



ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЦЕПЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ПОСТОЯННОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Ю.А. Брюханов

Исследованы колебания в рекурсивных цепях второго порядка с двумя видами нелинейности сумматора: с насыщением и с переполнением. Определена трехмерная область линейного режима. Показано, что цепь с нелинейностью с насыщением не искажает внешнее воздействие. Для нелинейности с переполнением установлена связь между периодом возникающих паразитных колебаний, параметрами цепи и величиной воздействия.

Цифровые цепи второго порядка могут использоваться в современных системах передачи информации для последетекторной обработки сигналов. На базе рекурсивных цепей второго порядка создаются фильтры нижних и верхних частот [1]. При этом внешнее воздействие зачастую имеет вид прямоугольного импульса. Информацию о реакции цепи в установившемся режиме на такой сигнал можно получить из отклика на постоянное воздействие. Анализ режимов в нелинейных рекурсивных цепях первого порядка выполнен в [2]. Исследуем ранее не рассматриваемую динамику цепи второго порядка с учетом нелинейности характеристики сумматора, полагая, что эффекты квантования отсутствуют.

Колебания в рассматриваемой цепи описываются разностным уравнением

$$x(n+2)=f[ax(n+1)+bx(n)+A], \quad (1)$$

где функция f описывает характеристику сумматора, a и b – параметры цепи, A – величина внешнего воздействия.

Линейный режим

Если функция f линейна, то решение уравнения (1) имеет вид

$$x(n)=(q_1-q_2)^{-1}\sum_{s=1}^2[(q_s-a)x(0)+x(1)+A/(q_s-1)]q_s^n(-1)^{s+1}+A/(1-a-b),$$

где $x(0)$, $x(1)$ – начальные условия, q_1 , q_2 – корни характеристического уравнения

$$q_{1,2}=[a\pm(a^2+4b)^{1/2}]/2.$$

Поскольку при выборе параметров цепи внутри треугольника устойчивости выполняются условия [3] $|q_1|<1$, $|q_2|<1$, то в установившемся режиме имеем

$$x(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = A/(1-a-b).$$

Полагая $|x| < 1$ (что характерно для использования арифметики с фиксированной запятой и чисел, выравненных слева [4]), из (1) получим условия линейного режима

$$-1 < A/(1-a-b) < 1. \quad (2)$$

Учтем, что в областях параметров $Q_1 = \{(a,b): a > 0, b < 0, -a+1 > b > -a^2/4\}$ (цепь является фильтром нижних частот) и $Q_2 = \{(a,b): a < 0, b < 0, a+1 > b > -a^2/4\}$ (цепь является фильтром верхних частот) имеем $(1-a-b) > 0$. Функция $A = \alpha(a,b)$ описывает трехмерную область линейного режима.

Из (2) следует, что при $|A| < 1$ в фильтре верхних частот при выполнении условия $f(\varphi) = \varphi$ для $|\varphi| < 1$ всегда существует линейный режим. Для объекта дальнейших исследований, фильтра нижних частот, область линейного режима *Oneg* – объемная (трехмерная) фигура – показана на рис. 1. В связи с симметрией характеристики сумматора здесь и ниже полагаем $A > 0$. Штриховкой обозначено основание фигуры.

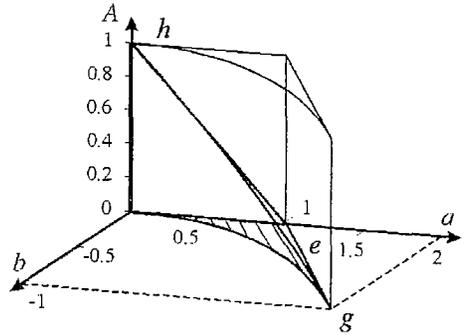


Рис. 1. Область линейного режима фильтра нижних частот

Сумматор с насыщением

Характеристика сумматора с насыщением описывается функцией [5]

$$f(\varphi) = \begin{cases} \varphi, & |\varphi| < 1 \\ \text{sign} \varphi, & |\varphi| \geq 1 \end{cases}$$

Для исследования нелинейных режимов воспользуемся методом фазовой плоскости, описанным в [5]. Согласно этому методу уравнение (1) сводится к эквивалентному ему отображению

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(n) \\ f(ay(n)+bx(n)+A) \end{pmatrix}$$

на плоскости (x,y) . Пары последовательных итераций $(x(n), y(n))$ отображения определяют точки траектории движения системы на фазовой плоскости (x,y) .

Учитывая вид нелинейности, фазовую плоскость разобьем на три области, характеризующиеся следующими уравнениями движения:

область D_{-1} –

$$x(n+2) = -1,$$

область D_0 –

$$x(n+2) = ax(n+1) + bx(n) + A, \quad (3)$$

область D_1 –

$$x(n+2) = 1.$$

Граница между областями D_{-1} и D_0 представляет собой прямую MN , описываемую уравнением

$$y = -(b/a)x - (1+A)/a, \quad (4)$$

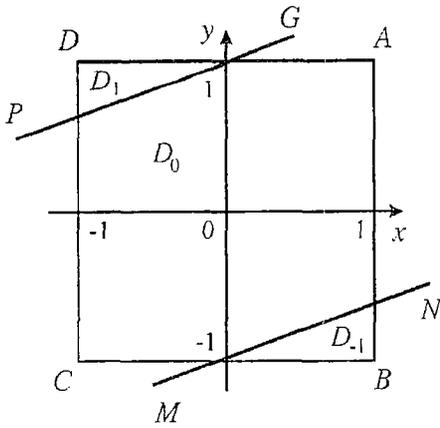


Рис. 2. Разбиение фазовой плоскости при $A=0$

а граница между D_0 и D_1 – прямую PG с уравнением

$$y = -(b/a)x + (1-A)/a. \quad (5)$$

Сами прямые MN и PG принадлежат областям D_{-1} и D_1 , соответственно. Разбиение фазовой плоскости для $A=0$, $a=1$, $b=-0.2$ показано на рис. 2. При $A \neq 0$ прямые MN и PG смещаются параллельные самим себе на величину A/a .

Заметим, что устойчивые режимы в области D_1 и D_{-1} возможны только в точках A и C , соответственно. Принадлежность точки A области D_1 или прямой PG означает

$$A \geq 1 - a - b, \quad (6)$$

что согласуется с условием (2).

Таким образом, в нелинейном режиме при выполнении условия (6) в системе существуют устойчивые колебания с периодом $T=1$.

Сумматор с переполнением

При использовании арифметики с фиксированной запятой, выравненных слева чисел, представлении отрицательных чисел в дополнительном коде характеристика сумматора выражается зависимостью

$$f(\varphi) = (\varphi + 1) \bmod 2 - 1.$$

Учитывая три соседние области характеристики сумматора (при этом $\varphi \in [-3; 3]$), как и ранее, плоскость состояний разобьем на три области. Однако их обозначения и соответствующие уравнения движения имеют следующий вид:

область D_{-2} –

$$x(n+2) = ax(n+1) + bx(n) + A - 2,$$

область D_0 совпадает с (3),

область D_{+2} –

$$x(n+2) = ax(n+1) + bx(n) + A + 2.$$

Уравнения прямых MN и PG по-прежнему имеют вид (4) и (5), соответственно, однако MN принадлежит области D_0 , а PG – области D_{-2} .

Экспериментально установлено, что при выборе параметров a , b и A вне области линейного режима в цепи возникают паразитные периодические колебания. Период T паразитных колебаний и правило движения (под правилом движения понимается последовательность областей D_u фазовой плоскости, посещаемых изображающей точкой) зависят от вышеуказанных параметров и не зависят от начальных условий.

Установим связь между величинами T , a , b и A . Возникающий периодический процесс описывается линейным разностным уравнением

$$y(n+2) = ay(n+1) + by(n) + A + u(n) \quad (7)$$

с начальными условиями $y(0)$, $y(1)$, где $y(1)$ зависит от того, из какой области стартует изображающая точка: если это область D_{-2} , то $y(1) = ay(0) + bx(0) + A - 2$. При этом функция $u(n)$ удовлетворяет уравнению $u(n+T) = u(n)$ с начальными

условиями $u(0), u(1), \dots, u(T-1)$, совпадающими со значениями индексов областей D_{ii} , посещаемых изображающей точкой согласно правилу движения, начиная с $n=1$, соответственно (они известны). Выполнив z -преобразование обеих частей последнего уравнения, получим изображение $U(z)$, оригиналом которого является функция

$$u(n) = \sum_{i=0}^{T-1} U_i z_i^n, \quad (8)$$

где

$$U_i = z_i^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} u(k) z_i^{-k} / \prod_{r=0, r \neq i}^{T-1} (z_i - z_r),$$

$$z_i = \exp(j2\pi i/T), \quad j = (-1)^{i/2}.$$

Подставив (8) в уравнение (7) и решив его, получим

$$y(n) = (q_1 - q_2)^{-1} \sum_{s=1}^2 [(q_s - a)y(0) + y(1) + A/(q_s - 1) +$$

$$+ q_s^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} u(k) q_s^{-k} / (q_a^T - 1)] q_s^n (-1)^{s+1} + A/(1 - a - b) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{T-1} z_m^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} u(k) z_m^{n-k} / [(z_m^2 - a z_m - b) \prod_{i=0, i \neq m}^{T-1} (z_m - z_i)].$$

В установившемся режиме имеем

$$y^*(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = A/(1 - a - b) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{T-1} z_m^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} u(k) z_m^{n-k} / [(z_m^2 - a z_m - b) \prod_{i=0, i \neq m}^{T-1} (z_m - z_i)]. \quad (9)$$

Таблица

Период T	Правило движения и изменение координаты $y^*(n)$
2	$\rightarrow D_{-2} \rightarrow D_0 \rightarrow$ $y^*(n) = (A-1)/(1-a-b) + (-1)^n / (1+a-b)$
3	$\rightarrow D_{-2} \rightarrow D_0 \rightarrow D_0 \rightarrow$ $y^*(n) = (3A-2)/[3(1-a-b)] - 4 \sin[\omega n - \alpha(\omega)] / (3^{1/2} B(\omega)),$ $\alpha(\omega) = \arg B(\omega),$ $B(\omega) = 1 + ja3^{1/2} - b \exp(j\omega) + b - \exp(-j\omega)$
4	$\rightarrow D_{-2} \rightarrow D_0 \rightarrow D_0 \rightarrow D_0$ $y^*(n) = (2A-1)/[2(1-a-b)] - C ^{-1} \sin[\pi n/2 - \beta] + (-1)^n / [2(1+a-b)],$ $C = 1 + ja + b,$ $\beta = \arg C$
5	$\rightarrow D_{-2} \rightarrow D_0 \rightarrow D_0 \rightarrow D_0 \rightarrow D_0$ $y^*(n) = A/(1-a-b) - \sum_{m=0}^4 2z_m^n / [z_m^2 - a z_m - b] \prod_{i=0, i \neq m}^4 (z_m - z_i),$ $z_m = \exp(j2\pi m/5)$

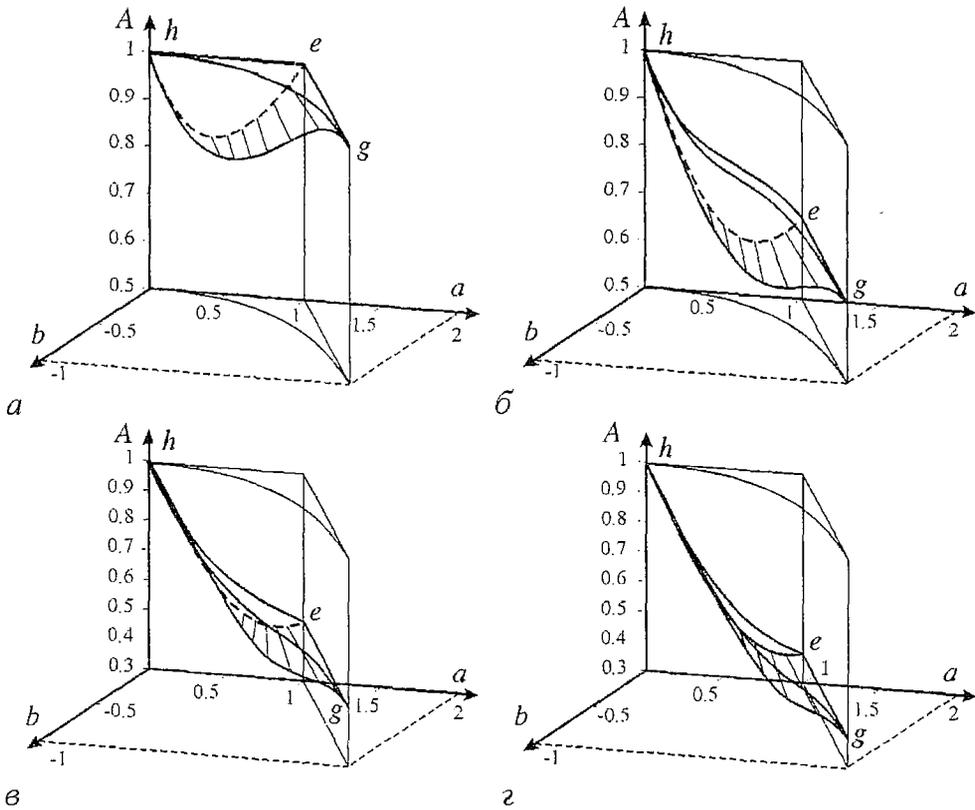


Рис. 3. Области паразитных колебаний с различными значениями периода T : а-2; б-3; в-4; г-5

Не менее важным и сложным является нахождение нижней и верхней поверхностей трехмерных областей $A=\alpha(a,b)$, соответствующих определенному периоду T . Экспериментально установлено, что при $a, b, T=\text{const}$ и изменении A перемещение инвариантных точек происходит в определенных направлениях. При приближении A к граничным значениям, соответствующим нижней и верхней поверхности, определенные инвариантные точки стремятся к сторонам DA или BC , показанным на рис. 2. Это обстоятельство и используется всякий раз для нахождения нужных поверхностей путем подстановки в (9) соответствующего значения n и наложения ограничения на $y^*(n)$ (это может быть величина 1 или -1).

Правила движения и выражения для $y(n)$ и периодов $T \in [2; 5]$ сведены в таблицу. Всюду нижняя поверхность находится из условия $y^*(1) \geq -1$, а верхняя (кроме $T=2$) – из условия $y^*(0) \leq 1$. В случае $T=2$ верхняя поверхность описывается функцией $A=\alpha(a, b)=1$. На рис. 3 изображены трехмерные области $A=\alpha(a, b)$ (они обозначены буквами heg) для тех же значений T . Штриховкой обозначены нижние поверхности этих областей.

Заключение

Исследованы колебания в рекурсивных цифровых цепях второго порядка с нелинейностью насыщения и с переполнением при постоянном внешнем воздействии. Определены трехмерные области существования линейного и нелинейного режимов. Показано, что цепь с нелинейностью насыщения не искажает внешнее воздействие, а в цепи с переполнением возникают паразитные периодические колебания. Установлена связь между периодом колебаний, параметрами цепи и величиной внешнего воздействия.

Результаты могут использоваться при разработке систем передачи информации с цифровой обработкой сигналов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-17939).

Библиографический список

1. Отнес Р.К., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982.
2. Брюханов Ю.А. Колебания в нелинейных рекурсивных цифровых цепях первого порядка при постоянном внешнем воздействии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 4. С.29.
3. Брюханов Ю.А. Свободные колебания в линейном цифровом осцилляторе // Радиотехника. 1996. № 5. С.46.
4. Каппелини В., Константинович А.Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.
5. Брюханов Ю.А. Переходные процессы в рекурсивной цифровой системе второго порядка с нелинейностью насыщения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т.6, №2. С.28.

Ярославский государственный
университет

Поступила в редакцию 24.02.2000
после переработки 19.12.2000

DYNAMICS OF NONLINEAR DIGITAL RECURSIVE SECOND-ORDER CIRCUITS UNDER CONSTANT EXTERNAL INFLUENCE

Yu.A. Bryuhanov

Oscillations in recursive second-order circuits with two kinds of adder nonlinearities (saturation and overflow) are investigated. Boundaries of linear regime have been obtained. It is shown that external influence is not distorted in the circuit with saturation nonlinearity. Relation between period of parasitic oscillations, circuit parameters and magnitude of external influence is determined.



Брюханов Юрий Александрович – родился в Красноярске (1941), окончил Красноярский политехнический институт (1967) и аспирантуру Воронежского государственного университета (1970). С 1971 года работает в Ярославском государственном университете, в настоящее время заведует кафедрой динамики электронных систем. Защитил кандидатскую диссертацию (1971) и докторскую диссертацию (1989) в области применения теории колебаний в задачах радиофизики и электроники. Область научных интересов – нелинейная динамика электронных систем дискретного времени. Автор монографии «Управление динамическим режимом колебательных систем» и более 180 статей. Заслуженный деятель науки РФ.