

## СВОЙСТВА СКЕЙЛИНГА ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ХАОСУ В МОДЕЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ С ШУМОМ

*А.П. Кузнецов, Ю.В. Капустина*

Рассматриваются основные свойства скейлинга на бифуркационном дереве в отсутствие и в присутствии шума для различных отображений, демонстрирующих переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Предложен численный метод определения констант шума для одно- и двумерных отображений, позволяющий иллюстрировать свойства скейлинга бифуркационного дерева, находящегося под случайным шумовым воздействием.

### Введение

Одной из наиболее характерных иллюстраций сложной динамики нелинейных систем является бифуркационное дерево, которое представляет собой зависимость значений переменной на аттракторе от управляющего параметра. Для систем с удвоениями периода дерево имеет очень тонкую организацию: точки бифуркаций удвоения (в этих точках каждая ветвь дерева расщепляется на две) быстро накапливаются вдоль оси управляющего параметра, достигая критического значения, соответствующего появлению хаоса, причем точно в критической точке дерево испытывает бесконечное число расщеплений. В закритической области наблюдается сложная картина чередования аperiодических и периодических режимов (рис. 1).

Простейшей модельной системой, демонстрирующей переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, является логистическое отображение

$$X_{n+1} = 1 - \lambda X_n^2. \quad (1)$$

Сложная структура бифуркационного дерева этого отображения подчиняется закону самоподобия (скейлинга), вытекающим из ренормгруппового анализа Фейгенбаума [1].

Скейлинг иллюстрируется рядом рисунков [2, 3]. При этом каждый следующий рисунок представляет собой увеличенный в определенное число раз фрагмент предыдущего (рис. 1, а). Масштаб по оси  $X$  пересчитывается в  $\alpha_F = -2.5029079$  раз относительно точки экстремума  $X=0$ , а по оси управляющего параметра  $\lambda$  – в  $\delta_F = 4.6692016$  раз относительно критической точки  $\lambda_C = 1.4011552$ . Здесь  $\alpha_F$  и  $\delta_F$  – масштабные факторы, найденные Фейгенбаумом [1]. При преобразовании подобия необходимо переворачивать каждый последующий

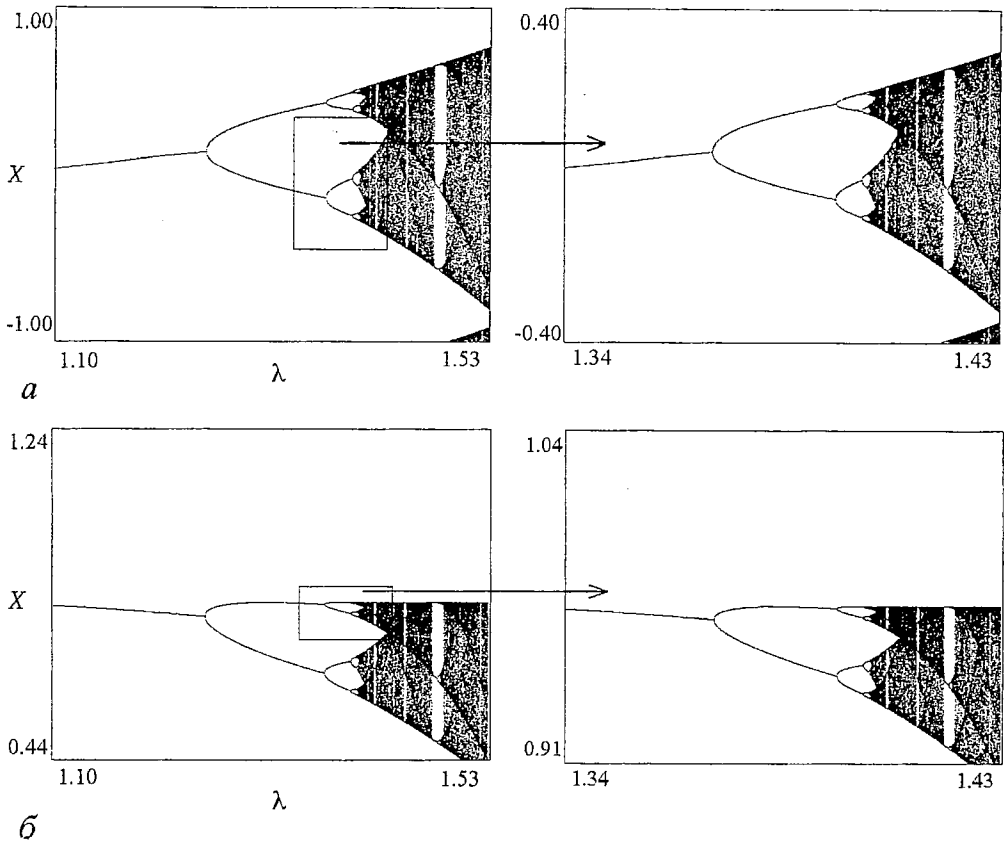


Рис. 1. Скейлинг на бифуркационном дереве логистического отображения: *а* – в окрестности экстремума  $X=0$ , *б* – в наиболее удаленной от экстремума точке  $X=1$

увеличенный фрагмент относительно горизонтальной оси, поскольку константа  $\alpha_F$  отрицательна (см. рис. 1, *а*). В результате реализации такой процедуры можно наблюдать сохранение структуры дерева на самых глубоких уровнях иерархии, причем степень соответствия картинок с ростом номера уровня возрастает.

Для дальнейшего важно, что аналогичные иллюстрации скейлинга можно получить также для наиболее удаленной от экстремума точки  $X=1$  (рис. 1, *б*). В этом случае масштаб по оси  $X$  необходимо пересчитать в  $\alpha_F^2$  раз относительно точки  $X=1$ , а по оси управляющего параметра  $\lambda$  – по-прежнему в  $\delta_F$  раз относительно критической точки  $\lambda_C$ . Поскольку величина  $\alpha_F^2$  положительна, то ориентация картинок при переходе от уровня к уровню не меняется.

В реальных системах, однако, всегда присутствует шум. Чтобы количественно исследовать действие случайных возмущений, добавим в уравнение (1) дополнительное слагаемое

$$X_{n+1} = 1 - \lambda X_n^2 + \varepsilon \xi_n, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – амплитуда шума,  $\xi_n$  – случайная последовательность.

На рис. 2 показано бифуркационное дерево и его фрагмент в присутствии шума для  $\varepsilon=0.0005$ . Видно, что при переходе к более дальним уровням иерархии структура бифуркационного дерева за счет влияния шума размывается все сильнее, окна периодических режимов исчезают и скейлинг не наблюдается.

Для демонстрации самоподобия на бифуркационном дереве в присутствии шума используем результаты работы Кратчфилда с соавторами [4], в которой методом ренормгруппы показано, что при преобразовании подобия амплитуду шума необходимо пересчитывать по следующему правилу:

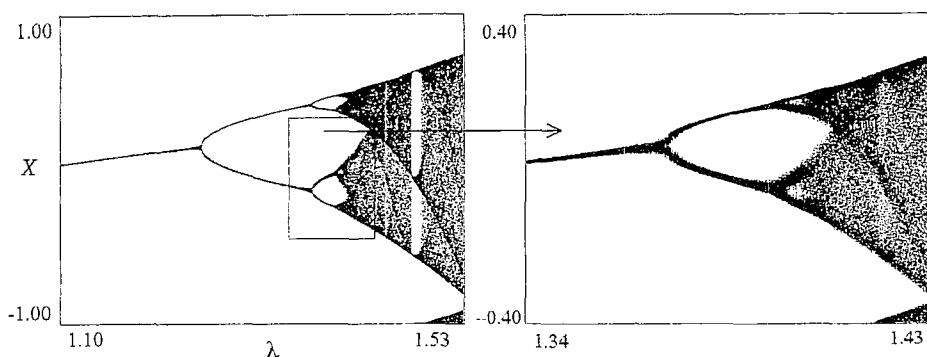


Рис. 2. Влияние шума на структуру бифуркационного дерева логистического отображения, (амплитуда шума  $\epsilon=0.0005$ )

$$\epsilon \rightarrow \epsilon/\mu_F, \quad (3)$$

где  $\mu_F=6.61903$  – некоторая новая универсальная константа для отображений с квадратичным экстремумом. Таким образом, амплитуду шума на бифуркационном дереве при переходе с уровня на уровень каждый раз надо уменьшать в  $\mu_F$  раз. Как оказалось, при этом скейлинг действительно наблюдается\* (рис. 3).

Свойство скейлинга можно, оказывается, использовать и для оценки константы  $\mu_F$ . В работе [5] Аргул с соавторами предложили подбирать ее величину «экспериментально» при компьютерном моделировании так, чтобы несколько различных уровней дерева визуально совпали. Этим методом ими была «проверена» константа Кратчфилда  $\mu_F=6.61903$ , а также сделаны оценки для аналогичных констант в случае унимодального отображения вида

$$X_{n+1} = 1 - \lambda X_n^p + \epsilon \xi_n \quad (4)$$

для  $p=4,6,8\dots$

В настоящей работе мы предлагаем метод определения семейства констант  $\mu$  существенно более точный, чем оценка, данная в [5]. Этот метод имеет еще то преимущество, что допускает обобщение на двумерный случай. Кроме того, покажем, как для  $p=4$  в отсутствие и в присутствии шума проиллюстрировать свойство скейлинга на бифуркационных деревьях двухпараметрических отобра-

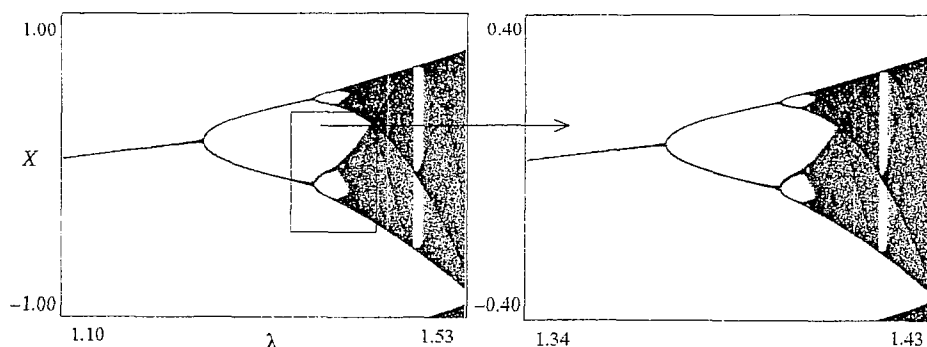


Рис. 3. Скейлинг на бифуркационном дереве логистического отображения в присутствии шума, (амплитуда шума  $\epsilon=0.0005$ )

\* В качестве шума использована случайная последовательность, генерируемая компьютером при использовании языка Паскаль. Выполнение скейлинга говорит о том, что этот выбор удачен.

жений. Иными словами, дадим иллюстрации скейлинга для критических ситуаций коразмерности два. В качестве системы, для которой характерны не только два параметра, но и два измерения, рассмотрим систему двух односторонне связанных логистических отображений. Для них реализуется так называемое бикритическое поведение, когда оба управляющих параметра проходят через пороговое значение возникновения хаоса в обеих подсистемах одновременно [6–10], то есть за порог хаоса выходят две «моды».

### Численный метод

Рассмотрим одномерное отображение общего вида под воздействием шума

$$X_{n+1} = f(X_n) + \varepsilon \xi_n. \quad (5)$$

Продифференцируем уравнение (5) по  $\varepsilon$

$$(X_{n+1})'_\varepsilon = f'_X(X_n)(X_n)'_\varepsilon + \xi_n,$$

возведем обе части полученного уравнения в квадрат

$$(X_{n+1})'^2_\varepsilon = f'^2_X(X_n)(X_n)'^2_\varepsilon + 2f'_X(X_n)(X_n)'_\varepsilon \xi_n + \xi_n^2 \quad (6)$$

и усредним последнее соотношение. При этом второе слагаемое становится равным нулю

$$\langle (X_{n+1})'^2_\varepsilon \rangle = f'^2_X(X_n) \langle (X_n)'^2_\varepsilon \rangle + \langle \xi_n^2 \rangle. \quad (7)$$

Введем уравнение для производной по управляющему параметру  $\lambda$

$$(X_{n+1})'_\lambda = f'_X(X_n)(X_n)'_\lambda \quad (8)$$

и найдем  $N$ -цикл и  $2N$ -цикл отображения  $X_{n+1} = f(X_n)$ . Тогда в соответствии с логикой ренормгруппового анализа можно получить все универсальные константы в виде следующих отношений при больших  $N$

$$\frac{X_N}{X_{2N}} \rightarrow \alpha, \quad \frac{(X_N)'_\lambda}{(X_{2N})'_\lambda} \rightarrow \frac{\delta}{\alpha}, \quad \frac{\langle (X_{2N})'^2_\varepsilon \rangle}{\langle (X_N)'^2_\varepsilon \rangle} \rightarrow \frac{\mu^2}{\alpha^2}. \quad (9)$$

Здесь  $X_N$  и  $X_{2N}$  – соответствующие элементы  $N$ - и  $2N$ -циклов.

Используем теперь в качестве одномерного «затравочного» отображения  $f(X) = 1 - \lambda X^p$ . Результаты расчетов представлены в таблице. Значения констант  $\alpha$  и  $\delta$

Таблица

Одномерный случай. Семейство унимодальных отображений					
$p$	$\lambda_c$	$\alpha$	$\delta$	$\mu$	
2	1.4011551891	-2.502907875	4.66920161	6.61903648	
4	1.5949013562	-1.690302971	7.28468622	8.2439	
6	1.6832601982	-1.467742450	9.29624683	10.0378	
8	1.7364523748	-1.358017279	10.9486243	11.5937	
Двумерный случай. Бикритическая динамика					
$\lambda$	$B$	$A_c$	$\alpha$	$\delta$	$\mu$
1.401155189	0.45	1.090094348	-1.50531816	2.39272443	2.7136

согласуются с ранее предсказанными методом ренормгруппы [1], что говорит об эффективности нашего численного метода, в частности, и с точки зрения определения констант шума  $\mu$ .

### Скейлинг двухпараметрических отображений

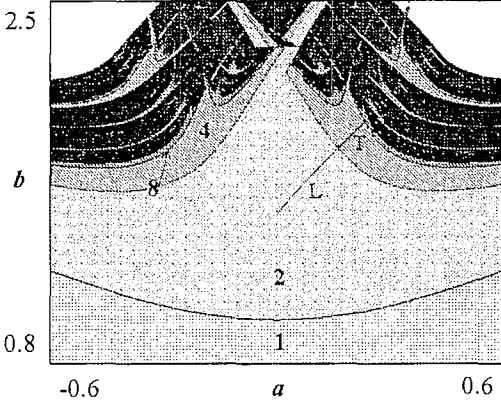


Рис. 4. Карта динамических режимов кубического отображения на плоскости параметров  $(a, b)$ . Цифрами на карте указаны области существования циклов различных периодов, L – линия отображения экстремума в экстремум, T – трикритическая точка

Имея эти результаты, можно дать иллюстрации скейлинга для ситуаций более высокой коразмерности, то есть характеризующихся большим числом существенных параметров.

Простейшей двухпараметрической системой с удвоениями периода является кубическое отображение

$$X_{n+1} = a - bX_n + X_n^3. \quad (10)$$

Его эталонный для нелинейной динамики характер связан с «грубым» свойством отображения – наличием двух экстремумов.

На рис. 4 показана карта динамических режимов кубического отображения (10), на которой оттенками серого цвета выделены области различных периодических режимов. Как видно из

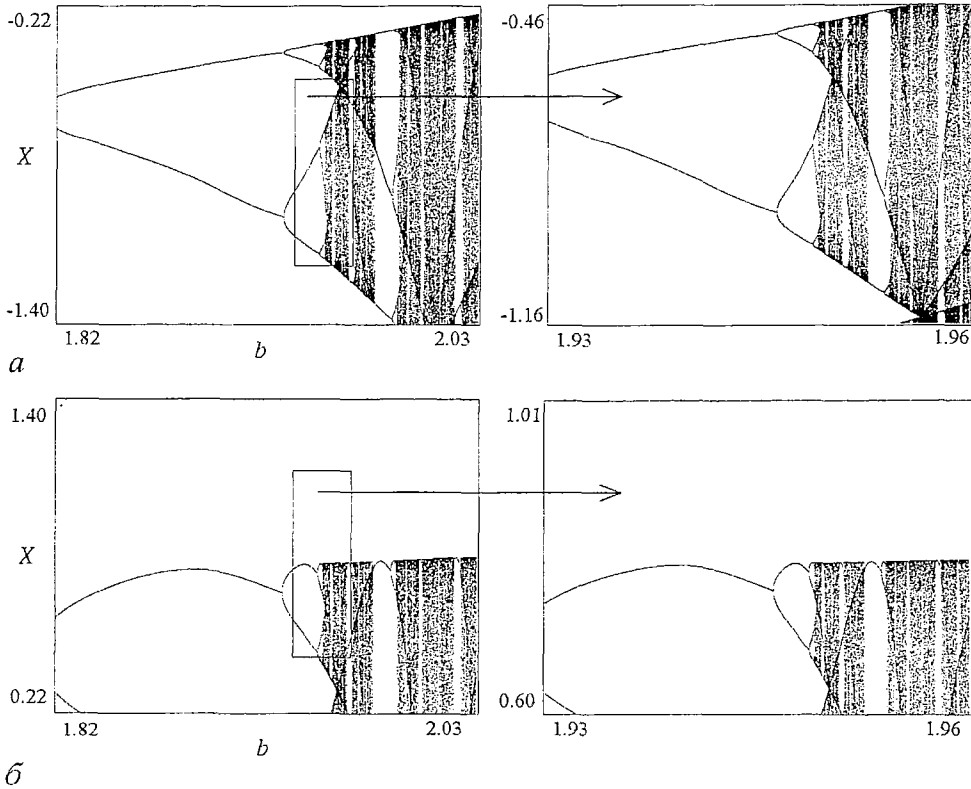


Рис. 5. Скейлинг на бифуркационном дереве кубического отображения при движении вдоль линии отображения экстремума в экстремум:  $a$  – относительно максимума  $(b_T, -(b_T/3)^{1/2})$ ;  $b$  – относительно минимума  $(b_T, (b_T/3)^{1/2})$

рисунка, при движении по «типичным» маршрутам на плоскости параметров мы пересекаем линии удвоенный периода, которые накапливаются к фейгенбаумовской критической линии, причем за последней наблюдается хаос. Фейгенбаумовский сценарий является однопараметрическим (параметр отсчитывается вдоль выбранного маршрута), то есть имеет коразмерность один.

Однако при движении вдоль линий, отвечающих условию отображения экстремума в экстремум, наблюдаются нефейгенбаумовские каскады, накапливающиеся к так называемой трикритической точке [11]. Скейлинговые свойства в ее окрестности отчасти могут быть изучены с помощью унимодального отображения (4) при  $p=4$ , так как при условии отображения экстремума в экстремум двукратно проитерированное кубическое отображение имеет экстремум четвертого порядка. Эти особенности типичны и общи для двухпараметрических отображений.

Для кубического отображения линию отображения экстремума в экстремум нетрудно найти аналитически

$$a = (b/3)^{1/2}(1 - 2b/3). \quad (11)$$

При таком дополнительном условии изначально двухпараметрическое отображение (10) становится однопараметрическим. Бифуркационное дерево для него подчиняется законам скейлинга относительно максимума и минимума исходного кубического отображения. Особенность скейлинга состоит в том, что в обоих случаях масштаб по оси параметра  $b$  пересчитывается в  $\delta_T=7.2846862$  раз относительно трикритической точки  $b_T=1.9513858$ , а по оси  $X$  пересчитывается в  $\alpha_T=-1.6903030$  раз относительно максимума и в  $\alpha_T^2$  раз относительно минимума (рис. 5).

Теперь, наконец, можно проиллюстрировать (рис. 6) скейлинг при наличии

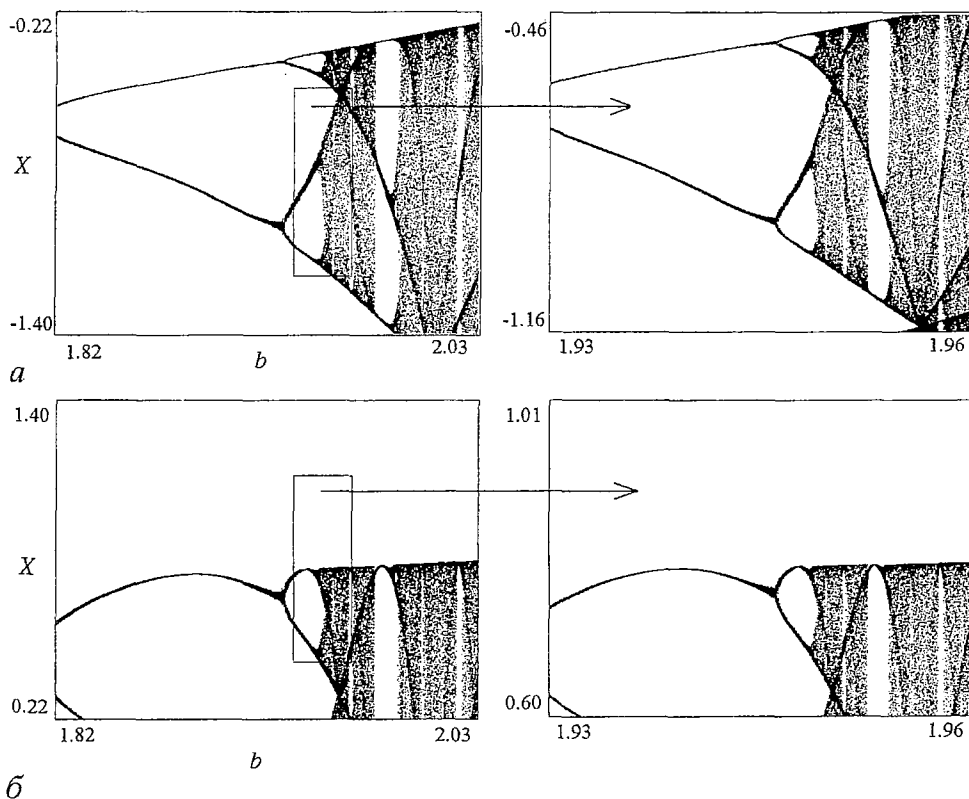


Рис. 6. Скейлинг на бифуркационном дереве кубического отображения под воздействием шума (амплитуда шума  $\epsilon=0.001$ ) при движении вдоль линии отображения экстремума в экстремум:  $a$  – относительно максимума,  $b$  – относительно минимума

шума вдоль линии (11) с ранее полученной константой  $\mu_T=8.2439$  из таблицы для  $p=4$ . Из рисунка видно, что свойство скейлинга выполняется – выделенные фрагменты совпадают. Это подтверждает наши расчеты величины  $\mu_T$ .

### Двумерные отображения

Если мы имеем двумерное отображение с шумом вида

$$X_{n+1} = f(X_n, Y_n), \quad (12)$$

$$Y_{n+1} = g(X_n, Y_n) + \varepsilon \xi_n,$$

то после дифференцирования по параметру  $\varepsilon$  и усреднения получаем

$$\langle (X_{n+1})'_\varepsilon \rangle = f_X(X_n, Y_n) \langle (X_n)'_\varepsilon \rangle + f_Y(X_n, Y_n) \langle (Y_n)'_\varepsilon \rangle, \quad (13)$$

$$\langle (Y_{n+1})'_\varepsilon \rangle = g_X(X_n, Y_n) \langle (X_n)'_\varepsilon \rangle + g_Y(X_n, Y_n) \langle (Y_n)'_\varepsilon \rangle + \langle \xi_n \rangle.$$

После возведения (13) в квадрат имеем (по-прежнему считая, что пары значений  $\{\xi_n, X_n\}$  и  $\{\xi_n, Y_n\}$  являются некоррелированными)

$$\langle (X_{n+1})'_\varepsilon{}^2 \rangle = \quad (14)$$

$$= f_X^2(X_n, Y_n) \langle (X_n)'_\varepsilon{}^2 \rangle + 2f_X(X_n, Y_n)f_Y(X_n, Y_n) \langle (X_n)'_\varepsilon \rangle \langle (Y_n)'_\varepsilon \rangle + f_Y^2(X_n, Y_n) \langle (Y_n)'_\varepsilon{}^2 \rangle \langle (Y_{n+1})'_\varepsilon{}^2 \rangle =$$

$$= g_X^2(X_n, Y_n) \langle (X_n)'_\varepsilon{}^2 \rangle + 2g_X(X_n, Y_n)g_Y(X_n, Y_n) \langle (X_n)'_\varepsilon \rangle \langle (Y_n)'_\varepsilon \rangle + g_Y^2(X_n, Y_n) \langle (Y_n)'_\varepsilon{}^2 \rangle + \langle \xi_n^2 \rangle.$$

Таким образом, теперь необходимо итерировать систему (12)–(14). Значения константы  $\mu$  ищем из условия

$$\frac{\langle (Y_{2N})'_\varepsilon{}^2 \rangle}{\langle (Y_N)'_\varepsilon{}^2 \rangle} \rightarrow \frac{\mu^2}{\alpha^2}, \quad (15)$$

где  $\alpha$  – соответствующий масштабный фактор, а  $N \rightarrow \infty$ .

В качестве иллюстрации действия метода последовательных итераций в случае двумерных отображений рассмотрим систему двух связанных логистических отображений с однонаправленной связью, демонстрирующую так называемое бикритическое поведение [6–10],

$$X_{n+1} = 1 - \lambda X_n^2, \quad (16)$$

$$Y_{n+1} = 1 - AY_n^2 - BX_n^2.$$

Бикритическая точка отвечает ситуации одновременного достижения порога хаоса по  $X$  и  $Y$ . Параметры  $B$ ,  $\lambda_C$  и  $A_C$  в бикритической точке приведены в последней строке таблицы. В численных расчетах по формуле (15) в качестве «затравочных» использованы функции  $f(X, Y) = 1 - \lambda X^2$  и  $g(X, Y) = 1 - AY^2 - BX^2$ , отвечающие отображению (16). Результаты расчетов константы  $\mu$  приведены в нижней строке таблицы. Также получаем хорошее соответствие по константам  $\alpha_B$  и  $\delta_B$  с известными результатами [6–10], что говорит и о точном предсказании константы шума  $\mu_B$ .

На рис.7 изображено бифуркационное дерево для бикритической ситуации,

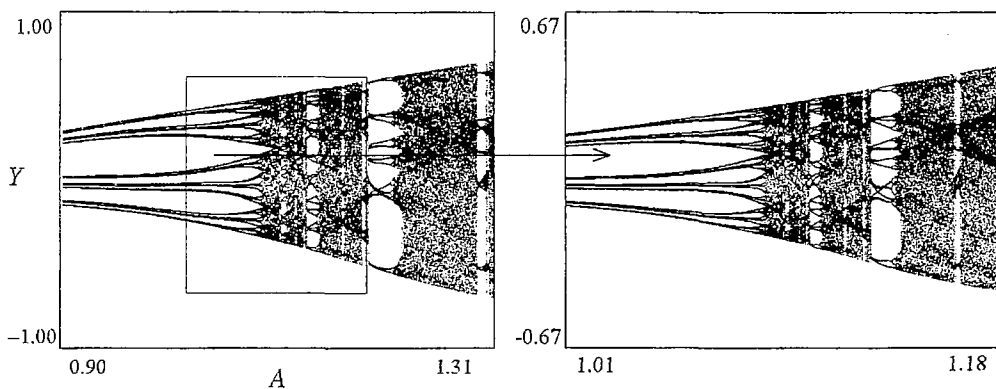


Рис. 7. Скейлинг на бифуркационном дереве системы связанных логистических отображений с однонаправленной связью (для иллюстрации свойства самоподобия на увеличенном фрагменте показан только каждый второй шаг во времени)

представляющее зависимость переменной  $Y$  на аттракторе от параметра  $A$ . Значение  $\lambda$  фиксировано и составляет 1.4011552. Фрагмент рисунка увеличен так, что масштаб по оси параметра  $A$  пересчитывается в  $\delta_B=2.3927244$  раз относительно точки  $A_C$ , а по оси  $Y$  пересчитывается в  $\alpha_B=-1.5053182$  раз относительно  $Y=0$ . Скейлинг на бифуркационном дереве отображения (11) в присутствии шума с найденной константой  $\mu_B=2.7136$  иллюстрирует рис. 8. Наблюдается хорошее совпадение всей картинке и ее увеличенного фрагмента.

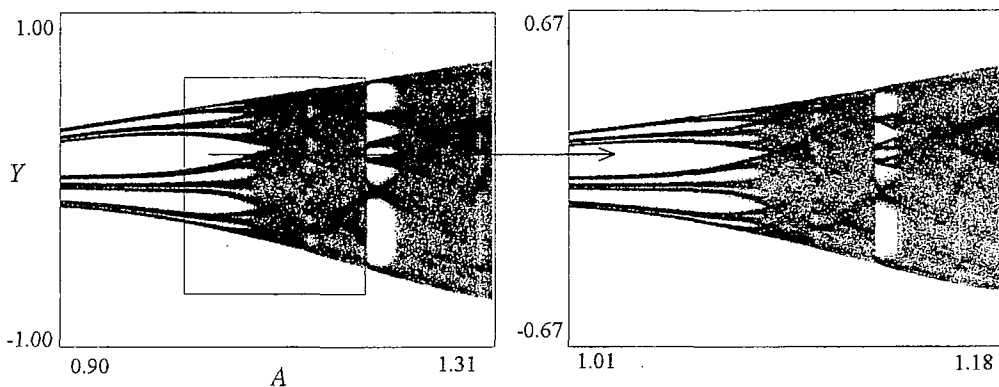


Рис. 8. Скейлинг на бифуркационном дереве системы связанных логистических отображений с однонаправленной связью под воздействием шума (амплитуда шума  $\varepsilon=0.0015$ )

### Заключение

Итак, представлено обобщение результатов работы Кратчфилда с соавторами [4] для систем с удвоениями периода под действием шума на случаи более высокой коразмерности. Это относится прежде всего к достаточно распространенному случаю бимодальных двухпараметрических отображений. Важную роль при этом играет семейство унимодальных отображений типа логистического, но с экстремумами более высокого порядка. Продемонстрирована также работоспособность метода для двумерных отображений на примере односторонне связанных логистических отображений в бикритической ситуации и даны соответствующие иллюстрации скейлинга.

Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову и И.Р. Сатаеву за плодотворное обсуждение работы и ценные замечания.

*Работа поддержана грантами РФФИ (№ 00-02-17509) и CRDF REC 006.*



## Библиографический список

1. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
2. *Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Sauge.* *Chaos & Fractals.* New Frontiers of Science. Springer-Verlag, 1992.
3. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика одномерных отображений // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1993. Т. 1, №1, №2. С. 15.
4. *Crutchfield J., Nauenberg M., Rudnick J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46. P. 933.
5. *Argoul F., Arneodo A., Collet P., Lesne A.* Transitions to chaos in the presence of an external periodic field: cross-over effect in the measure of critical exponents // *Europhys. Lett.* 1987. Vol. 3, № 6. P. 643.
6. *Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Новый тип критического поведения связанных систем при переходе к хаосу // *ДАН СССР.* 1986. Т. 287, № 3. С. 619.
7. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Bicritical dynamics of two-period doublings systems with unidirectional coupling // *J. Bifurc. & Chaos.* 1991. Vol. 1, № 4. P. 839.
8. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Variety of types of critical behavior and multistability in period doublings systems with unidirectional coupling near the onset of chaos // *J. Bifurc. & Chaos.* 1993. Vol. 3, № 1. P. 139.
9. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D.* 1997. Vol. 109. P. 91.
10. *Sang-Yoon Kim.* Bicritical behavior of period doublings in unidirectionally coupled maps // *Phys.Rev. E.* 1999. Vol. 59, № 6. P. 6585.
11. *Chang S.J., Wortis M., Wright J.A.* Iterative properties of a one-dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior // *Phys. Rev.* 1981. Vol. 24, № 5. P. 2669.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 26.06.2000  
после переработки 20.10.2000

## SCALING PROPERTIES AT TRANSITION TO CHAOS IN MODEL MAPS IN THE PRESENCE OF NOISE

*A.P. Kuznetsov, J.V. Kapustina*

Fundamental scaling properties of bifurcation tree in the absence and in the presence of noise for different maps which show transition to chaos through period-doubling cascade are considered. Numerical method of determination of noise constants for one-dimensional and two-dimensional maps is presented which allows to illustrate scaling properties of bifurcation tree under random noise influence.



*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Опубликовал более 50 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000), научный руководитель молодежного научного центра «Нелинейная динамика и сложные структуры» СО ИРЭ РАН и студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» СГУ и СО ИРЭ РАН. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и двух популярных книг.



*Капустина Юлия Викторовна* – родилась в 1979 году. Студентка 5-го курса факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается научной работой в студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Область научных интересов – воздействие шумов на динамические системы. Соросовская студентка (1999, 2000); Лауреат стипендии Администрации Саратова. Автор четырех публикаций. Принимала участие в двух международных конференциях.