этот элемент допустил ошибку ($s_{i0}=1$).

Правило 2. Для каждого i–го элемента j–го слоя ($j=1,\dots,n$) определяется число подчиненных элементов

$$r_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n_j} s_{kj-1}, \qquad (2)$$

нижележащего $(j-1)$–го слоя, действия которых были ошибочны. Затем, аналогично тому, как это было проделано на нулевом уровне, выбирается случайная величина ξ, плотность вероятности которой распределена равномерно на [0;1]. Если $\xi \le p_{ij} - r_{ij}/10$, считается, что i–й элемент сработал «штатно», то есть без ошибок ($s_{ij}=0$), в противном случае – этот элемент допустил ошибку ($s_{ij}=1$). Следует обратить внимание, что порог вероятности ошибки для элемента j–го уровня p_{ij} остается неизменным, а вероятность ошибки увеличивается в зависимости от того, какое число r_{ij} подчиненных элементов нижележащего $(j-1)$–го уровня допустили ошибку. Данная операция повторяется для каждого j–го уровня последовательно от нижнего к верхнему.

Правило 3. Последовательно для каждого элемента осуществляется корректировка значения порога вероятности ошибочных действий p_{ij} по следующим правилам.

а. Если на некотором дискретном шаге эволюции i–й элемент j–го иерархического уровня сработал «штатно» ($s_{ij}=0$), то у всех подчиненных ему элементов, расположенных на $(j-1)$–м уровне, которые также не допустили ошибок ($s_{kj-1}=0$), величина порога вероятности ошибочного действия увеличивается, а вероятность ошибочного действия, соответственно, уменьшается

$$p_{kj-1} = p_{kj-1} + (1-p_{kj-1})/5. \qquad (3)$$

б. Если на некотором дискретном шаге эволюции i–й элемент j–го иерархического уровня допустил ошибку ($s_{ij}=1$), то у всех подчиненных ему элементов, расположенных на $(j-1)$–м уровне, которые также ошиблись ($s_{kj-1}=1$), величина порога вероятности ошибочного действия уменьшается, а вероятность ошибочного действия, соответственно, увеличивается

$$p_{kj-1} = p_{kj-1} - p_{kj-1}/5. \qquad (4)$$

Приведенные выше правила описывают влияние действий подчиненных на руководителя и, соответственно, руководителя на подчиненных.

Правило 4. Если элемент верхнего n–го уровня имеет значение $s_{1_n}=1$ (руководитель высшего n–го уровня допустил ошибку), то он заменяется одним из n_1 подчиненных элементов (j–1)–го уровня, в противном случае ($s_{1_n}=0$) никаких действий не производится (см.*правило 5*).

Правило 5. Для каждого элемента j–го уровня (начиная с $j=n$) выполняется следующий порядок действий.

а. Из n_j подчиненных элементов выбирается элемент с самой малой величиной порога ошибочных действий p_{kj-1} ($k \in N$, $1 \le k \le n_j$) и удаляется.

б. Каждая пустующая позиция k для (j–1)–го уровня заполняется элементом (j–2)–го уровня с самым большим значением порога вероятности ошибки p_{ij-2}, выбранным из n_{j-1} подчиненных элементов k–го элемента (j–1)–го уровня.

Действия *а*, *б* последовательно повторяются для всех уровней, начиная с $j=n$ до $j=1$. Поскольку для $j=1$ отсутствует уровень, элементами которого можно было бы заполнить вакансии на низшем нулевом уровне, то существующие «пустоты» заполняются новыми элементами, значения порога ошибки которых p_{i0} выбираются равными значениям случайной величины, равновероятно распределенной на интервале [0;1].

Сформулированные выше правила эволюции позволяют смоделировать динамику иерархической системы, где элементы каждого уровня оказываются подчиненными элементам следующего более высокого уровня (элементов на котором оказывается меньше). Удаление и «передвижение» элементов по иерархической структуре моделируют условия конкуренции и отбора. Таким образом, рассматриваемая структура является моделью иерархически устроенных социальных систем.

Стоит отметить, что модели подобного класса, состоящие из большого числа элементов, взаимодействующих друг с другом по определенным правилам, с успехом применялись для описания сложных, например, эволюционных [4–6] и популяционных [7] процессов.

Рассмотрим поведение описанной иерархической структуры с течением времени. Первоначально, как уже было сказано выше, все величины порога вероятности ошибки p_{ij} выбраны случайным образом. Затем в каждый момент дискретного времени происходит «отбор» элементов с наибольшими величинами p_{ij} и перемещение их вверх по иерархической структуре. Одновременно удаляются элементы, порог вероятности ошибки p_{ij} у которых оказывается наименьшим и которые, следовательно, чаще других принимают значения $s_{ij}=1$, что соответствует ошибочным действиям этого элемента.

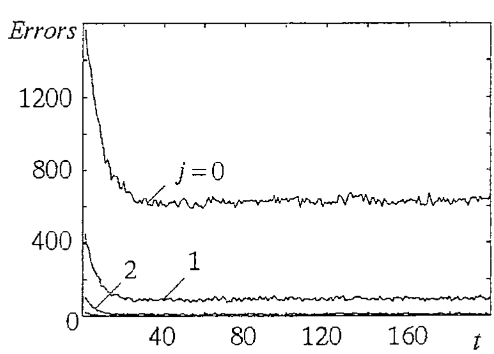


Рис. 2. Переходной процесс в иерархической структуре, содержащей шесть уровней иерархии, каждому элементу j–го уровня под–чинены пять элементов нижележащего (j–1)–го уровня ($n_j=5$, $j=1,\ldots,5$). После переходного процесса число ошибок на каждом иерархическом уровне (соответственно $j=0,1,2$) выходит на некоторое значение, соответствующее «динамическому» состоянию равновесия структуры

На рис. 2 показан переходный процесс в иерархической структуре, содержащей шесть уровней иерархии ($n=5$), каждому элементу j–го уровня которой подчинены пять элементов нижележащего (j–1)–го иерархического уровня ($n_j=5$, $j=1,\ldots,5$). На нижнем ($j=0$) уровне структуры, как нетрудно заметить, содержится 3125 элементов, на верхнем, пятом, – 1 элемент. Первоначально, когда элементы с разными величинами p_{ij} распределены по иерархической структуре случайным образом, число ошибок на каждом уровне иерархии достаточно велико: на нулевом уровне примерно половина элементов в начальный момент времени принимают значение s_{i0}=1, что соответствует ошибочным действиям. Ошибки нижнего уровня «транслируются» на следующий верхний уровень, поэтому на этих уровнях число ошибок превышает половину, а на самых верхних иерархических уровнях отношение «число ошибок/число элементов» оказывается близким к единице.

По мере осуществления отбора элементов с большими значениями порога вероятности ошибочных действий p_{ij} и удаления элементов с малыми значениями этого порога, число ошибок на каждом уровне иерархии уменьшается. Через некоторый интервал дискретного времени при завершении переходного процесса, иерархическая структура достигает равновесного состояния, когда в каждый интервал дискретного времени число ошибок на каждом уровне иерархии в среднем оказывается одним и тем же.

Аналогичная картина наблюдается и на шестиуровневой иерархической структуре, в которой каждому элементу j–го уровня подчинены n_j=10 элементов (j–1)–го уровня (j=1,...,5). В данном случае при таком же количестве иерархических уровней на нижнем (j=0) уровне иерархии оказывается существенно больше элементов – 100000. Соответственно, возрастает и время переходного процесса (рис. 3).

Рис. 4 показывает, что происходит со значениями порогов вероятности ошибки p_{ij} для элементов различных иерархических уровней. Во время переходного процесса раньше всех достигает равновесного состояния самый нижний (j=0) иерархический уровень. Лишь после того, как j–й иерархический уровень достигает состояния динамического равновесия, следующий (j+1)–й уровень, элементы которого пополняются за счет элементов j–го уровня, также может достичь состояния равновесия. Видно, что чем выше уровень иерархии, тем ближе к единице устанавливается значение порога вероятности ошибки. Значит, элемент, находящийся на достаточно высоком иерархическом уровне, как правило, имеет значение p_{ij} близкое к единице и следовательно, будучи предоставлен самому себе, очень редко будет совершать ошибочные действия. Однако за счет механизма влияния ошибок нижнего иерархического уровня на возникновение ошибок на

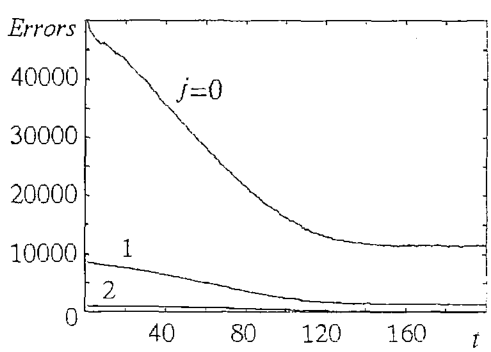


Рис. 3. Переходной процесс в иерархической структуре, содержащей шесть уровней иерархии, каждому элементу j–го уровня подчинены десять элементов нижележащего (j–1)–го иерархического уровня (n_j=10, j=1,...5). Переходной процесс оказывается более длительным, нежели в случае, изображенном на рис. 2

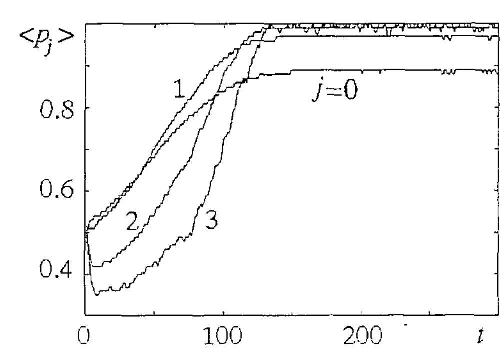


Рис. 4. Зависимость усредненных значений порога вероятностей ошибки $<p_j>$ от времени. Усреднение проводилось по всем элементам для каждого иерархического уровня. Видно, что чем выше уровень иерархии, тем более длительный переходной процесс для него характерен, и тем большее значение усредненного по элементам уровня значение порога вероятности ошибки $<p_j>$ устанавливается после завершения переходного процесса

следующем уровне иерархии, элементы верхних уровней могут принимать значения $s_{ij}=1$, соответствующие ошибочным действиям.

Большой интерес представляет вопрос о том, какое число ошибок в единицу времени совершается на каждом иерархическом уровне в состоянии динамического равновесия. Проведенные исследования свидетельствуют о том, что распределение ошибок подчиняется степенному закону

$$G(x) \sim x^{-\alpha}, \tag{5}$$

где x – «масштаб» ошибки, численно равный количеству элементов на нулевом уровне, опосредовано подчиняющихся элементу j–го иерархического уровня, допустившему ошибку; G – количество ошибок такого масштаба в данный момент дискретного времени. Иными словами масштаб ошибки элемента k–го уровня определяется как

$$x = \Pi_{j=1}^{k} n_j. \tag{6}$$

Таким образом, ошибка на низшем нулевом уровне имеет масштаб равный 1, поскольку в данное ошибочное действие вовлечен лишь один элемент. Ошибка элемента первого иерархического уровня имеет масштаб n_1, равный числу элементов нулевого уровня, находящихся в его подчинении, поскольку все они оказываются вовлечены (через руководителя) в ошибочные действия. Ошибка элемента, находящегося на втором иерархическом уровне, уже имеет масштаб $n_2 \times n_1$, равный числу элементов нулевого уровня, подчиняющихся тем элементам первого уровня, которые, в свою очередь, подчиняются элементу второго уровня, допустившему ошибку. Для иерархической структуры, у которой каждому элементу j–го уровня подчиняются æ элементов $(j-1)$–го уровня, ошибка на нулевом уровне имеет масштаб равный 1, на первом уровне – æ, на втором – $æ^2$, на j–м – $æ^j$ и так далее.

Рис. 5 иллюстрирует распределение числа ошибок по их масшатабам для трех различных иерархических структур. Прямая сплошная линия, характерная для степенного закона распределения (5) в двойном логарифмическом масштабе (когда по оси абсцисс и по оси ординат откладываются не сами величины, а их логарифм), подчиняется соотношению $G=10^4x^{-1}$ и приведена на рисунке для сравнения с данными, полученными в результате исследования предложенной модели. Нетрудно заметить, что динамика описываемой иерархической структуры демонстрирует критическое поведение, характерное для феномена самоорганизованной критичности.

Говорить о том, что предложенная система соответствует (в той или иной степени) иерархическим структурам управления, сформировавшимся в человеческом обществе, очевидно можно лишь после сопоставления полученных результатов со статистическими данными. Также понятно, что «напрямую» получить данные об ошибках руководителя того или иного уровня подчас невозможно: неизвестно, как «измерять» действия или решения, принятые тем или иным человеком. Однако, ошибочные действия должны проявляться косвен–

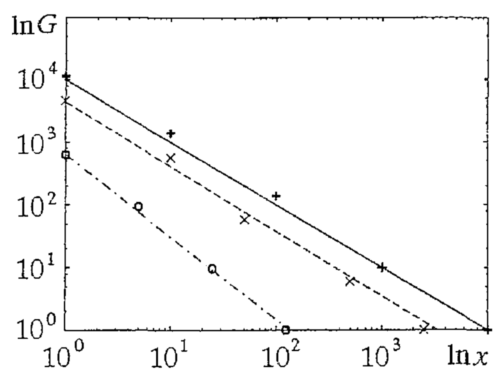


Рис. 5. Распределение числа ошибок по масштабам для различных иерархических струтур: (+) – иерархическая структура, каждому элементу j–го уровня которой подчиняются десять элементов нижележащего $(j-1)$–го уровня ($n_j=10$, $j=1,\dots,5$); (o) – структура, где у каждого элемента пять подчиненных ($n_j=5$, $j=1,\dots,5$); (×) – иерархическая структура, в которой у элемента j–го уровня десять подчиненных элементов ($j=1,3,5$), а у элемента $(j+1)$–го – пять ($n_1=n_3=n_5=10$, $n_2=n_4=5$)

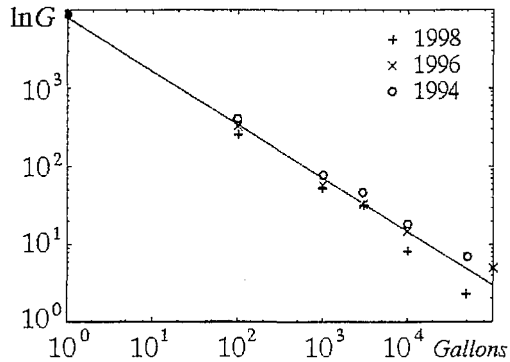


Рис. 6. Распределение числа разливов нефти у побережья Соединенных Штатов Америки для трех разных лет: (+) – 1998 год; (×) – 1996 год; (o) – 1994 год. Данные [8] приведены в двойном логарифмическом масштабе

ным образом в различных факторах, связанных с функционированием соответствующей иерархической структуры. С этой точки зрения различные нештатные ситуации, возникающие, прежде всего, в техногенных системах, могут свидетельствовать об управленческих ошибках. Чем больше масштаб нештатной ситуации, тем на более высоком уровне в иерархической структуре управления была допущена ошибка. Разумеется, таким крупномасштабным ошибкам, как правило, предшествует и провоцирует крупные череда более мелких ошибок, допущенных на нижних управленческих уровнях. Таким образом, анализируя распределение чрезвычайных ситуаций по размерам, можно сделать косвенный вывод о распределении ошибок управления.

Как показано на рис. 6, распределение числа случаев разлива нефти в зависимости от числа вылившихся галлонов, также как и распределение ошибок в вышеописанной иерархической структуре, подчиняется степенному закону. Поэтому, можно говорить (пусть с некоторой долей осторожности) о том, что предложенная модель иллюстрирует механизмы, приводящие к появлению *разномасштабных ошибок управления*.

На основе предложенной модели можно дать некоторые рекомендации по организации иерархических структур управления различными социальными институтами. В частности, можно дать ряд рекомендаций по объединению двух организаций в одну, более крупную. Предположим, что существуют две однотипные иерархические структуры (рис. 7, *а*), например, два вуза, которые следует объединить в одну, более крупную структуру. Понятно, что возможны два «крайних» варианта: либо осуществляется кардинальное переподчинение сотрудников на самом низовом уровне (*вариант А*, рис. 7, *б*), либо две структуры просто «складываются», подчиняясь одному руководителю (*вариант Б*, рис. 7, *в*). (Разумеется, возможны и промежуточные варианты, которые в данной работе не рассматриваются.) Какой из двух вариантов является более предпочтительным с точки зрения уменьшения числа «крупномасштабных» ошибок?

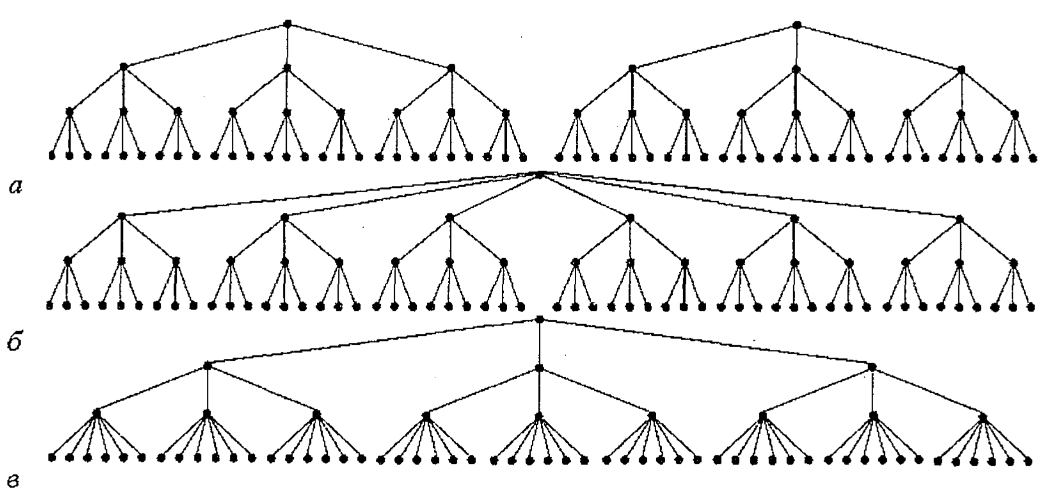


Рис. 7. Возможные варианты объединения двух идентичных иерархических структур

Таблица

Результаты моделирования объединения двух одинаковых иерархических структур

Уровень	Вариант А		Вариант Б	
	Масштаб ошибки	Число ошибок	Масштаб ошибки	Число ошибок
0	1	1201	1	1249
1	10	146	5	188
2	50	14	25	20
3	250	1	125	2
4	1250	0	625	0
5	6250	0	6250	0

Структура имеет 6 уровней иерархии, в подчинении у элемента j–го уровня находятся n_j=5 элементов (j–1)–го уровня (j=1,…,5). В *варианте А* объединение производится на самом низком уровне (n_1=10, n_j=5, j=2,…,5), в *варианте Б* объединение осуществляется формальным подчинением двух структур руководителю высшего уровня (n_j=5, j=1,…,4, n_5=10)

Предоженная модель показывает, что *вариант А* оказывается более предпочтительным. В таблице приведено среднее число ошибок, возникающих на каждом иерархическом уровне модели для каждого из рассматриваемых вариантов. В случае, когда осуществляется переподчинение сотрудников обеих структур на самом низшем уровне, число ошибок на j–м иерархическом уровне оказывается меньше, чем при простом «сложении» структур и подчинении их одному руководителю.

Из таблицы видно, что число ошибок на высших уровнях иерархии оказывается равным нулю. Однако, при дальнейшем увеличении числа элементов на низшем уровне иерархии существенно возрастает число ошибок, что инициирует ошибки на высших иерархических уровнях. Следовательно, у подобных иерархических структур с фиксированным числом уровней иерархии существует вполне определенный предельный размер, при превышении которого они перестают эффективно функционировать.

Таким образом, предложенная в работе модель, с одной стороны, дает объяснение степенного закона распределения аварий в техногенных системах, а с другой стороны, позволяет выработать ряд рекомендаций по формированию эффективных управленческих структур. Вполне вероятно, что дальнейшие исследования в этом направлении могут оказаться весьма интересными и плодотворными.

В заключение, авторы выражают признательность профессору Д.А. Усанову за проявленное внимание к данной работе.

Работа выполнена при поддержке РГНФ (грант № 00–06–00268а), ФЦП «Интеграция» (проект А0057/2000) и программы «Университеты России. Фундаментальные исследования».

Библиографический список

1. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self–organized criticality: an explanation of 1/*f* noise // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59, № 4. P. 381.

2. *Adami C.* Self–organized criticality in living systems// Phys. Rev. Let. A. 1995. Vol. 203. P. 29.

3. *Roters L., Lübeck S., Usadel K.D.* Critical behavior of a traffic flow model// Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59. P. 2673.

4. *Per Bak, Kim Sneppen.* Punctuated equilibriun and criticality in a simple model of evolution // Phys. Rev. Let. 1993. Vol. 71, № 24. P. 4083.

5. *Sole R.V., Manrubia S.C.* Extinction and self–organized criticality in a model of large–scale evolution// Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 1. P. R 42.

6. *Newman M.E.J.* A model of mass extinction// J. Theor. Biol. 1996. Vol. 189. P. 235.

7. *Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Некоторые модели класса решеточных газов, связанные с описанием численности популяций // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 4. С.74.

8. Сайт базы данных http://www.uscg.mil/hq/g–m/nmc/responce/stats/aa.htm

Саратовский государственный университет

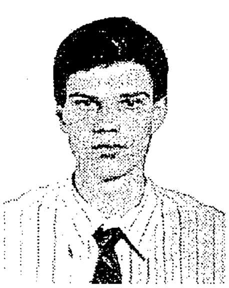
Поступила в редакцию 3.11.2000

SELF–ORGANIRED CRITICALITY IN HIERARCHICAL MANAGEMENT STRUCTURES

A.A. Koronovskiy, A.E. Hramov

This work deals with the hierarchical systems. It is shown that these systems demonstrate the self–organized criticality phenomena.

Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально–экономических процессов. Опубликовал в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым монографию «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд–во ГосУНЦ «Колледж», 1996). Автор ряда статей в центральной печати.



Храмов Александр Евгеньевич – окончил Саратовский госуниверситет (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности радиофизика (1999). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, методы анализа и моделирования динамических систем, мощная СВЧ–электроника.

E–mail: aeh@cas.ssu.runnet.ru