Изв.вузов «ПНД», т.8, № 6, 2000 УДК 534.1

АВТОКОЛЕБАНИЯ В ДИССИПАТИВНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ЦЕПОЧКЕ ТОДЫ

П.С. Ланда, В.Г. Ушаков, В. Эбелинг

Исследуются различные моды автоколебаний в кольцевой цепочке Тоды с дополнительным отрицательным трением. Предполагая, что при малой диссипации форма автоколебаний близка к форме солитоноподобных решений, найденных Тодой, вычисляются стационарные значения параметров автоколебаний. Показано, что цепочка, состоящая из N элементов, имеет $N+1$ различных мод автоколебаний. Среди них две моды соответствуют вращению цепочки как целого вправо и влево с постоянной скоростью. Каждая из остальных мод представляет собой комбинацию движущегося «солитона» и вращения с постоянной скоростью, зависящей от номера моды. Только для моды, в которой соседние элементы колеблются в противофазе, постоянная составляющая скорости равна нулю. Заметим, что эта мода существует только при четном N.

Введение

Цепочки однородных осцилляторов с экспоненциальным взаимодействием были впервые исследованы Тодой [1–3]. Позже было обнаружено, что уравнения с потенциалом Тоды являются общими для большого числа физических систем. Такие уравнения, например, встречаются при решении задач о самосинхронизации мод в лазерах [4].

Поскольку уравнения Тоды являются полностью интегрируемыми [5], то в них возможно появление стационарных «волн», подобных солитонам в сплошных средах. Частное решение уравнений Тоды, описывающее такие «солитоны», было найдено в [2]. Однако, как показали наши исследования, даже при численном моделировании уравнений Тоды получить такие решения трудно, так как в широком диапазоне начальных условий колебания в системе имеют хаотический характер. Это связано с высокой чувствительностью данной системы как к слабому шуму (роль такого шума при численном моделировании играют ошибки округления), так и к малым отклонениям системы от полностью интегрируемой (в частности, такие отклонения возникают потому, что при вычислении экспонент, входящих в уравнения Тоды, используется разложение в ряд Тейлора и принимается во внимание только ограниченное, хотя и достаточно большое число членов этого ряда). Тот факт, что малые отклонения от интегрируемости могут приводить к хаосу, был подмечен еще Хеноном и Хейлесом [6], которые рассматривали консервативную кольцевую цепочку Тоды из трех элементов и преднамеренно оставляли только первые члены разложения экспонент в ряд.

Очевидно, что солитоноподобные волны возможны не только в консервативных цепочках Тоды, но и в близких к ним автоколебательных системах. Волны в таких системах получили название автосолитонов [7]. Следует отметить, что в последнее время появилась обширная литература по автосолитонам, содержащая как теоретические, так и экспериментальные исследования. Мы укажем здесь только две работы [8,9], имеющие прямое отношение к теме настоящей статьи.

Интересно, что внесение слабой диссипации в систему часто стабилизирует ее поведение, приводя к возможности наблюдения солитоноподобных волн как в численном, так и в физическом экспериментах. Автосолитоны в активных кольцевых цепочках Тоды численно были получены, по–видимому впервые, в [10,11].

Целью настоящей работы является более детальное исследование различных мод автоколебаний в активной кольцевой цепочке Тоды с использованием аналитических методов. Будет показано, что такая цепочка, состоящая из N элементов, имеет N+1 мод, две из которых соответствуют равномерному вращению всей цепочки вправо и влево.

1. Уравнения автоколебательной цепочки Тоды

Рассмотрим кольцевую цепочку, состоящую из N шариков массы m, соединенных нелинейными пружинками. Расстояние между соседними шариками

$$z_j = x_j - x_{j-1} \tag{1}$$

определяет растяжение j–й пружинки (см. [12]). Запишем уравнения такой цепочки, введя дополнительные малые диссипативные члены

$$m\ddot{x}_j + \alpha[f(z_{j+1}) - f(z_j)] = m\mu(a - \gamma^2\dot{x}_j^2)\dot{x}_j, \quad j=1,2,\ldots,N, \tag{2}$$

где $f(z)=-(1-e^{-\gamma z})$. Нелинейная функция $\alpha f(z)$ описывает силу упругости пружин. Члены $m\mu a\dot{x}_j$ отвечают за отрицательное линейное трение, приводящее к возбуждению автоколебаний, а члены $-m\mu\gamma^2\dot{x}_j^3$ описывают ограничение амплитуды этих автоколебаний. Для удобства перейдем к переменным $x_j'=\gamma x_j$ и в дальнейшем будем опускать штрихи. В результате уравнение цепочки примет вид

$$m\ddot{x}_j + \alpha\gamma[f(z_{j+1}) - f(z_j)] = m\mu(a - \dot{x}_j^2)\dot{x}_j, \quad j = 1,2,\ldots,N, \tag{3}$$

где

$$f(z) = -(1 - e^{-z}) \tag{4}$$

Поскольку цепочка замкнута в кольцо, то для любого j должны выполняться условия

$$x_{j+N} = x_j, \qquad \dot{x}_{j+N} = \dot{x}_j. \tag{5}$$

2. Солитоноподобные колебания в консервативной цепочке Тоды

Солитоноподобные колебания цепочки, описываемой уравнением (3) при μ=0, были найдены Тодой [2]. Используем замену переменных, подобную той, которую сделал Тода

$$\dot{y}_j = \alpha\gamma f(z_j)/m. \tag{6}$$

При такой замене уравнения (3) при μ=0 переходят в

$$\dot{x}_j - y_j + y_{j+1} = C, \tag{7}$$

где C – произвольная постоянная. Совершая преобразования, подобные изложенным в [12], получаем уравнения для y_j

$$\ddot{y}_j = (\dot{y}_j + \omega_0^2/4)(y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}), \tag{8}$$

где $\omega_0=2(\alpha\gamma/m)^{1/2}$. Частное решение уравнения (8), имеющее вид «бегущей волны» [12], выражается через эллиптическую дзета-функцию Якоби

$$y_j(t) = A\mathrm{zn}(\mathbf{K}(k)\xi_j/\pi,k), \tag{9}$$

где $\xi_j=\omega t-\beta j$, $\mathrm{zn}(\vartheta,k)=\int_0^{\vartheta}[\mathrm{dn}(x,k)]^2dx-\mathbf{E}(k)\vartheta/\mathbf{K}(k)$ – эллиптическая дзета-функция Якоби [13], $\mathbf{K}(k)$ и $\mathbf{E}(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно. Подставляя (9) в (8), находим уравнения, связывающие амплитуду A, модуль эллиптической функции k, частоту ω и сдвиг фаз β между колебаниями соседних элементов

$$A = \omega\mathbf{K}(k)/\pi, \tag{10}$$

$$\omega = \pi\omega_0/[2\mathbf{K}(k)]\{1 - [1 - \mathbf{E}(k)/\mathbf{K}(k)]\mathrm{sn}^2(\mathbf{K}(k)\beta/\pi, k)\}^{-1/2}\mathrm{sn}(\mathbf{K}(k)\beta/\pi,k). \tag{11}$$

Легко проверить, что (11) при малых k переходит в дисперсионное уравнение для соответствующей линейной цепочки.

Как видно из (7) и (9), скорость j-го шарика

$$\dot{x}_j(\xi_j)=F(\xi_j,k,\omega) + C, \tag{12}$$

где

$$F(\xi_j,k,\omega) = A\,[\mathrm{zn}(\mathbf{K}(k)\xi_j/\pi,k) - \mathrm{zn}(\mathbf{K}(k)(\xi_j- \beta)/\pi,k)]. \tag{13}$$

Очевидно, что $\dot{x}_j(t)$ является периодической функцией ξ_j с периодом 2π. При $k\to 1$ имеем $\mathbf{E}(k)\to 1$, $\mathbf{K}(k)\to\ln(4/(1-k^2)^{1/2})$, $\mathrm{dn}\vartheta\to 1/\cosh\vartheta$, $\mathrm{zn}\vartheta\to\tanh\vartheta-\vartheta/\mathbf{K}(k)$. Отсюда следует, что при $k\to 1$

$$\dot{x}_j(\xi_j)\approx\omega_0[\mathbf{K}(k)]^{1/2}/2\{\Sigma_{n=-\infty}^{\infty}\tanh(\mathbf{K}(k)(\xi_j+2n\pi)/\pi)-\tanh(\mathbf{K}(k)(\xi_j+2n\pi-\beta)/\pi)-\beta/\pi\}+C. \tag{14}$$

Формула (14) позволяет вычислить аналитически $x_j(\xi_j)$ для k, близких к 1,

$$x_j(\xi_j)\approx\Sigma_{n=-\infty}^{\infty}\ln\{\cosh(\mathbf{K}(k)(\xi_j+2n\pi)/\pi)\cosh^{-1}(\mathbf{K}(k)(\xi_j+2n\pi-\beta)/\pi)\}-\beta\mathbf{K}(k)\xi_j/\pi^2-x_0+Ct, \tag{15}$$

где

$$x_0 = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi}\{\Sigma_{n=-\infty}^{\infty}\ln[\cosh(\mathbf{K}(k)(\xi_j+2n\pi)/\pi)\times$$

$$\times\cosh^{-1}(\mathbf{K}(k)(\xi_j+2n\pi-\beta)/\pi)] - \beta\mathbf{K}(k)\xi_j/\pi^2\}d\xi_j.$$

Из условия (5) можно найти возможные значения β

$$\beta = \beta_n = 2\pi n/N, \quad n = 0,\ldots,N. \tag{16}$$

Следует отметить, что значениям n=0 и n=N соответствуют решения $\dot{x}_j$=C, описывающие равномерное вращение всей цепочки как целого в том или ином направлениях. Таким образом, цепочка из N элементов имеет N+1 различных мод колебаний. Эти моды отличаются одна от другой по форме, амплитуде, частоте и сдвигу фаз между колебаниями соседних шариков. Примеры зависимостей $\dot{x}_j$ и x_j от ξ_j для консервативной цепочки приведены на рис. 1 для k=1–10^{-7} и двух значений β.

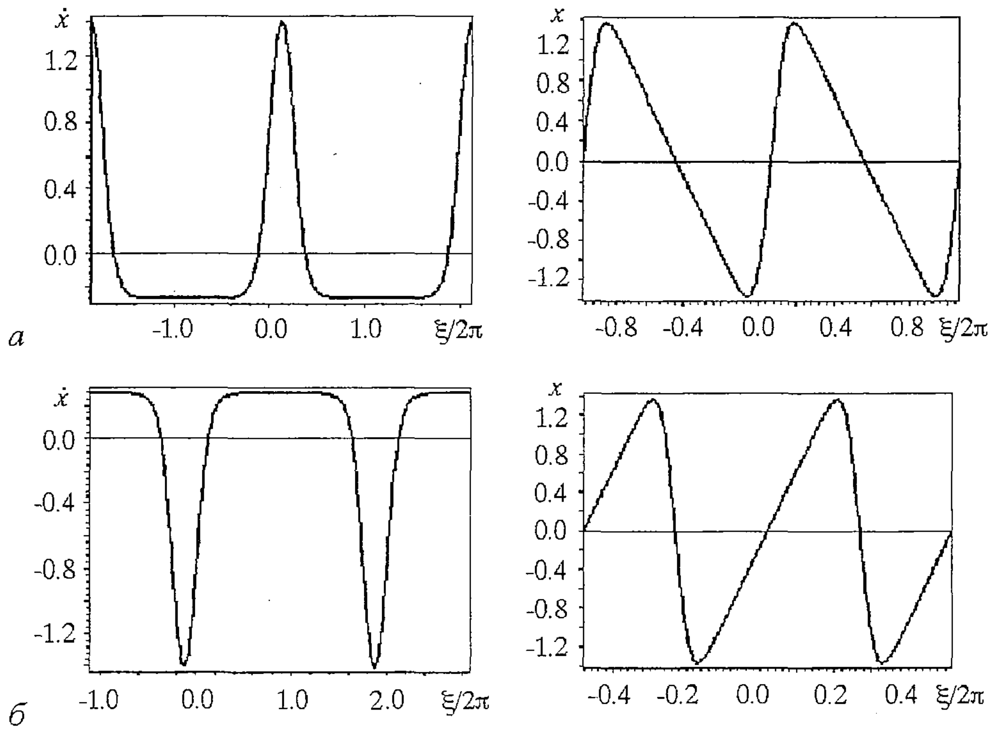


Рис. 1. Примеры зависимостей $\dot{x}_j$ и x_j от $x=(\omega t-\beta j)/(2\pi)$ для $k=1-10^{-7}$: *а* – $\beta=\pi/4$, «светлые» солитоны; *б* – $\beta=7\pi/4$, «темные» солитоны

Как видно из рисунка, при увеличении β «светлые» солитоны сменяются «темными».

В активной цепочке, описываемой уравнениями (3), каждая из этих мод порождает соответствующий аттрактор. Эти аттракторы можно разделить на два типа. Первому типу соответствует равномерное вращение цепочки со скоростью $\pm a^{1/2}$. Второму типу – колебания, наложенные на равномерное вращение.

3. Приближенное вычисление амплитуд автоколебаний и скоростей вращения цепочки

В случае малой диссипации запишем порождающее решение для системы (3) в виде (12). Это решение включает две произвольные постоянные: модуль эллиптической функции k, который определяет амплитуду и форму автоколебаний для соответствующей моды, и C, определяющую скорость равномерного вращения всей цепочки. Из (12), (13) и уравнений (3) следует, что при $n=0$ и $n=N$ мы имеем $\dot{x}_j=C=\pm a^{1/2}$. Для определения k и C, соответствующих остальным модам, потребуем, чтобы законы сохранения энергии и импульса, справедливые для консервативной цепочки, в случае активной цепочки выполнялись в среднем за период колебаний. Такой подход подобен используемому Уиземом [14] для получения усредненных уравнений. Для удовлетворения первого требования для каждого j умножим j–е уравнение из системы (3) на $\dot{x}_j$, просуммируем все уравнения и усредним все по периоду. В результате получим

$$d/dt \sum_{j=1}^{N} \int_0^{2\pi} [\dot{x}_j^2/2+\omega_0^2 f(z_j)/4]\, d\xi_j = \mu \sum_{j=1}^{N} \int_0^{2\pi} (a-\dot{x}_j^2)\dot{x}_j^2\, d\xi_j. \qquad (17)$$

Для вычисления интегралов необходимо подставить в (17) решение (12) с учетом (13) и выражение

$$f(z_j) = 4\mathbf{K}(k)\omega^2/(\pi^2\omega_0^2)[\mathbf{K}(k)\mathrm{dn}^2(\mathbf{K}(k)\xi_j/\pi,k) - \mathbf{E}(k)].$$

При расчете интегралов k и C считаются константами. Легко видеть, что все слагаемые в (17) одинаковы. В результате получим одно из укороченных уравнений для k и C.

Другое укороченное уравнение найдем из усредненного закона сохранения импульса. Чтобы получить это уравнение, сложим уравнения (3), принимая во внимание, что, как следует из закона сохранения импульса для порождающего решения, $\Sigma_{j=1}^{N} [f(z_{j+1})-f(z_j)]=0$ и $\Sigma_{j=1}^{N}\partial F(\xi_j,k)/\partial\xi_j=0$. Усредняя полученное уравнение по периоду, получим

$$\Sigma_{j=1}^{N}[\partial \bar{F}/\partial k(dk/dt) + dC/dt] = \mu/(2\pi)\ \Sigma_{j=1}^{N}\int_0^{2\pi}(a - \dot{x}_j^2)\dot{x}_j d\xi_j, \tag{18}$$

где

$$\bar{F} = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi} F(\xi_j,k,\omega)d\xi_j. \tag{19}$$

Здесь, как и в (17), все слагаемые одинаковы.

Поскольку определение левых частей уравнений (17) и (18) представляет большие вычислительные трудности, мы ограничимся только расчетом стационарных значений k и C для различных мод колебаний, приравнивая нулю правые части уравнений (17) и (18)

$$\int_0^{2\pi}(a - \dot{x}_j^2)\dot{x}_j^2 d\xi_j = 0, \tag{20}$$

$$\int_0^{2\pi}(a - \dot{x}_j^2)\dot{x}_j d\xi_j = 0. \tag{21}$$

Система уравнений (20), (21) для k и C была решена численно при N=8. Результаты представлены на рис. 2 и 3, где показаны зависимости стационарных значений модуля k и постоянной составляющей скорости C от номера моды. Следует отметить, что в случае a=1.0 и ω_0=1 значения k очень близки к 1, что оправдывает применение приближенных формул. Увеличение ω_0 или уменьшение a приводит, в целом, к уменьшению k. В случае a=0.1 и ω_0=4 для моды с номером n=4

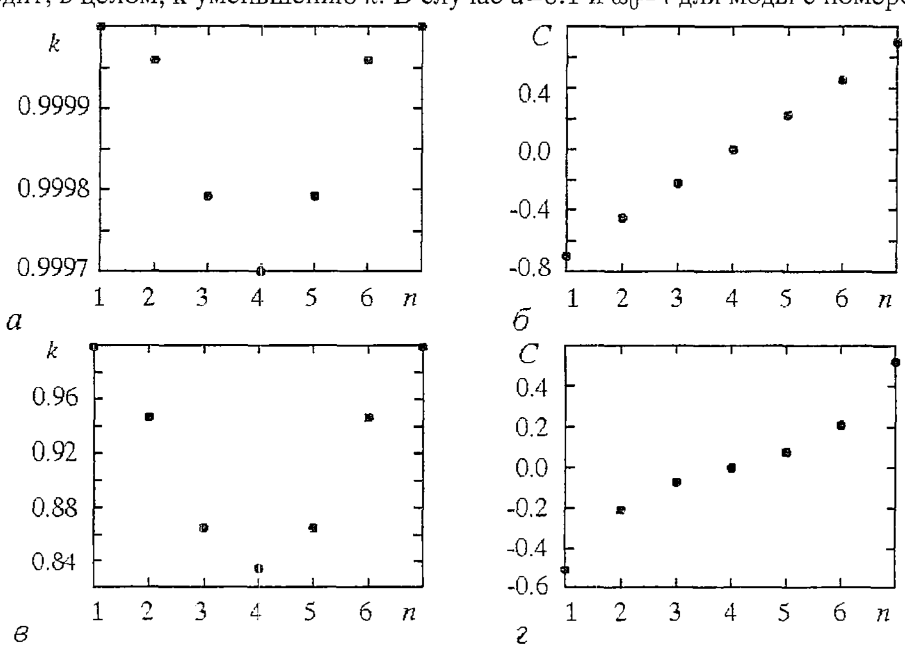


Рис. 2. Зависимости модуля эллиптических функций и постоянной составляющей скорости от номера моды при a=1.0: ω_0=1 (*а*, *б*); ω_0=4 (*в*, *г*)

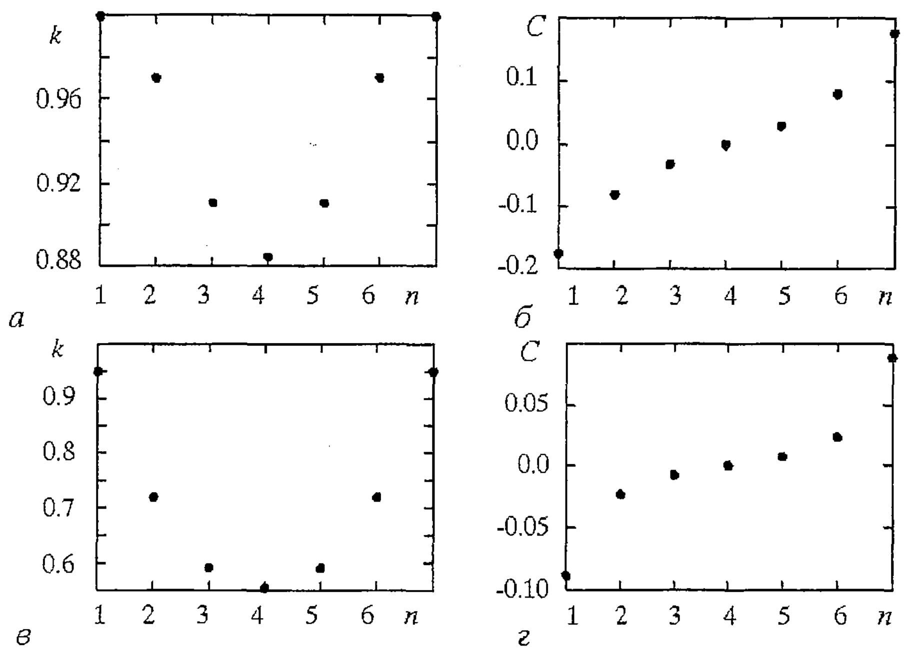


Рис. 3. Зависимости модуля эллиптических функций и постоянной составляющей скорости от номера моды при a=0.1: ω_0=1 (*а*, *б*); ω_0=4 (*в*, *г*)

значения k оказываются настолько малы, что возможна аппроксимация эллиптических функций соответствующими тригонометрическими. Из зависимости C от n видно, что только при n=N/2=4 постоянная составляющая скорости равна нулю. При этом соседние элементы колеблются в противофазе. Очевидно, что такой режим возможен только при четном N. С уменьшением a и увеличением ω_0 уменьшается диапазон изменения постоянной составляющей скорости.

На рис. 4 представлены результаты вычислений ω/ω_0 в зависимости от

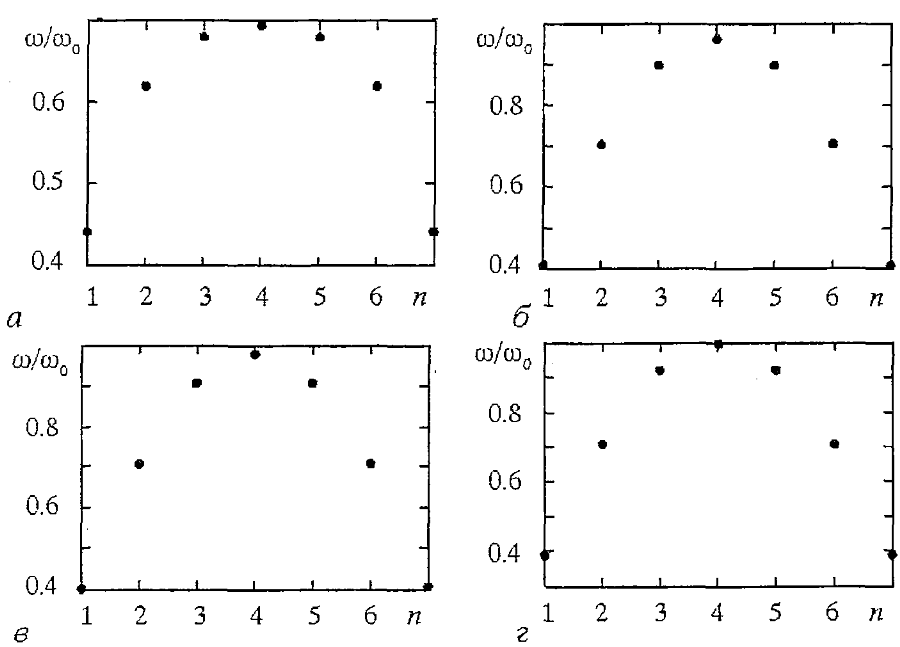


Рис. 4. Зависимости относительных частот колебаний ω/ω_0 от номера моды: *а* – a=1.0, ω_0=1; *б* – a=0.1, ω_0=1; *в* – a=1.0, ω_0=4; *г* – a=0.1, ω_0=4

номера моды по формуле (11) при рассчитанных значениях k. При увеличении номера моды частота колебаний сначала монотонно растет, достигая максимума при n=4, потом монотонно падает. Одной и той же частоте колебаний соответствуют две моды, расположенные симметрично относительно моды с n=4.

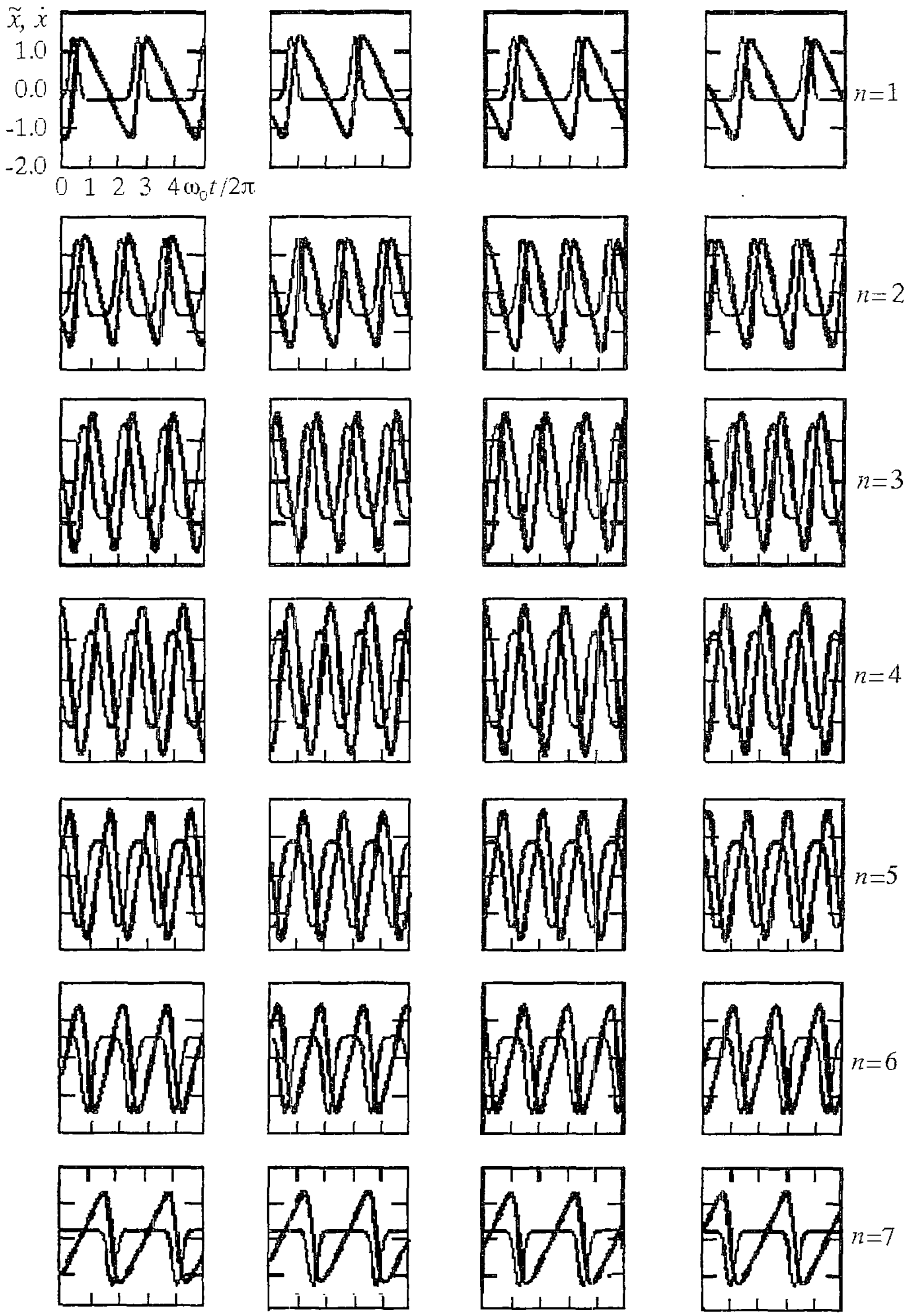


Рис. 5. Зависимости $\tilde{x}_j = x_j - Ct$ и $\dot{x}_j$ для первых четырех шариков от $\omega_0 t/(2\pi)$ для всех возможных мод колебаний при N=8, a=1.0, ω_0=1

На рис. 5 приведены зависимости $\tilde{x}_j \equiv x_j - Ct$ и $\dot{x}_j$ от $\omega_0 t/(2\pi)$ для первых четырех шариков и всех возможных мод колебаний (скоростям шариков соответствуют тонкие линии). Из графика видно, что колебания, соответствующие первой, второй, седьмой и шестой модам (имеющие наибольшие k), являются существенно негармоническими. Форма колебательной скорости шариков близка к светлому (при $n \leq 3$) или темному (при $n \geq 5$) солитонам.

Для проверки нашего метода расчета параметров автоколебаний мы проводили также численное решение исходных уравнений (3) при $N=8$; $\mu=0.1$; $a=1.0$, 0.1; $\omega_0=1$, 4. Значения скоростей вращения и амплитуд колебаний оказались очень близки к соответствующим значениям, вычисленным аналитически.

Заключение

В настоящей работе показано, что, используя решения для консервативной цепочки как порождающие и усредненные законы сохранения энергии и импульса, можно рассчитать формы автоколебаний, значения стационарных амплитуд и частот. Важно, что солитоноподобные колебания, которые трудно обнаружить в консервативной системе (даже при численном моделировании), проявляются в ней при внесении малой диссипации. Заметим, что рассмотренная автоколебательная система не является чисто теоретическим построением; подобные системы уже начали исследоваться экспериментально. Примером может служить аналоговая модель, состоящая из 6 электрических контуров [15]. Такие работы дают стимул к более глубоким теоретическим исследованиям диссипативных цепочек Тоды, и мы надеемся, что подобные системы могут послужить прототипами для практического применения в новых устройствах.

Библиографический список

1. *Toda M.* Waves in nonlinear lattice// Progr. Theor. Phys. Suppl. 1970. № 45. P. 174.
2. *Toda M.* Studies of nonlinear lattice//Phys. Reports. 1975. Vol. 18, № 1. P. 1.
3. *Toda M.* Theory of Nonlinear Lattices, Springer, Heidelberg–Berlin 1981.
4. *Ланда П.С., Выгодин В.А.* О самосинхронизации мод в лазерах// Квантовая электроника. 1977. Т. 4, № 4. С. 769.
5. *Henon M.* Integrals of the Toda lattice// Phys. Rev. B. 1974. Vol. 9, № 4. P. 1921.
6. *Henon M., Heiles C.* The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments// Astrophys. J. 1964. Vol. 69, № 1. P. 73.
7. *Кернер Б.С., Осипов В.В.* Автосолитоны. М.: Наука, 1991.
8. *Christov C.I., Velarde M.G.* Dissipative solitons// Physica D. 1995. Vol. 86. P. 323.
9. *Linde H. et al.* // J. Colloid Interface Sci. 1997. Vol. 188. P. 16.
10. *Makarov V., Ebeling W., Velarde M.* Soliton–like waves on dissipative Toda lattices// Int. J. Bifurc. & Chaos, в печати (2000).
11. *Ebeling W., Erdmann U., Dunkel J., Jenssen M.* Nonlinear dynamics and fluctuations of dissipative Toda chains// J. Stat. Phys., в печати (2000).
12. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
13. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977.
14. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
15. *Makarov V., Del Rio E., Ebeling W., Velarde M.* Oscillatory modes in an array of electrical Rayleigh – Toda circuits. Preprint Instituto Pluridisciplinar, UCM Madrid (2000).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 23.09.2000

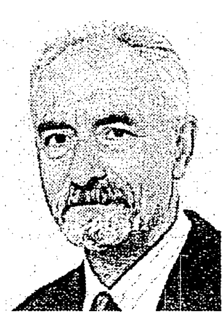
SELF-OSCILLATIONS IN DISSIPATIVE RING TODA CHAIN

P.S. Landa, V.G. Ushakov, W. Ebeling

We study here different modes of self-oscillations in ring Toda chain with negative friction. Assuming that at small friction the shape of self-oscillations is close to one of the known Toda soliton-like solutions we use analytical methods in combination with numerical ones for study of the self-oscillations. We show that a Toda chain consisting of N elements possesses $N+1$ different modes of self-oscillations. Among them two modes correspond to left and right rotations of the chain as a whole with a constant velocity. Each of the other modes represents a combination of moving soliton and the rotation with a velocity depending on the mode number. Only for the mode corresponding to anti-phase oscillation of the chain neighboring elements (such oscillation are possible for an even N) the constant component of velocity is equal to zero.

Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Прикладная нелинейная динамика».

Ушаков Вадим Геннадьевич – родился в 1977 году. В настоящее время – студент 6 курса физического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Удостоен стипендии имени Леонарда Эйлера (1999), Соросовский студент (2000). Участник конференции «Ломоносов – 99». Имеет публикацию в Phys. Rev. E. Область научных интересов: автоколебания, стохастические процессы.



Вернер Эбелинг – окончил Ростокский университет (1958), профессор, заведующий кафедрой статистической физики Гумбольдского университета в Берлине. Известный физик-теоретик, один из ведущих специалистов по теории процессов самоорганизации и эволюции открытых неравновесных систем разной природы. Его ученики успешно работают во многих университетах и научных институтах. Имеет более 20 книг: от фундаментальных монографий по теории физики плазмы до научно-популярных книг по синергетике. Его книги неоднократно издавались на английском и на русском языках.