

ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССА УСТАНОВЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МЕРЫ НА ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРАХ В СИСТЕМАХ ЛОРЕНЦА И РЕССЛЕРА С УЧЕТОМ ФЛУКТУАЦИЙ

А.С. Копейкин, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко

В работе анализируется процесс перемешивания на хаотических аттракторах почти гиперболического и негиперболического типа. Сравниваются различные характеристики перемешивания. Исследуется влияние шума. В рамках численного эксперимента показано, что для негиперболических аттракторов скорость перемешивания может существенно изменяться при воздействии шума. Вскрыт механизм влияния шума на процесс перемешивания, связанный с поведением мгновенной фазы хаотической траектории.

Введение

В нелинейных динамических системах кроме простых колебаний, к которым можно отнести периодические и квазипериодические, наблюдается множество более сложных колебательных режимов. В фазовом пространстве диссипативных систем им соответствуют так называемые нерегулярные аттракторы. Нерегулярные аттракторы по структуре могут быть существенно различны. Выделяют странные хаотические и странные нехаотические аттракторы, а также хаотические аттракторы с целой емкостной размерностью (хаотические нестранные) [1, 2]. Наиболее типичны для широкого класса систем странные хаотические аттракторы, характеризующиеся одновременно фрактальной структурой (свойство «странности») и экспоненциальным разбеганием соседних траекторий, порождающим непредсказуемость поведения динамической системы (свойство хаотичности). Строгой математической моделью динамического хаоса является грубый гиперболический аттрактор [3, 4]. Грубые гиперболические аттракторы обладают однородной структурой. Все траектории на аттракторе принадлежат к одному седловому типу. Примерами могут служить такие мысленные конструкции, как соленоид Смейла – Вильямса [5] или аттракторы Плькина [6]. Однако ни в одной конкретной динамической системе (заданной дифференциальными уравнениями или отображением последования) не доказано существование аттрактора данного типа. Квазигиперболические (почти гиперболические) аттракторы близки по свойствам к грубым гиперболическим, но в отличие от грубых гиперболических аттракторов они включают особые негрубые траектории: сепаратрисные петли или негрубые гомоклинические кривые. К аттракторам квазигиперболического типа относятся, например, аттракторы Лоренца и Мариока – Шимицу [3, 4, 7, 8]. Наиболее типичными для

большинства динамических систем конечной размерности являются негиперболические аттракторы [2–4]. Негиперболический хаотический аттрактор – это предельное множество, включающее траектории разного топологического типа, в том числе хаотические и устойчивые периодические орбиты с узкими областями притяжения.

Нелинейная система в режиме динамического хаоса даже при отсутствии шума может порождать инвариантную вероятностную меру, не зависящую от начального распределения. Аттракторы, удовлетворяющие этому свойству, были названы стохастическими [9–11]. Инвариантной вероятностной мере соответствует однозначно определенный эффективный потенциал системы. Для стохастического аттрактора характерно следующее. Если в системе присутствует шум интенсивности D , то эффективный потенциал характеризуется непрерывным предельным переходом к чисто динамическому случаю при $D \rightarrow 0$. Стохастические аттракторы реализуются в системах с экспоненциальным разбеганием траекторий и содержат только гиперболические орбиты. Отсюда следует, что свойствами стохастических аттракторов обладают грубые гиперболические аттракторы и квазигиперболические аттракторы. Негиперболические аттракторы, строго говоря, не являются стохастическими. Так как они содержат устойчивые периодические орбиты и хаотические предельные множества с различными статистическими характеристиками, то эффективный потенциал не имеет непрерывного предела при $D \rightarrow 0$ и в чисто динамическом случае определяется неоднозначно [12].

В силу существования инвариантной стационарной вероятностной меры, определяемой детерминированным оператором эволюции, статистические характеристики грубых гиперболических и почти гиперболических аттракторов устойчивы по отношению к слабым случайным воздействиям [9,13]. Напротив, системы с негиперболическими аттракторами во многих случаях проявляют существенную чувствительность к шумовым воздействиям: наблюдаются индуцированные шумом переходы. Установление вероятностной меры связано с процессом перемешивания. Перемешивание состоит в разбегании точек, заполняющих первоначально малый элемент фазового объема, по всему аттрактору, причем точки, принадлежащие соседним элементам, перемешиваются между собой. В гиперболических хаотических системах скорость перемешивания определяется энтропией Колмогорова – Синая H_k [14,15]. Энтропия H_k строго определена для грубых гиперболических систем. Доказано, что она равна сумме положительных ляпуновских показателей. Однако часто понятие энтропии Колмогорова – Синая, определенной через сумму положительных ляпуновских показателей, распространяют и на негиперболический хаос. Характерное время перемешивания $\tau_{\text{mix}} \sim 1/H_k$. Оно связано со временем спада автокорреляционной функции τ_{cor} . Для негиперболических аттракторов данные соотношения не доказаны. Возможно, что в силу неоднородности негиперболических аттракторов они могут нарушаться. Кроме того, можно предположить, что в некоторых случаях шум также оказывает существенное влияние на процесс перемешивания.

Задачи нашего исследования состояли в следующем.

- Рассмотреть и сравнить процессы установления стационарной вероятностной меры в почти гиперболических и негиперболических системах, включая случай воздействия шума.

- Выяснить взаимосвязь времени установления вероятностной меры с особенностями системы, со структурой аттрактора и с интенсивностью шума.

- Попытаться установить основные причины и механизмы различий в процессах перемешивания для систем с гиперболическими и негиперболическими аттракторами. Связана ли скорость установления только с энтропией Колмогорова – Синая или она определяется и другими причинами (например, действием флуктуаций)?

1. Исследуемые динамические системы и методы численных экспериментов

В работе исследовались хаотические аттракторы в классических модельных динамических системах с непрерывным временем при отсутствии и в присутствии шумового воздействия. Такими моделями служат система Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x-y) + (2D)^{1/2}\xi(t), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}\quad (1)$$

и осциллятор Ресслера

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z + (2D)^{1/2}\xi(t), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b - mz + xz,\end{aligned}\quad (2)$$

где $(2D)^{1/2}\xi(t)$ – источник нормального белого шума интенсивности D . Система Лоренца рассматривалась в двух режимах: режиме квазигиперболического аттрактора ($\sigma=10$, $\beta=8/3$, $r=28$) и режиме негиперболического аттрактора ($\sigma=10$, $\beta=8/3$, $r=210$). Осциллятор Ресслера анализировался при $a=0.2$, $b=0.2$ и двух значениях параметра m : 6.1 и 13.0, что соответствует двум негиперболическим аттракторам различной структуры. Хаотические аттракторы систем (1) и (2) детально изучены. Они обладают рядом универсальных свойств и служат образцами квазигиперболического и негиперболического хаоса. Таким образом, полученные для (1) и (2) результаты могут быть обобщены на широкий класс динамических систем. Уравнения численно интегрировались методом Рунге – Кутты 4-го порядка для стохастических уравнений [16].

Для исследования процесса перемешивания применялся следующий метод. В начальный момент времени вблизи произвольной точки траектории, принадлежащей аттрактору системы, выбирался малый объем, представляющий собой куб с ребром $\delta=0.09$, который равномерно заполнялся набором из $n=9000$ точек. С течением времени изображающие точки распределяются по аттрактору. Нами отслеживалась эволюция во времени данного набора точек и исследовалось среднее значение

$$x^0(t) = \int_W p(x,t) x dx \approx 1/n \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad (3)$$

где x – одна из динамических переменных системы, $p(x,t)$ – плотность вероятности переменной x в момент времени t , соответствующая выбранному начальному распределению.

Зависимость x^0 от t носит осциллирующий характер. Для системы (1), в которой фазовая траектория посещает окрестности двух седло–фокусов, при вычислении x^0 суммирование можно проводить отдельно по точкам, попавшим в окрестность каждого из седло–фокусов, затем результаты нужно сложить. Однако оказалось, что среднее значение за короткий интервал времени становится близким к нулю и его дальнейшая эволюция плохо диагностируется. Чтобы проследить процесс перемешивания, в (1) рассматривалось среднее значение, полученное с учетом точек в окрестности только одного седло–фокуса. Установление этой величины протекает во времени более медленно. По полученным данным вычислялась амплитуда осцилляций среднего значения $\gamma(t)$, определяемая как модуль разности значений последовательных экстремумов x_m^0 функции $x^0(t)$ (рис. 1)

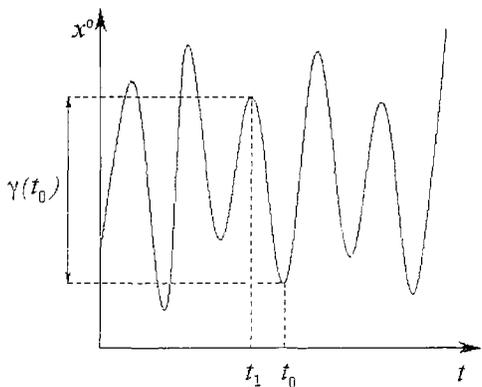


Рис. 1. Схематическая иллюстрация вычисления $\gamma(t) = x^0_{\max}(t_1) - x^0_{\min}(t_0)$ - амплитуды осциллирующей функции $x^0(t)$

Численные эксперименты показали, что для исследуемых аттракторов либо сама зависимость $\gamma(t)$, либо ее огибающая имеют экспоненциальный вид $\gamma(t) \sim \exp(-t/\alpha)$. Показатель α соответствует времени спада графика функции в e раз и характеризует скорость перемешивания. Величина α не зависит от величины исходного элемента фазового пространства и является более удобной характеристикой скорости перемешивания в сравнении с T_ϵ .

Анализировалось поведение старшего ляпуновского показателя λ_1 хаотической траектории на аттракторе. Он является усредненной вдоль траектории характеристикой скорости перемешивания и для исследуемых режимов практически не зависит от выбора начальной точки*. Чтобы выявить изменение скорости перемешивания вдоль траектории, исследовался так называемый локальный ляпуновский показатель Λ_1 , рассчитываемый на небольших интервалах времени [17,18]. В целях всестороннего анализа процесса перемешивания вычислялась также нормированная корреляционная функция установившихся колебаний $x(t)$

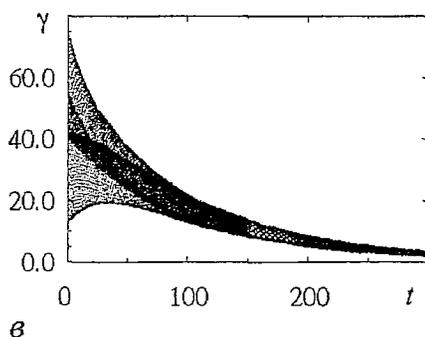
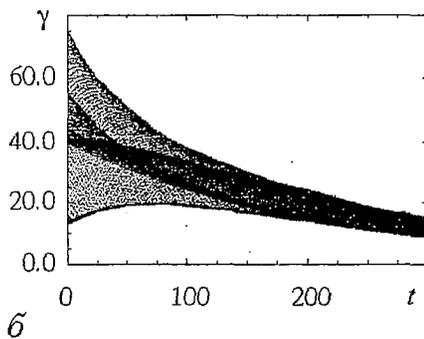
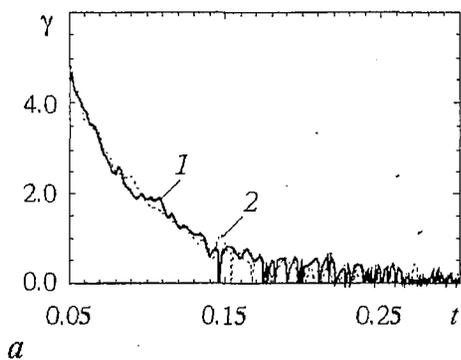
$$\Psi(\tau) = [\langle x(t)x(t+\tau) \rangle - \langle x(t) \rangle^2] [\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2]^{-1}. \quad (5)$$

Определялось время корреляции τ_{cor} как время, за которое огибающая корреляционной функции спадает в e раз.

2. Исследование процесса перемешивания в системе Лоренца. Влияние шума на различные характеристики скорости перемешивания

Для того чтобы определить, как влияет аддитивный шум в (1) на процесс перемешивания, была рассчитана зависимость амплитуды γ от времени для двух аттракторов системы (1) различного типа в присутствии и в отсутствие шума (рис. 2). На рис. 2, а представлены результаты, полученные для квазигиперболического аттрактора Лоренца. Сплошная линия соответствует случаю отсутствия шума, а пунктирная иллюстрирует процесс перемешивания в присутствии шума интенсивности $D=0.01$. Как видно из рисунка, присутствие шума не оказало заметного влияния на скорость перемешивания. Зависимости $\gamma(t)$ для

* Строго говоря, для негиперболических аттракторов в силу их неоднородности ляпуновские показатели, как и другие характеристики, рассчитываемые вдоль одной траектории, должны зависеть от выбора этой траектории. Однако в численных экспериментах в результате действия «компьютерного шума» такая зависимость не всегда может быть обнаружена.



негиперболического аттрактора в системе (1) приведены на рис. 2, б ($D=0$) и рис. 2, в ($D=0.01$). Их не удастся представить на одном рисунке, так как зависимости в данном случае имеют сложный немонотонный характер. Сравнение полученных результатов показывает, что для режима негиперболического аттрактора шум достаточно сильно влияет на процесс перемешивания. Результаты расчета времени установления среднего значения с заданной точностью (T_ϵ) и характерного времени α приведены в таблице. Как следует из таблицы, для негиперболического аттрактора системы (1) шум приводит к уменьшению α более чем в два раза.

Рис. 2. Зависимость амплитуды $\gamma(t)$ для аттрактора системы (1): а – для квазигиперболического аттрактора ($r=28$) при $D=0$ (сплошная линия) и $D=0.01$ (пунктирная линия); б – для негиперболического аттрактора Лоренца при $r=210$, $D=0$; в – для негиперболического аттрактора Лоренца при $r=210$, $D=0.01$

В хаотических системах с непрерывным временем и размерностью фазового пространства $N=3$ энтропия Колмогорова – Синяя H_k определяется положительным ляпуновским показателем λ^+ . Таким образом, характерное время перемешивания должно удовлетворять соотношению $\tau_{\text{mix}} \sim 1/\lambda^+$. Соответственно, можно

Таблица

Значения показателя скорости спадающей огибающей α , старшего ляпуновского показателя λ_1 и времени корреляции τ_{cor} для аттракторов систем Лоренца ($\sigma=10$, $\beta=8/3$) и Ресслера ($a=0.2$, $b=0.2$)

система Лоренца					система Ресслера				
r	D	α	λ_1	τ_{cor}	m	D	α	λ_1	τ_{cor}
28	0	0.056	0.92	0.4	6.1	0	47	0.082	9500
28	0.01	0.056	0.92	0.4	6.1	0.001	33	0.081	5500
210	0	165	0.86	25000	6.1	0.1	11	0.081	200
210	0.01	78	0.86	13000	13	0	40	0.11	40
					13	0.01	45	0.11	40

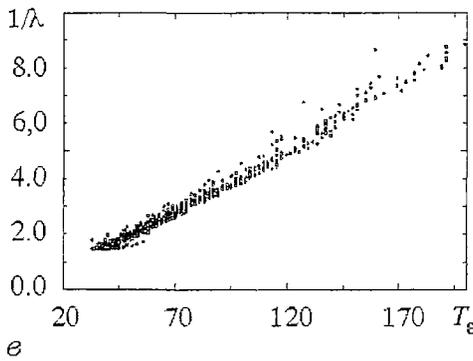
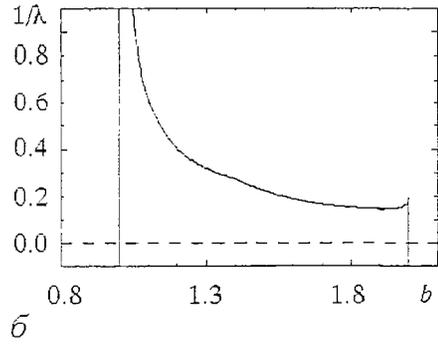
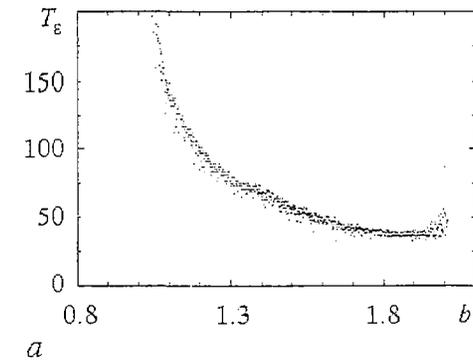


Рис. 3. Взаимосвязь между временем T_e и ляпуновским показателем λ для отображения Лоренца: зависимость T_e (а) и $1/\lambda$ (б) от управляющего параметра b ; зависимость $1/\lambda$ от T_e (в)

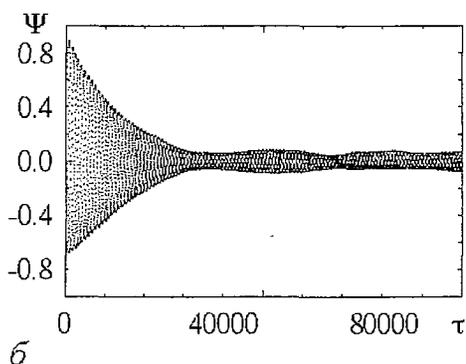
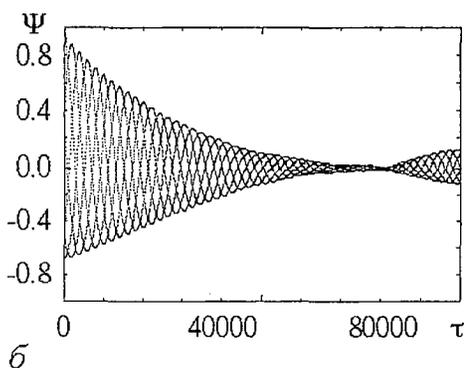
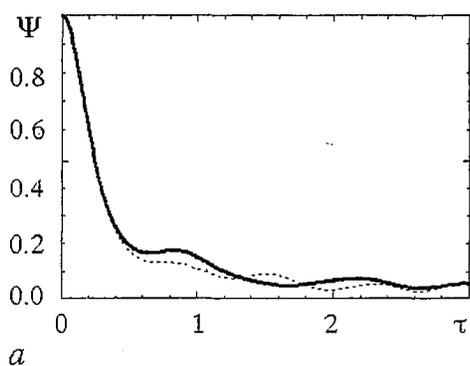
предположить прямопропорциональную зависимость между T_e , α и $1/\lambda$. Расчеты T_e и α для системы (1) достаточно сложны и длительны, так что получить зависимости этих величин от параметра оказывается затруднительным.

Поэтому мы воспользовались одномерным отображением, моделирующим отображение последования в сечении аттрактора Лоренца

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1 - b|x_n|^a, & x_n \in [-1, 0), \\ 0, & x_n = 0, \\ -1 + b|x_n|^a, & x_n \in (0, 1], \end{cases} \quad (6)$$

где $a=1/b+0.001$. В области положительных значений ляпуновского показателя λ были получены зависимости T_e (рис. 3, а) и $1/\lambda$ (рис. 3, б) от управляющего параметра b . Можно видеть большое сходство этих рисунков. Для большей наглядности на рис. 3, в представлена зависимость T_e от $1/\lambda$. Точки группируются вдоль прямой линии, наклон которой определяет коэффициент пропорциональности. Таким образом, в рассмотренном модельном отображении скорость перемешивания однозначно определяется энтропией Колмогорова. Данный результат находится в полном соответствии с выводами теории Колмогорова – Синая.

Однако, как мы видели на примере негиперболического аттрактора в системе (1), скорость перемешивания, диагностируемая с помощью величины α , может существенно меняться при воздействии шума. Выясним, будут ли соответствующим образом зависеть от шума такие характеристики процесса перемешивания как ляпуновский показатель и время корреляции? Для рассмотренных ранее хаотических аттракторов системы (1) производился расчет старшего ляпуновского показателя λ_1 вдоль достаточно длинной фазовой траектории, а также вычислялась нормированная автокорреляционная функция $\Psi(\tau)$; $\tau=t_2-t_1$, динамической переменной $x(t)$ при различных значениях интенсивности шума D . Значения λ_1 и времени корреляции τ_{cor} приведены в таблице. Как в случае квазигиперболического аттрактора Лоренца, так и в случае

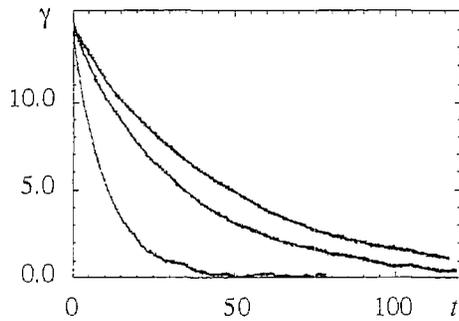


негиперболического аттрактора, ляпуновский показатель в пределах точности численных расчетов не зависит от интенсивности шума. Результаты расчета нормированной автокорреляционной функции приведены на рис. 4. В режиме квазигиперболического аттрактора шум практически не влияет на вид автокорреляционной функции (рис. 4, а). Для негиперболического аттрактора воздействие шума приводит к более быстрому спадаанию автокорреляционной функции (см. кривые на рис. 4, а, б). Время корреляции τ_{cor} для квазигиперболического аттрактора практически не зависит от интенсивности шума, в то время как для негиперболического при наличии шума оно уменьшается почти в два раза (см. таблицу). Таким образом, в рассмотренных случаях наличие шума не влияет на старший ляпуновский показатель. Важно отметить, что для квазигиперболического аттрактора оно также не влияет на время корреляции и величину α , в то время как для негиперболического аттрактора τ_{cor} и α при воздействии шума существенно изменяются. Так, в проведенных численных экспериментах время корреляции уменьшилось почти в два раза, а величина α более чем в два раза.

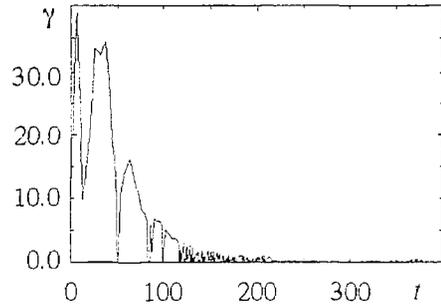
Рис. 4. Нормированная автокорреляционная функция для аттракторов системы (1): а - при $r=28$ (сплошная линия соответствует $D=0$, пунктирная - $D=0.01$); б - при $r=210$, $D=0$; в - при $r=210$, $D=0.01$

3. Исследование процесса перемешивания в системе Ресслера. Механизм влияния шума на характеристики скорости перемешивания

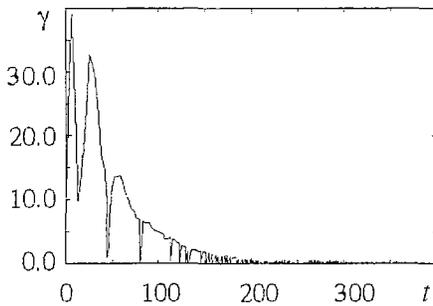
В связи с приведенными в предыдущем параграфе результатами возникает вопрос: почему влияние шума на процесс перемешивания для двух исследованных хаотических аттракторов столь различно? Нечувствительность характеристик скорости перемешивания по отношению к шуму для квазигиперболического аттрактора можно было предвидеть, поскольку, как уже отмечалось, свойства аттракторов данного типа вообще устойчивы к действию шума [9, 13]. Известно, что для негиперболических аттракторов шум вызывает внутренние бифуркации, приводящие к перестройке структуры аттрактора. В связи с этим можно предположить, что шум способен оказывать существенное влияние на процесс установления вероятностной меры. Чтобы проверить это предположение, необходимо рассмотреть негиперболические аттракторы различных типов. Исследованный ранее негиперболический аттрактор в системе (1) относится к широко распространенному типу негиперболических аттракторов. Это так



a



б



в

Рис. 5. Зависимость амплитуды $\gamma(t)$ для аттракторов системы (2): *a* – в случае аттрактора спирального типа для $m=6.1$ при $D=0$ (линия 1), $D=0.001$ (линия 2) и $D=0.1$ (линия 3); *б* – в случае аттрактора винтового типа для $m=13$ при $D=0$; *в* – в случае аттрактора винтового типа для $m=13$ при $D=0.01$

субгармоникам. В силу перечисленных свойств спиральный хаос называют когерентным хаосом.

Характерной особенностью негиперболических хаотических аттракторов является изменение их структуры при вариации параметров. В системе (2) с ростом m происходит качественная перестройка аттрактора. При $m > 9$ в фазовом пространстве (2) существует негиперболический аттрактор винтового типа [19,20], для которого регулярность в поведении фазовой траектории уже не наблюдается. Соответствующий хаотический режим называют некогерентным хаосом.

На рис. 5 представлены результаты вычисления зависимости $\gamma(t)$ для спирального и винтового аттракторов системы (2). Кривые 1–3 на рис. 5, *a* соответствуют режиму спирального аттрактора без шумового воздействия и в присутствии шума интенсивности $D=0.01$ и $D=0.1$. В режиме спирального аттрактора в системе Ресслера, как и в системе Лоренца, шум оказывает существенное влияние на скорость перемешивания. Значение величины α заметно уменьшается с ростом интенсивности шума (см. таблицу и рис. 5, *a*).

Иная картина имеет место для аттрактора системы Ресслера винтового типа. Из данных рис. 5, *б*, *в* и таблицы следует, что винтовой хаос практически нечувствителен к воздействию шума малой интенсивности. Добавление в систему шума не приводит к заметным изменениям величины α и значений положительного ляпуновского показателя. В то же время хорошо известно, что некогерентный хаос (винтовой аттрактор) обладает более ярко выраженным сходством со случайным процессом, о чем свидетельствует, например, вид автокорреляционной функции $\Psi(\tau)$ хаотических колебаний. Рассмотрим и сравним графики автокорреляционных функций хаотических колебаний спирального и винтового

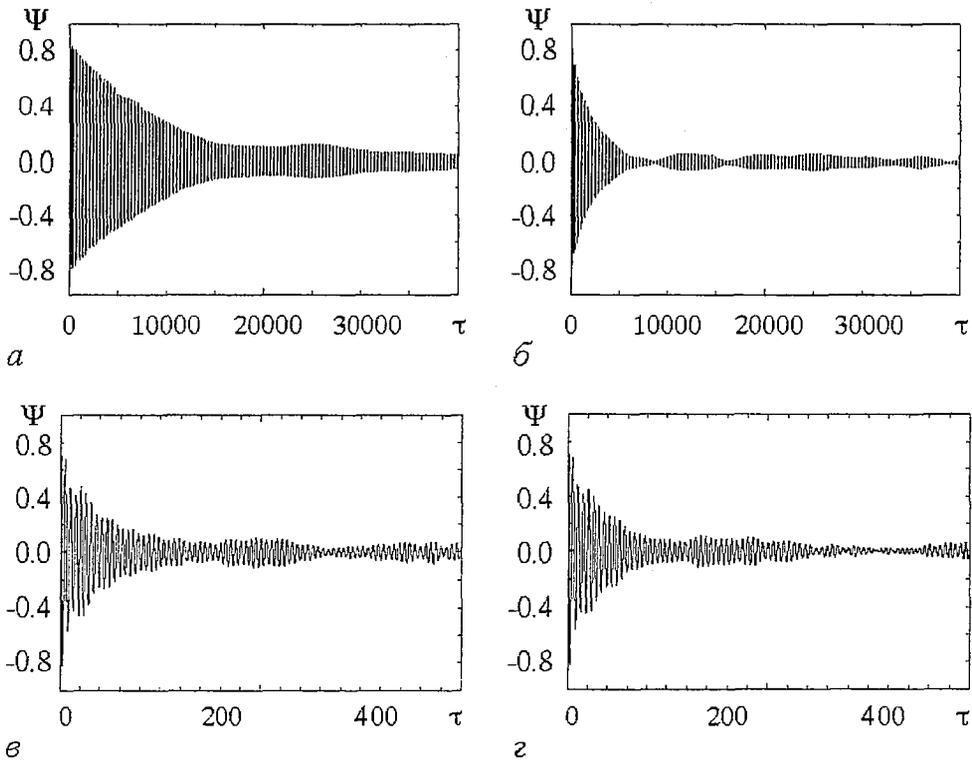


Рис. 6. Нормированная автокорреляционная функция для аттракторов системы (2): спирального типа для $m=6.1$ при $D=0$ (а), $D=0.01$ (б); винтового типа для $m=13$ при $D=0$ (в), $D=0.01$ (г)

типа в системе (2), представленные на рис. 6. Кривые на рис. 6, а, б, соответствуют спиральному аттрактору и отражают заметное ускорение расщепления корреляций при наличии шума. Кривые на рис. б, в, г, полученные в режиме винтового хаоса в отсутствие шума и с учетом шума, практически совпадают. Значения времени корреляции τ_{cor} для спирального и винтового аттракторов приведены в таблице. Как видно из полученных результатов, времена корреляции τ_{cor} в указанных режимах в отсутствие шума различаются на два порядка. В то же время в режиме спирального хаоса хорошо заметно влияние шума, а в режиме винтового хаоса такого влияния практически нет. Винтовой хаос демонстрирует свойство, присущее гиперболическому хаосу – «динамическая стохастичность» оказывается намного сильнее навязываемой извне [9]! Этот установленный в численных экспериментах факт представляется весьма интересным и требует более детального рассмотрения. Следует отметить и другой важный экспериментальный результат: в режиме спирального хаоса скорость перемешивания не определяется однозначно старшим ляпуновским показателем, а зависит от интенсивности шума. Данный результат не совпадает с теоретическими выводами [14,15], полученными для гиперболического хаоса.

Одним из инструментов исследования тонкой структуры негиперболического хаотического аттрактора и происходящих с ним изменений при вариации параметров могут служить локальные ляпуновские показатели [17]. Они позволяют судить о скорости локального перемешивания в той или иной части аттрактора. Необходимо было выяснить, как изменяются свойства локального перемешивания при переходе от спирального аттрактора к винтовому и влияет ли на эти свойства добавление в систему шума. С этой целью были проведены следующие численные исследования. Для двух различных аттракторов системы (2) вычислялся старший локальный ляпуновский показатель Λ_1 для достаточно большого числа участков фазовой траектории. Находилось его максимальное $\Lambda_{1\text{max}}$

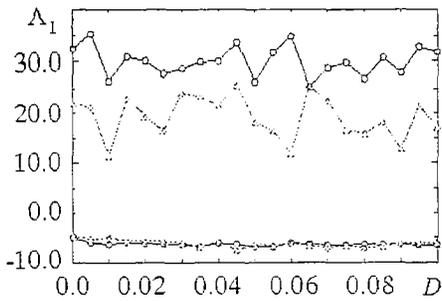


Рис. 7. Зависимость максимальных и минимальных значений локального ляпуновского показателя Λ_1 на аттракторе для системы (2) от интенсивности шума. Серые линии и треугольники соответствуют спиральному аттрактору ($m=6.1$), черные линии и кружочки — винтовому аттрактору ($m=13$). Локальный ляпуновский показатель рассчитывался на времени $T=1.0$ при шаге интегрирования $h=0.001$.

процесс перемешивания может быть связано с особенностями движения фазовой траектории в окрестности неустойчивого состояния равновесия. Из-за почти регулярного вращения траектории на спиральном аттракторе процесс перемешивания оказывается очень длительным. Существенное возрастание скорости перемешивания в присутствии шума в этом случае связано с тем обстоятельством, что шум разрушает имеющуюся относительную регулярность траектории.

Рассмотрим последовательность пересечений фазовой траектории на хаотическом аттракторе с некоторой секущей плоскостью. На секущей плоскости порождается отображение последования $X(n+1)=\hat{P}X(n)$, где n — номер пересечения траекторией секущей плоскости в одном направлении. Если мы исследуем множество траекторий, стартующих из близко расположенных точек аттрактора, то моменты их пересечения с секущей плоскостью окажутся не совсем одинаковыми и с течением времени будут все больше различаться. Процесс перемешивания в исходной системе с непрерывным временем можно условно разложить на две составляющие: перемешивание в трансверсальной секущей плоскости и перемешивание, связанное с неодновременностью пересечения этой плоскости изначально близкими траекториями. Численные эксперименты, проведенные на хаотических модельных отображениях последования, показывают, что скорость перемешивания в отображении определяется положительным ляпуновским показателем и слабо зависит от уровня шума. Остается выяснить, как влияет шум на вторую предполагаемую составляющую перемешивания.

Известно, что для хаотических колебаний можно ввести понятия мгновенной амплитуды и фазы. Мгновенная фаза характеризует вращение траектории вокруг седло-фокуса. В системе (2) траектория в x_0 -проекции вращается вокруг единственного седло-фокуса. Для качественного описания поведения траектории в этом случае мгновенную фазу можно ввести как [21,22]

$$\Phi(t) = \arctan(y(t)/x(t)) + \pi n(t), \quad (7)$$

где $n(t)=0,1,2,\dots$ — номер пересечения траектории с плоскостью $x=0$.

Рассмотрим разность мгновенных фаз $\Delta_n=\Phi_2(t_n)-\Phi_1(t_n)$ двух первоначально близких траекторий системы (2) в моменты t_n , когда первая траектория пересекает плоскость $x=0$. Результаты расчета последовательности значений Δ_n , получаемой в режиме спирального и винтового хаоса, приведены на рис. 8, а, б, соответственно. Линией 1 изображены точки, отвечающие значениям Δ_n без шумового воздействия, а линией 2 представлены результаты, полученные в присутствии шума

и минимальное Λ_1^{\min} значения. Зависимости Λ_1^{\max} и Λ_1^{\min} от уровня шума для аттракторов спирального и винтового типа приведены на рис. 7. Они свидетельствуют о том, что в случае любого из рассмотренных аттракторов шум не влияет на характер поведения локального ляпуновского показателя.

Установленный факт нечувствительности к шуму как обычных, так и локальных ляпуновских показателей и значительное, в некоторых случаях, изменение под действием шума других характеристик перемешивания свидетельствуют, что механизм перемешивания на негиперболическом аттракторе связан не только с ляпуновскими показателями. Остается предположить, что существенное влияние шума на

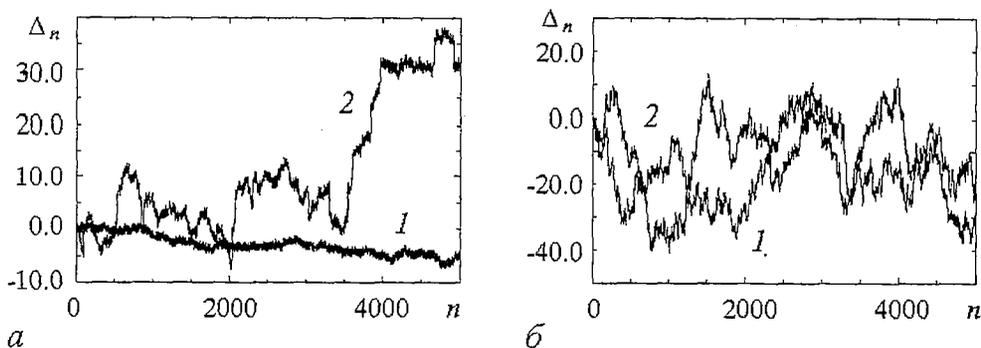


Рис. 8. Разности мгновенных фаз двух первоначально близких траекторий на аттракторе в моменты пересечения первой траекторией секущей плоскости $x=0$ в одном направлении в зависимости от номера пересечения n . Результаты получены для системы (2) при $m=6.1$ (а) и $m=13$ (б)

интенсивности $D=0.1$. В режиме спирального аттрактора (см. рис. 8, а) шум меняет поведение во времени разности фаз соседних траекторий. Если при $D=0$ изменение разности фаз происходило медленно и плавно (за исключением мелкомасштабных изменений в пределах $\pm\pi$), то добавление шума приводит к возникновению изменений более чем на 2π за короткие промежутки времени. Таким образом, шум в этом случае приводит к существенному усилению перемешивания мгновенных фаз хаотических траекторий. Для винтового аттрактора свои фазы типичны в чисто динамическом случае, поэтому зависимости Δ_n от n , полученные в присутствии шума и без шума, качественно не различаются (см. рис. 8, б). Процесс перемешивания фаз как с шумом, так и без него, протекает быстрее, чем процесс перемешивания в отображении последования, поэтому скорость последнего является определяющей при установлении вероятностной меры в исходной динамической системе.

Известные квазигиперболические аттракторы трехмерных потоков (аттрактор Лоренца, аттрактор Мариока – Шимицу) являются аттракторами переключающего типа. Фазовая траектория хаотически перескакивает из окрестности одного седлового состояния равновесия в окрестность другого. Такие переключения сопровождаются хаотическими сбоями фазы без воздействия шума. Введение источников шума не приводит в данном случае к существенному изменению динамики фазы и, следовательно, не влияет на скорость перемешивания.

Выводы

Показано, что для квазигиперболических аттракторов характеристики скорости глобального и локального перемешивания находятся в пропорциональном соотношении и практически не зависят от интенсивности шума.

Существует класс негиперболических аттракторов (аттракторы спирального типа), для которых шум оказывает существенное влияние на показатели скорости глобального перемешивания и время корреляции и практически не изменяет энтропию Колмогорова – Синая.

Скорость процесса перемешивания на негиперболических аттракторах в \mathbb{R}^3 определяется не только положительным ляпуновским показателем, но также и особенностями динамики мгновенной фазы хаотических колебаний. В режиме спирального (когерентного) хаоса шумовое воздействие, приводящее к возникновению сбоя фазы, может существенно ускорить процесс перемешивания. В случае аттракторов с нерегулярным поведением мгновенной фазы, к которым относятся квазигиперболические аттракторы и негиперболические аттракторы

винтового типа, шум не может оказать заметного влияния на процесс перемешивания.

Работа была поддержана грантом № REC-006 Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF) и Министерства образования РФ.

Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // *Physica D*. 1984. Vol. 13. P. 261.
2. Anishchenko V.S., Strelkova G.I. Irregular attractors // *Disc. Dynamics in Nature and Society*. 1998. Vol. 2, № 1. P. 53.
3. Shilnikov L.P. Strange attractors and dynamical models // *J. of Circuits, Systems, and Computers*. 1993. Vol. 3, № 1. P. 1.
4. Afraimovich V.S., Shilnikov L.P. Strange attractors and quasiattractors // *Non-linear Dynamics and Turbulence* / Eds G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. Pitman, Boston, London, Melbourne. 1983. P. 1.
5. Williams R.F. Expanding attractors // *Publ. Math. IHES*. 1974. Vol. 43. P. 169.
6. Плыкин Р.В. О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов // *УМН*. 1980. Т. 35, № 3. С. 94.
7. Афраимович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // *ДАН СССР*. 1977. Т. 234, № 2. С. 336.
8. Шильников Л.П. Бифуркации и хаос в модели Мариока – Шимицу // *Методы качественной теории и теории бифуркаций*. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1989. С. 130.
9. Синай Я.Г. Стохастичность динамических систем // *Нелинейные волны* / Под ред. А.В. Гапонова–Грехова. М.: Наука, 1979. С. 192.
10. Бунимович Л.А., Синай Я.Г. Стохастичность аттрактора в модели Лоренца // *Нелинейные волны* / Под ред. А.В. Гапонова–Грехова. М.: Наука, 1979. С. 212.
11. Sinai Y. Finite-dimensional randomness // *Russian Math. Surveys*. 1991. Vol. 46, № 43. P. 147.
12. Graham R., Ebeling W., private communications; Graham R., Hamm A., *Tel T*. Nonequilibrium potentials for dynamical systems with fractal attractors or repellers // *Phys. Rev. Lett*. 1991. Vol. 66, № 24. P. 3089.
13. Kifer Yu. Attractors via random perturbations // *Commun. math. phys*. 1989. Vol. 121. P.445.
14. Колмогоров А.Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // *ДАН СССР*. 1959. Т. 124. С. 754.
15. Синай Я.Г. О понятии энтропии динамической системы // *ДАН СССР*. 1959. Т. 124. С. 768.
16. Никитин Н.Н., Разовиг В.Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // *ЖВМ*. 1978. Т. 18, № 1. С. 106.
17. Grassberger P. // *Chaos* / Ed. A.V. Holden. Manchester: Manchester University Press, 1986.
18. Abarbanel H.D.I., Brown R., Kennel M.B. // *J. Nonlinear Sci*. 1992. Vol. 2. P. 343.
19. Arneodo A., Collet P., Tresser C. Possible new strange attractors with spiral structure // *Commun. Math. Phys*. 1981. Vol. 79. P. 573.
20. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
21. Rosenblum M.G., Pikovsky A., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillations // *Phys. Rev. Lett*. 1996. Vol. 76, № 11. P. 1804.
22. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators // *Europhys. Lett*. 1996. Vol. 34. P. 165.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 5.10.2000
после доработки 6.12.2000

PECULIARITIES OF RELAXATION TO INVARIANT PROBABILITY MEASURE ON CHAOTIC ATTRACTORS OF LORENZ AND RÖSSLER SYSTEMS IN THE PRESENCE OF NOISE

A.S. Kopeikin, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko

In the paper we analyze the mixing process on chaotic attractors of quasi hyperbolic and nonhyperbolic type. Different characteristics of mixing are compared. It was shown experimentally that the mixing rate can significantly change at the presence of noise for nonhyperbolic attractors. We have found the mechanism of noise influence on the mixing process. It is related to the behaviour of instantaneous phase of a chaotic trajectory.



Копейкин Андрей Сергеевич – родился в Саратове (1976), окончил физический факультет Саратовского университета (1998). В настоящее время учится в аспирантуре на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Автор 5 научных работ.



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1981), доцент, кандидат физико-математических наук. В настоящее время – докторант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 40 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1966), защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, Заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, Лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999). E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru