



ОСОБЕННОСТИ СЛОЖНОЙ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТНОМНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С КАТАСТРОФАМИ ТОМА

А.П. Кузнецов, А.Ю. Потапова

Проведен обзор работ, посвященных нелинейным осцилляторам. Предложена классификация осцилляторов по схеме теории катастроф, позволяющая описывать динамику различных осцилляторов с потенциальной функцией в виде полинома при помощи одного модельного уравнения. Для осцилляторов с убегающими на бесконечность решениями установлены области характерных режимов в пространстве параметров, проиллюстрированные бассейнами притяжений. Для осцилляторов с потенциалами в виде полинома n -й степени, где n – четное целое число больше двух, описана эволюция карт режимов, содержащих типичным образом определенные композиции бифуркаций crossroad area и spring area. Изучено влияние повышения степени нелинейности осциллятора на развитие бифуркаций и кризисов.

Введение

Мотивация изучения динамики нелинейных осцилляторов имеет, по крайней мере, три перечисленных ниже аспекта. Во-первых, нелинейный неавтономный осциллятор, хотя и является одной из простейших нелинейных систем, демонстрирует поразительное разнообразие интересных явлений, таких как регулярные и хаотические движения, чувствительная зависимость от начальных условий, сосуществующие аттракторы, регулярные и фрактальные границы бассейнов притяжения, локальные и глобальные бифуркации и другие. Во-вторых, на примере нелинейного осциллятора можно проследить весь путь развития представлений нелинейной динамики от порядка к хаосу. Уравнение нелинейного осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} + k\dot{x} + U'(x) = B\cos\omega t, \quad (1)$$

где $k = \text{const} > 0$ – коэффициент затухания, $U'(x)$ – нелинейная функция, являющаяся производной от потенциальной функции $U(x)$, а правая часть описывает гармоническое внешнее воздействие. В случае, когда $U(x) = x + x^3$, уравнение было впервые подробно исследовано Дуффингом [1] в 1918 году, который получил существенные результаты, относящиеся к его гармоническим решениям. Затем, по мере развития нелинейной динамики, пришло понимание возможности хаотических решений. Отметим здесь вклад таких отечественных авторов, как Андронов [2], Неймарк [3,4], Ланда [5], Баталова [6], Белюстина, Белых [7]. В-третьих, нелинейный осциллятор (1) описывает вынужденные колебания в огромном

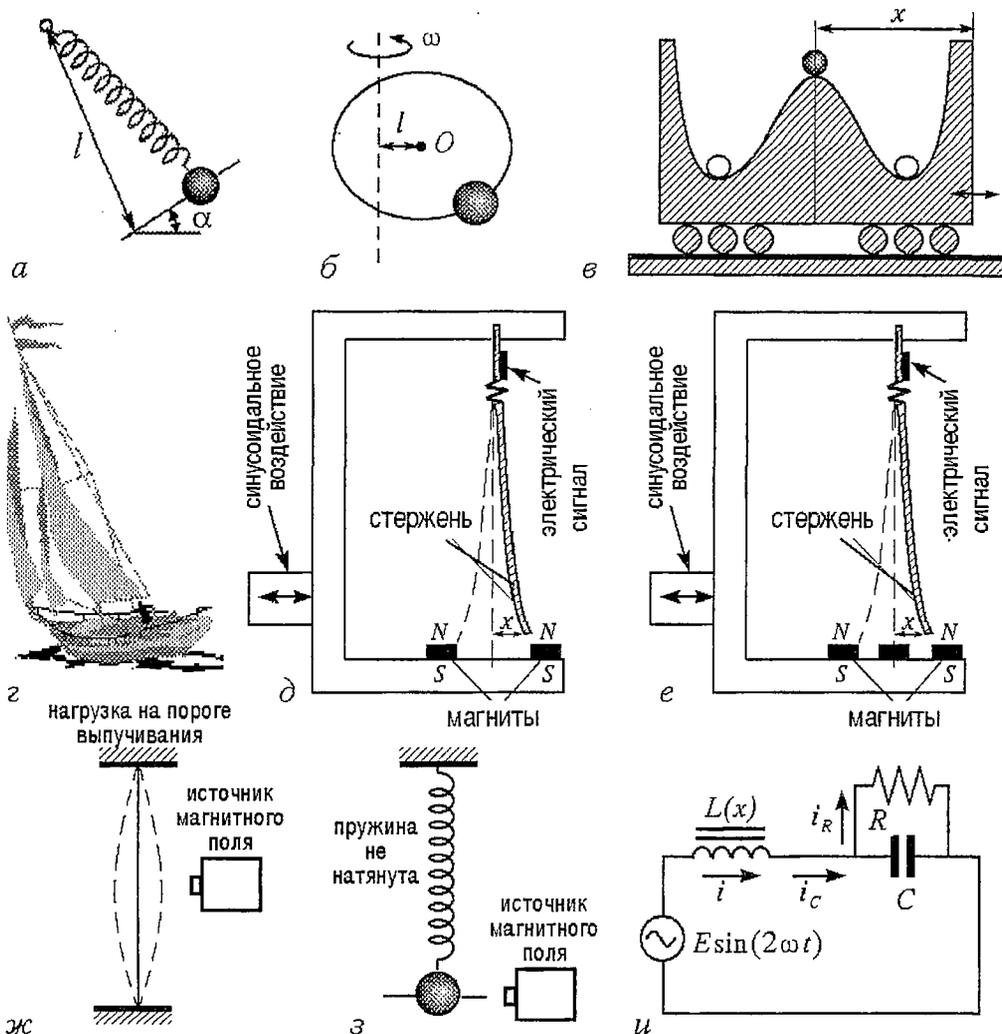


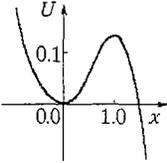
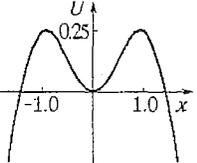
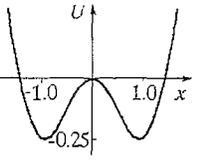
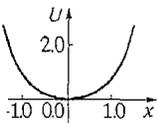
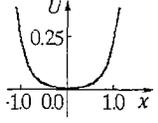
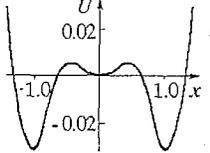
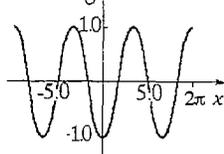
Рис. 1. Физические примеры нелинейных неавтономных осцилляторов: а – шарик на пружинке, скользящий вдоль наклонного стержня; б – скользящий шарик на вращающемся кольце; в – шарик в потенциальной яме; г – модель устойчивости кораблей; д – вибрирующий эластичный стержень в поле двух магнитов; е – вибрирующий эластичный стержень в поле трех магнитов; ж – нагруженная балка под действием источника магнитного поля; з – шарик на пружинке, скользящий вдоль стержня под действием магнитного поля; и – электрическая цепь с нелинейной индуктивностью под воздействием переменного напряжения

количестве реальных систем; некоторые из них изображены на рис. 1, указаны в табл. 1, исследованы в работах [23, 60–63].

Уравнение Дуффинга было изучено теоретически и экспериментально многими исследователями. Сделав обзор большого числа работ отечественных и зарубежных авторов, мы обнаружили, что, несмотря на их значительное количество, до сих пор нет единой точки зрения на все многообразие демонстрируемых явлений. Возникла необходимость некоего объединяющего подхода, позволяющего провести классификацию осцилляторов как по виду соответствующей потенциальной функции, так и по тем фундаментальным явлениям нелинейной динамики, которые наблюдаются. Поскольку динамика «эталонной» системы (1) зависит от формы потенциальной ямы, то удобно скомпоновать различные виды потенциальной функции, как это сделано в табл. 1, где для каждого случая приведены соответствующие физические примеры и литературные источники. Иерархия моделей, расположенных в порядке увеличения числа потенциальных ям, начинается с осциллятора с одной

Таблица 1

Примеры осцилляторов с различного вида потенциальной функцией

Потенциальная функция в уравнении осциллятора (1)	Примеры в литературе	
 $U(x) = x^2/2 - x^3/3$ <p>(2)</p>	<p>Томпсон [8–13], Солиман [14–19], Вирджин [20]</p>	<p>устойчивость кораблей в открытом море, боковые колебания сжатых осевых конструкций</p>
 $U(x) = x^2/2 - x^4/4$ <p>(3)</p>	<p>Као [21], Томпсон, Стюарт [22], см. также [23–29]</p>	<p>вблизи минимума динамика подобна маятнику и контакту Джозефсона</p>
 $U(x) = -x^2/2 + x^4/4$ <p>(4)</p>  $U(x) = x^2/2 + x^4/4$ <p>(5)</p>	<p>Гукенхеймер, Холмс [30], Холмс [31], Томпсон, Стюарт [22], Мун [33–37], Шемплинска–Ступничка [38], Петерсон [39], Инглиш [40], Парлицц [41]</p>	<p>вибрирующий эластичный стержень в поле двух магнитов, шарик в потенциальной яме, нагруженный на пороге выпучивания стержень, электрическая цепь с ферроэлектрической емкостью</p>
 $U(x) = x^4/4$ <p>(6)</p>	<p>Хаяси [42–46], Уэда [47–49], Мосекилле [50]</p>	<p>электрическая цепь с резистором и нелинейной индуктивностью</p>
 $U(x) = x_0^2 x^2/2 - (x_0^2 + 1)x^4/4 + x^6/6$ <p>(7)</p>	<p>Ли и Мун [51], Ли [52]</p>	<p>вибрирующий эластичный стержень в поле трех магнитов</p>
 $U(x) = -\cos(x)$ <p>(8)</p>	<p>Хуберман [53], Макдональд [54], а также [55–59]</p>	<p>контакт Джозефсона, маятник под действием внешней гармонической силы</p>

потенциальной ямой и одним «горбом», исследованного в работах [8–20] и описывающего динамику разнообразных систем, решение которых может «убежать» на бесконечность при некоторых значениях управляющих параметров.

Следующей из рассмотренных моделей является осциллятор с одной потенциальной ямой и двумя «горбами», изученный в [21–29]. Наиболее полно в таблице представлены осцилляторы дуффинговского типа с одной или двумя потенциальными ямами [30–50]. Из последней категории осцилляторов возникла следующая задача: исследование динамики осциллятора с тремя потенциальными ямами и двумя «горбами» [51, 52]. Наконец, завершает систему моделей осциллятор с бесконечным числом потенциальных ям [53–59].

В некоторых из рассмотренных работ была представлена классификация нелинейных осцилляторов по другим принципам. Томпсон и Стюарт [22] предлагают классификацию нелинейных осцилляторов с различным видом ангармонических потенциалов: с мягкой пружиной (3), (4), с жесткой пружиной (5), с бесконечным числом потенциальных ям (8) (см. табл. 1). Ими отмечены работы, в которых впервые были построены фазовые портреты, бифуркационные диаграммы на плоскости амплитуда – частота внешнего воздействия и была описана динамика указанных осцилляторов.

Много статей посвящено исследованию уравнения осциллятора

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = B_0 + B \cos \omega t, \quad (9)$$

находящегося под действием гармонической внешней силы с постоянной составляющей B_0 . Здесь α и β – некоторые константы, определяющие конфигурацию потенциала. Обзор некоторых статей дан в книге Неймарка и Ланды [3]. Авторы отметили работы, в которых были рассмотрены различные виды упругих характеристик: мягкая ($\alpha > 0, \beta < 0$) [23, 64–66], жесткая ($\alpha > 0, \beta > 0$) [67], с нулевой ($\alpha = 0, \beta > 0$) [68–71] и отрицательной ($\alpha < 0, \beta > 0$) [31, 36, 72, 73] линейной жесткостью.

Осциллятор Дуффинга (9) в случае $B_0 = 0$ рассмотрен в работе Као [21]. Автор выделяет в своей классификации три вида нелинейности в уравнении (9):

$$а. \alpha \geq 0, \beta > 0; \quad б. \alpha < 0, \beta > 0; \quad в. \alpha > 0, \beta < 0.$$

В случаях «а» и «б» потенциальная функция может принимать вид (5), (6) и (4) из табл. 1. Решения уравнений осциллятора глобально устойчивы и ограничены, поскольку $U(x) \rightarrow \infty$, как только $|x| \rightarrow \infty$. В случае «в» потенциальная функция может принимать вид (3) из табл. 1. Это другой случай потенциала с одной ямой, когда нет глобальной устойчивости решения, амплитуда увеличивается до бесконечности для некоторых начальных условий, поскольку $U(x) \rightarrow -\infty$, как только $|x| \rightarrow \infty$.

В настоящей работе предложен подход, состоящий в поэтапном усложнении вводимых в рассмотрение моделей осцилляторов. Рассматриваются многопараметрические семейства потенциалов, а классификационным принципом служит схема теории катастроф¹ [74, 75]. Согласно классификационной теореме Тома в типичном случае r -параметрическое семейство гладких функций $R^n \rightarrow R$ для всякого n и всех $r \leq 5$ структурно-устойчиво и эквивалентно вблизи любой точки одной из тринадцати классификационных форм. Нас будут интересовать элементарные катастрофы из табл. 2. Каждый случай, представленный в табл. 1, путем замены переменных можно привести к каноническому виду какой-либо элементарной катастрофы из табл. 2, причем коэффициенты a, b, c, d в соотношениях (10)–(13) окажутся какими-либо фиксированными числами. Таким образом, на каждом шаге изучения будет повышаться коразмерность катастрофы и, следовательно, увеличиваться число параметров системы, определяющих конфигурацию потенциала. Это позволяет нам проводить многопараметрический анализ динамики различных систем, начиная с одного параметра нелинейности в

¹ Мы здесь говорим о катастрофах, а не бифуркациях, поскольку речь идет о трансформациях потенциальной функции $U(x)$, оставляя термин «бифуркация» для качественного изменения динамики систем

Элементарные каспидные катастрофы Тома [74,75]

Тип катастрофы	коразмерность r	Потенциальная функция
Складка	1	$x^3 + ax$ (10)
Сборка	2	$\pm(x^4+ax^2+bx)$ (11)
Ласточкин хвост	3	$x^5+ax^3+bx^2+cx$ (12)
Бабочка	4	$\pm(x^6+ax^4+bx^3+cx^2+dx)$ (13)

осцилляторе с катастрофой складка и заканчивая четырьмя параметрами в осцилляторе с катастрофой бабочка.

Предложенная классификация позволяет конструировать новые виды потенциальной функции и ожидать для соответствующих осцилляторов такой же тип поведения, какой уже установлен в работе для данного класса потенциалов.

Одно из преимуществ предлагаемого плана исследования заключается, например, в том, что различные, с точки зрения классификации по числу потенциальных ям и ограниченности решений, модели осцилляторов с потенциалами (3)–(6) оказываются частными случаями одной модели: осциллятора с катастрофой сборка. Исследование динамики только осциллятора с катастрофой сборка в пространстве параметров позволяет описать поведение разных физических систем (рис. 1, $a-v, \delta$).

1. Динамика неавтономного нелинейного осциллятора с катастрофой складка

Сначала рассмотрим уравнение неавтономного осциллятора с катастрофой складка

$$\ddot{x} + k\dot{x} + a - x^2 = B\cos\omega t. \quad (14)$$

Эта катастрофа проявляется в том, что устойчивые и неустойчивые положения равновесия сливаются и исчезают при вариации параметра нелинейности a . Заметим, что, сделав в уравнении осциллятора с потенциалом (2) из табл. 1 замену переменной $x \rightarrow x+1/2$, получим уравнение (14), где параметр нелинейности $a=0.25$. Таким образом, известные результаты работ Томпсона и Солимана [13,19], относящиеся к вопросу устойчивости кораблей (рис. 1, z), отвечают, фактически, одной точке на оси параметра a . Распространим исследование на всю ось параметра нелинейности.

В системах, описываемых уравнением (14), решение с малой амплитудой в результате резонансного скачка может стать либо решением с большой амплитудой, либо может «убежать» на бесконечность. На рис. 2 показан бассейн притяжения аттрактора, где белым цветом отмечена область убегающих на бесконечность решений, черным – устойчивые решения с ограниченной амплитудой. При незначительном увеличении амплитуды воздействия происходит фрактализация границы бассейна за счет многочисленных вторжений

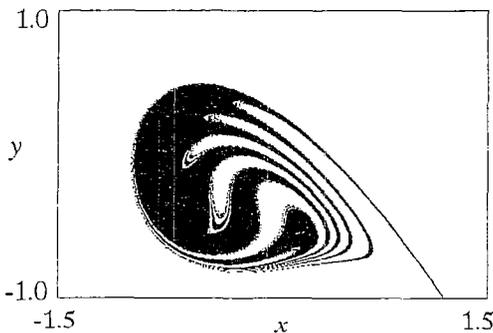


Рис. 2. Вторжение «фрактальных пальцев» бассейна убегающих на бесконечность решений в бассейн устойчивых решений при $a=0.2$
 $B=0.0725, k=0.1, \omega=0.85$

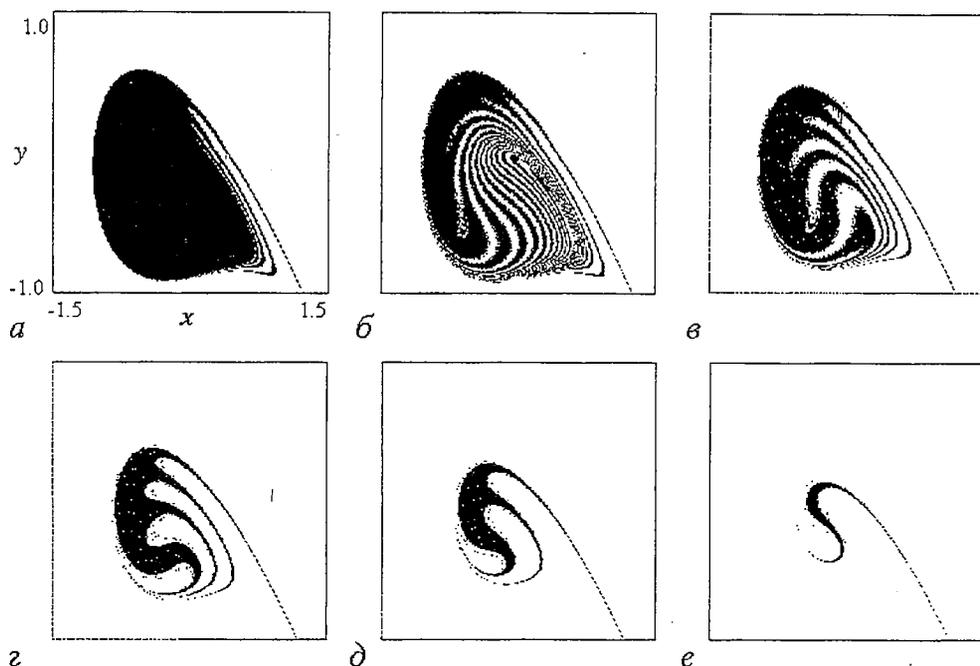


Рис. 3. Фрактализация границы бассейна притяжений устойчивых решений при $k=0.1$, $\omega=0.85$, $a=0.25$ с ростом амплитуды воздействия B : $a - 0.0725$, $б - 0.0750$; при $k=0.1$, $\omega=0.85$, $B=0.0725$ с уменьшением значения параметра нелинейности a : $в - 0.2$, $г - 0.15$, $д - 0.1$, $е - 0.05$

«белых фрактальных пальцев» бассейна убегающих решений в бассейн устойчивых решений (рис. 3, a , $б$). Это происходит в результате гетероклинических пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек [19]. С дальнейшим ростом амплитуды воздействия бассейн притяжения устойчивых решений исчезает полностью, все решения убегают на бесконечность.

Если теперь зафиксировать амплитуду воздействия B и менять параметр нелинейности a , то будет наблюдаться такое же нарушение целостности границы бассейна, приводящее к его исчезновению (рис. 3, $в-е$).

Для иллюстрации того, как это происходит, была построена серия карт динамических режимов. Изображенная на рис. 4 карта построена на плоскости параметров амплитуда B и частота воздействия ω . На карте светло-серым цветом отмечена область решений, убегающих на бесконечность, темно-серым цветом – устойчивые режимы периода один. Граница, разделяющая области убегающих и устойчивых решений, имеет фрактальный вид. Изменение этой границы при уменьшении параметра нелинейности проиллюстрировано на рис. 5, a , $б$. Хотя в целом структура карт режимов не меняется, однако уменьшение параметра нелинейности приводит к смещению границы в область низких значений амплитуды воздействия. Действительно, как показывают рис. 5, $в$, $г$, чем меньше значение параметра нелинейности, тем при меньших значениях амплитуды воздействия лежит граница области убегающих решений. Рис. 5, $в$, $г$ показывает фрактальную структуру границы и разбиение плоскости параметров на области характерных режимов. На картах точками отмечены значения параметров, соответствующие приведенным на рис. 3, $a-е$ бассейнам притяжений.

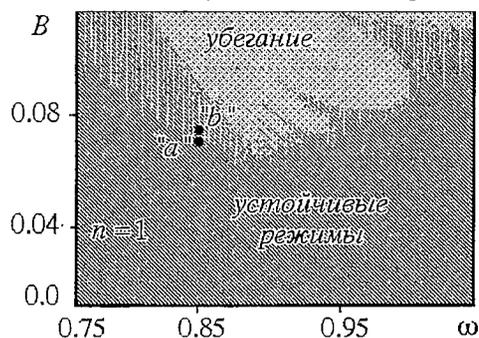


Рис. 4. Карта режимов осциллятора с катастрофой складки (14) при $a=0.25$, $k=0.1$, $x(0)=y(0)=0$. Карта аналогична построенной в [19].

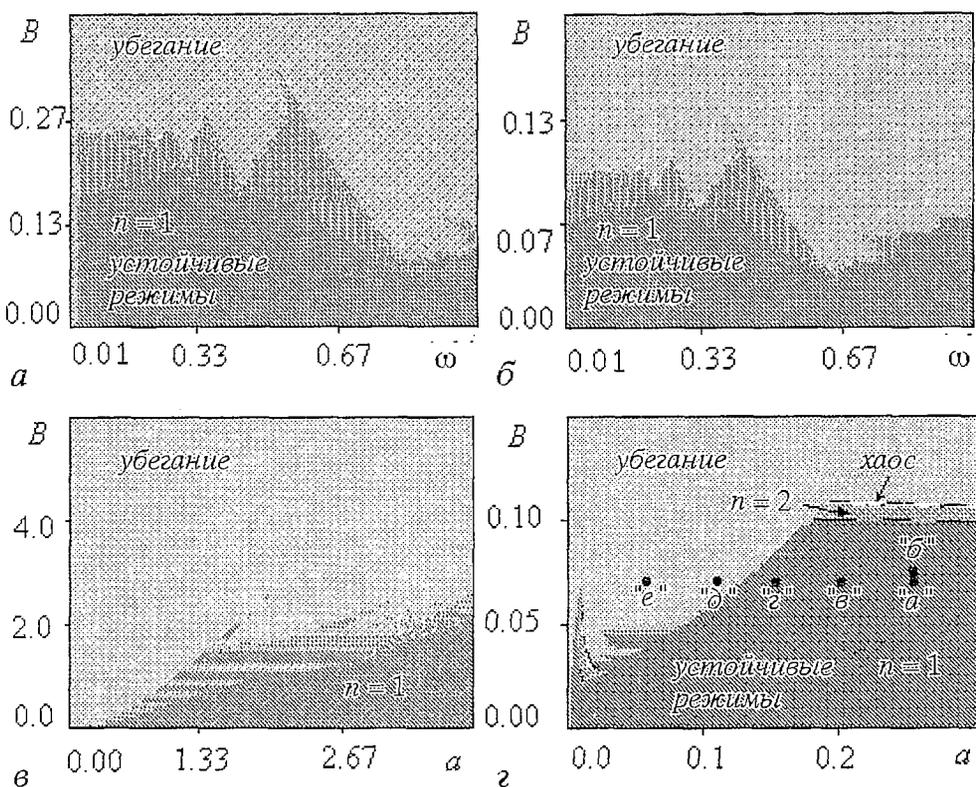


Рис. 5. Карты динамических режимов осциллятора с катастрофой складка (14) при $k=0.1$, $x(0)=y(0)=0$: на плоскости (амплитуда воздействия, частота воздействия) для различных значений параметра нелинейности a – 0.25 (а), 0.1 (б); на плоскости (амплитуда воздействия, параметр нелинейности) для различных значений частоты воздействия ω : 1.0 (в), 0.85 (г)

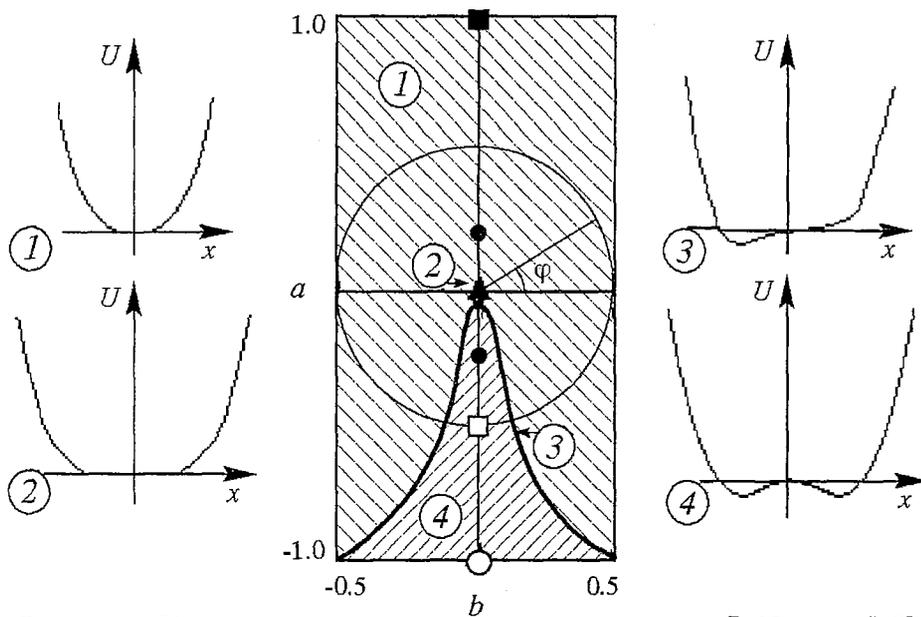
2. Динамика неавтономного нелинейного осциллятора с катастрофой сборки

Следуя схеме теории катастроф, рассмотрим далее динамику неавтономного осциллятора в окрестности катастрофы сборки

$$\ddot{x} + k\dot{x} + b + ax + x^3 = V\cos\omega t. \quad (15)$$

Различные примеры осцилляторов приведены на рис. 1, а–в, д. На плоскости параметров (b, a) в начале координат располагается точка сборки с отходящими от нее линиями складок (рис. 6), которые отделяют область с бистабильным потенциалом. В ряде работ [22,38,40,41,48] было проведено фактически выборочное исследование динамики осциллятора в избранных точках плоскости параметров (b, a) , что иллюстрирует рис. 6. Проведем своего рода глобальное исследование сложных режимов осциллятора в окрестности точки сборки.

На рис. 7 представлено семейство бифуркационных деревьев, отвечающее обходу вокруг точки сборки на плоскости параметров (b, a) . Параметр семейства – амплитуда воздействия V . Рассмотрим бифуркационный сценарий, разыгрывающийся при таком движении по плоскости параметров. При малых амплитудах $V=0.05$ при значении угловой координаты $\varphi=3\pi/2$, отвечающем на плоскости параметров (b, a) области бистабильности, происходит бифуркация седло–узел. С увеличением амплитуды развивается последовательность таких бифуркаций. При $V=0.15$ возникает первая бифуркация удвоения периода. Начиная с $V>0.16$ через каскад бифуркаций удвоения периода развивается переход к хаосу, в



■ Парлиц [41]

○ Инглиш [40]

● Томпсон и Стюарт [22]

▲ Уэда [48]

□ Шемплинска - Ступничка [38]

Рис. 6. Линии складок и точка сборки для осциллятора с катастрофой сборки (15) на плоскости (b, a) . На плоскости параметров указаны точки, для которых были выполнены исследования отдельными авторами, и характерный вид потенциала $U(x)$ (11)

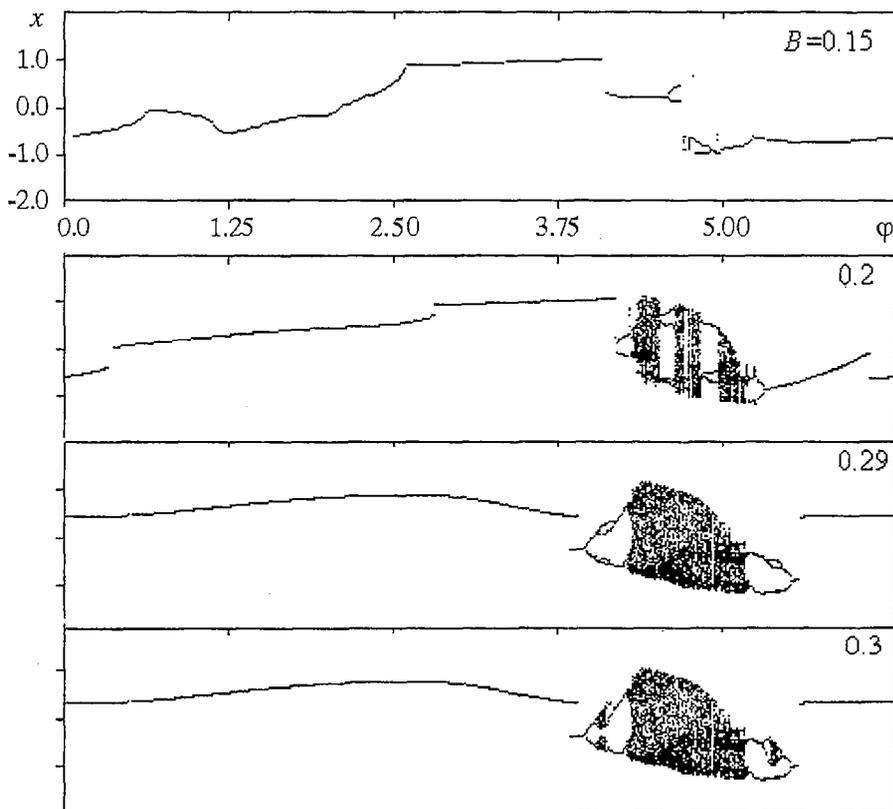


Рис. 7. Семейство бифуркационных деревьев для осциллятора с катастрофой сборки, отвечающих обходу плоскости параметров (b, a) по окружности радиуса $R=0.5$ при $k=0.2$, $\omega=1$, $x_0=3.1$, $y_0=3.1$, расположенных в порядке увеличения амплитуды воздействия B

котором содержатся многочисленные периодические окна. Если чуть увеличить параметр B , то большие окна периода четыре и три исчезнут, а на ветвях образуются петли. Это явление достаточно общее, получившее название *period bubbling*² [40,76]. Для $B=0.3$ в области *period bubbling* каждый аттрактор периода два

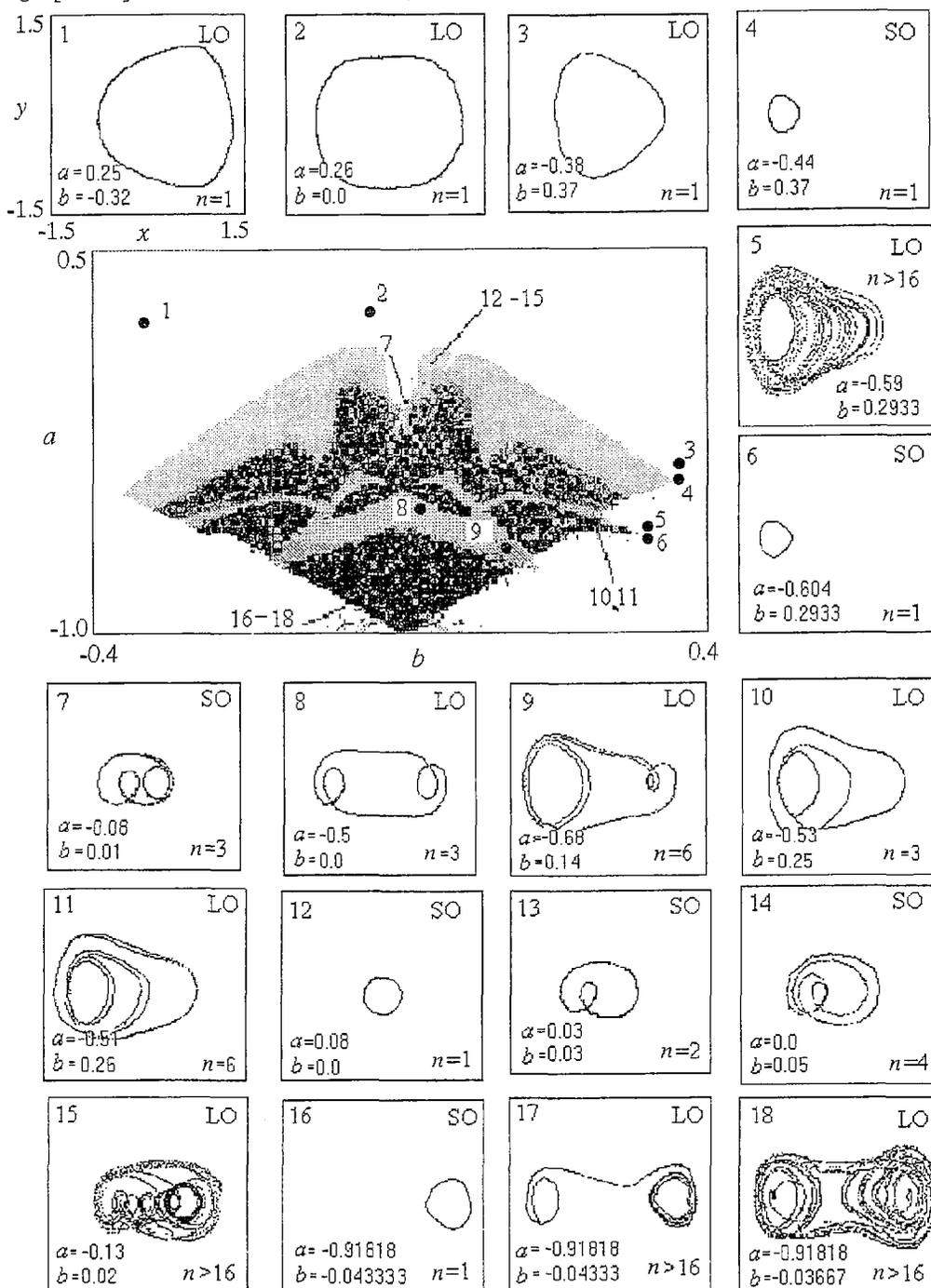


Рис. 8. Карта режимов осциллятора с катастрофой сборки (14) на плоскости параметров нелинейности (b, a) при $k=0.2, B=0.25, \omega=1$, проиллюстрированная портретами аттракторов

² Термин построен по аналогии с *period doubling* – удвоение периода; *bubbling* – пузырение. Он означает образование пузырей на бифуркационной диаграмме.

через каскад удвоений периода превращается в хаотический, а затем через обратный каскад удвоений аттрактор периода два восстанавливает себя.

Далее было выполнено исследование разбиения плоскости параметров нелинейности (b, a) при фиксированных значениях параметров $k=0.2, B=0.25$ на области характерных режимов с иллюстрацией этих режимов портретами аттракторов (рис. 8). Черным цветом на карте обозначен хаос, белым – решения периода один, различными оттенками серого – другие периодические режимы. В работе Шемплинска–Ступничка [38] показано, что система, изображенная на рис. 1, *в*, может совершать два типа колебаний: с маленькой амплитудой, то есть колебания вокруг одного из устойчивых положений равновесия, или с большой амплитудой, то есть колебания, охватывающие все три точки равновесия. Тогда можно разделить аттракторы по значению амплитуды соответственно на два класса: *SO* – *small orbit* или *LO* – *large orbit*. Мы выявили три способа перехода от *SO* к *LO* в различных точках плоскости (b, a) . Возможен либо жесткий переход от *SO* к периодическому (рис. 8.4, 8.3) или к хаотическому аттрактору *LO* (рис. 8.6, 8.5), либо установление хаотического аттрактора *LO* через каскад бифуркаций удвоения периода (рис. 8.12–8.15), либо установление хаотического аттрактора *LO* через метастабильное состояние (рис. 8.16–8.18).

На плоскости параметров встречаются типичным образом определенные композиции бифуркаций, которые ограничиваются областью устойчивости определенного цикла (рис. 9). Первая из них образована линиями удвоений и линиями жестких переходов, сходящимися в точке сборки. Такие композиции встречаются типичным образом при двухпараметрическом анализе дифференциальных уравнений, двумерных и одномерных отображений в работах Чанга и др. [77], Маккея и др. [78], Комуро и др. [79], Парлитца [41], Шевчика и др. [80], Рингланда и др. [81], Галласа и др. [82, 83]. Так, в частности, Шевчик и др. [80] указали на их появление для неавтономных диссипативных нелинейных осцилляторов, таких как система Тода, система Морса, мягкий симметричный осциллятор, осциллятор Дуффинга. Многие авторы, по-видимому, «переоткры-

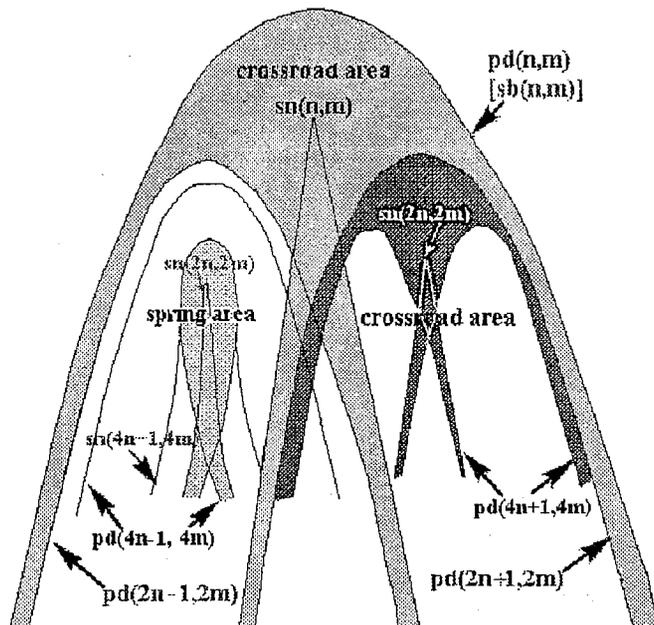


Рис. 9. Типичные конфигурации бифуркационных линий *crossroad area* и *spring area* на плоскости управляющих параметров. Показаны две конфигурации *crossroad area*, одна из которых на базе цикла удвоенного периода (справа). Слева показана конфигурация *spring area* на базе цикла удвоенного периода. Области устойчивости циклов выделены оттенком серого цвета. Линии бифуркации седло–узел обозначены буквами *sn*, линии бифуркации удвоения периода – буквами *pd*, линия бифуркации разрушения симметрии – *sb*; в скобках указаны соответствующие субгармоники n/m

вали» для себя эти типичные конфигурации, поэтому достаточно установившегося названия для них нет. Так, некоторые исследователи называют их ласточками, мы же, отдавая дань французскому математику К. Миру, подробно исследовавшему эти конфигурации и обосновавшему их типичность [84,85], будем называть их *crossroad area* (перекресток), причем сохраним английское наименование. Вторая композиция бифуркаций показана слева на рис. 9, она включает дополнительно линии жестких переходов через мультипликатор -1 и точки, в которых такие линии превращаются в линии удвоения. Вслед за Миром будем называть их *spring area* (область возникновения). На рис. 9, кроме схематической конфигурации этих объектов на плоскости управляющих параметров, приведено общее правило, по которому происходит удвоение субгармоник n/m [41]. (Это отношение показывает, что система совершает n собственных колебаний за m периодов внешнего воздействия.) В центре рисунка виден «клнов», образованный линиями бифуркации седло-узел (sn).

Исследуем эволюцию карт режимов на плоскости параметров нелинейности (b, a) с ростом амплитуды воздействия B (рис. 10). При малых $B=0.25$ на карте

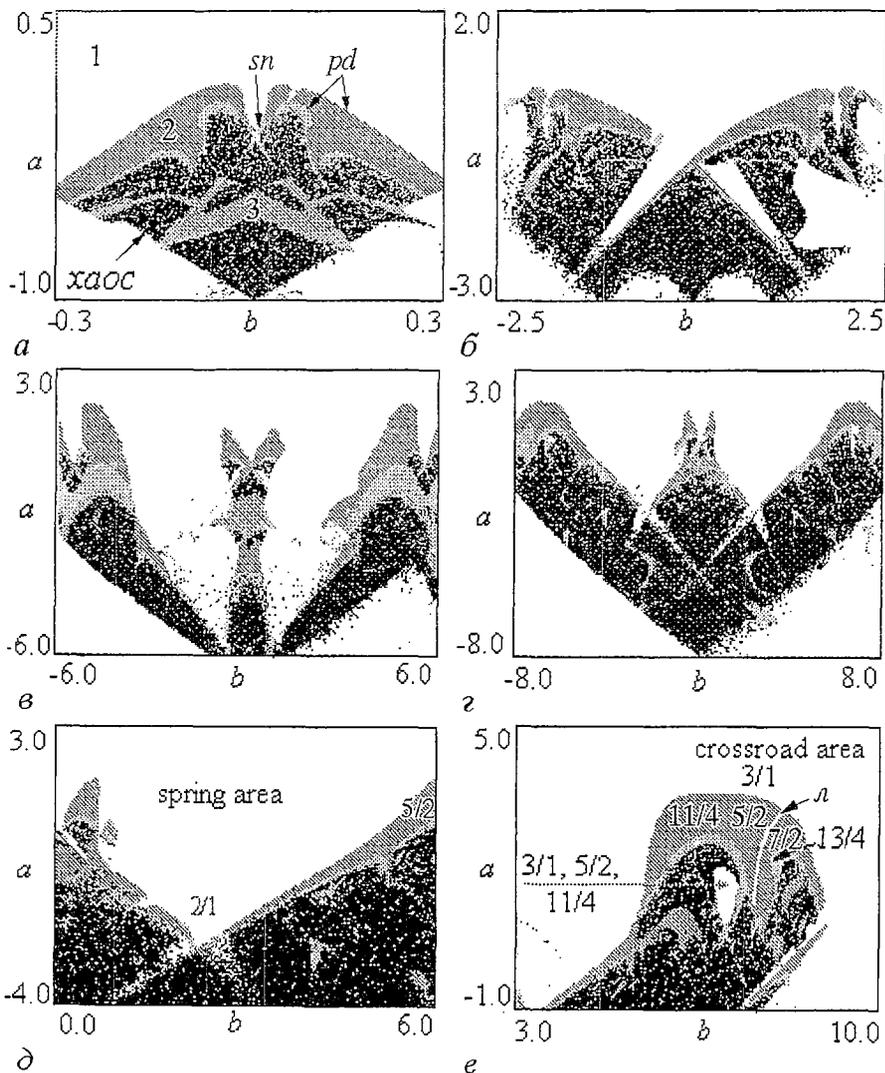


Рис. 10. Эволюция карт динамических режимов осциллятора с катастрофой сборки при $k=0.2$, $\omega=1$ с ростом амплитуды воздействия B : а – 0.25, *crossroad area*; б – 3.0, образование двух *crossroad area* и двух *spring area*; в – 6.0, три *crossroad area* и две *spring area*; г – 8.0, три *crossroad area* и две *spring area*; д – 8.0, *spring area*; е – 8.0, увеличивающаяся часть правой *crossroad area*. Буквой $л$ обозначена разделительная линия

режимов видны линии удвоения периода, окна периода три и *crossroad area* (рис. 10, а). Рост амплитуды воздействия B приводит к увеличению размера области сложной динамики. Конфигурация *crossroad area* увеличивается, исчезают периодические окна, а вдоль линий бифуркации седло–узел (рис. 10, б) образуются две *spring area*, между которыми начинает формироваться маленькая *crossroad area*. Кроме того, правая и левая части исходной конфигурации разделяются и образуют две новых *crossroad area*. Таким образом, при $B=6$ на карте режимов существуют две *spring area* и три *crossroad area* (рис. 10, в). (Правая конфигурация *spring area*, образованная линиями бифуркаций удвоения периода $2/1, 5/2$, показана на рис. 10, д). Дальнейшее увеличение амплитуды воздействия может привести к такому же разделению крайних композиций *crossroad area*. Внешние (ближайшие к краю карты) части *crossroad area* сужаются, а внутренние (ближайшие к центру карты) – увеличиваются (рис. 10, з). Увеличившаяся часть правой композиции *crossroad area* показана на рис. 10, е, где можно наблюдать удвоение субгармоник $3/1, 7/2, 13/4$ – справа, и $3/1, 5/2, 11/4$ – слева. На этом же рисунке слева видна маленькая *spring area*, образованная линиями бифуркаций удвоения субгармоник $3/1, 5/2, 11/4$, и белая пунктирная линия, вдоль которой будет происходить последующее разделение увеличившейся части и образование новой *crossroad area*.

3. Динамика неавтономного нелинейного осциллятора с катастрофой бабочка

Рассмотрим теперь осциллятор с потенциалом шестой степени

$$\ddot{x} + k\dot{x} + b + ax + x^5 = B\cos\omega t, \quad (16)$$

что отвечает одному из сечений катастрофы бабочка. Параметризация уравнения (16) была произведена по аналогии с уравнением (15), чтобы выяснить, как влияет повышение степени полинома потенциальной функции на динамику системы. В этом случае линии складок на плоскости параметров (b, a) сходятся в точке $a=0, b=0$ под более острым углом, чем для катастрофы сборки (рис. 11), что оказывает влияние на эволюцию карт режимов.

Первые два рисунка 12, а и 12, б повторяют описанную для осциллятора с катастрофой сборки динамику. Но повышение амплитуды до $B=6$ в этой системе приводит к тому, что в месте пересечения линий бифуркаций седло–узел двух соседних композиций *spring area* возникает новая *spring area* (рис. 12, в). (На рис. 12, д показана правая *spring area*). При $B=8$ (рис. 12, з) центральная конфигурация *crossroad area* разделяется на две *crossroad area*, причем их внутренние части увеличиваются, а внешние – сужаются, как и для двух крайних конфигураций *crossroad area*. На увеличившейся части крайней правой *crossroad area* различимы другие маленькие конфигурации и пунктирная линия, по которой будет происходить следующее разделение с образованием *crossroad area* (рис. 12, е).

Для дальнейшей иллюстрации влияния степени нелинейности на усложнение динамики рассмотрим осциллятор с нелинейностью седьмой степени

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^7 + ax + b = B\cos\omega t, \quad (17)$$

параметризация которого произведена по аналогии с уравнениями (15) и (16).

Как и в предыдущих двух случаях, после увеличения *crossroad area* (рис. 13, а)

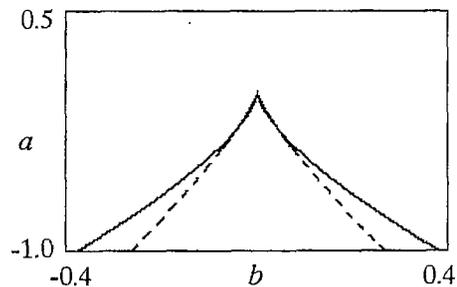


Рис. 11. Линии складки на плоскости параметров нелинейности для случая катастрофы сборки (сплошная линия), и для катастрофы бабочка (штриховая линия), задаваемые уравнениями $b=\pm 2(-a)^{3/2}/3^{3/2}$ и $b=\pm 2(-a)^{5/4}/5^{3/2}$, соответственно

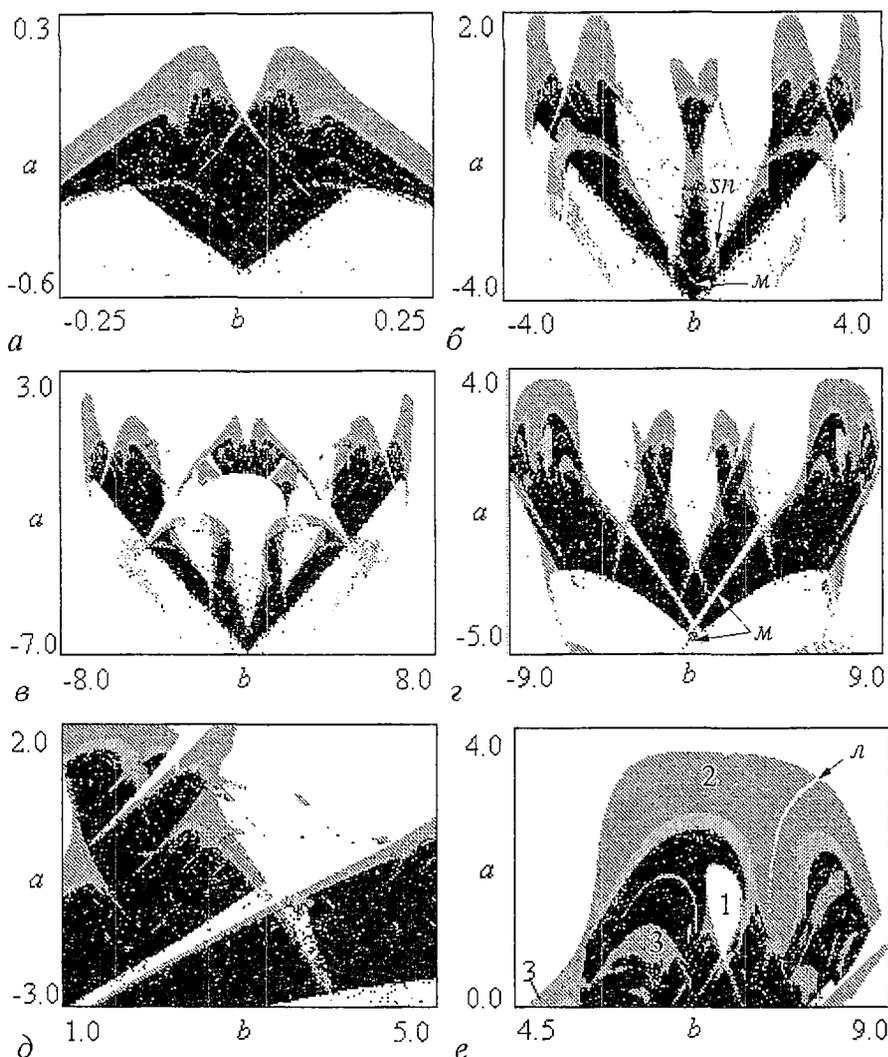


Рис. 12. Эволюция карт динамических режимов неавтономного осциллятора с катастрофой бабочка (16) при $k=0.2$, $\omega=1$ с ростом амплитуды воздействия B : a – 0.25, *crossroad area*; b – 3.0, три *crossroad area*, две *spring area*; c – 6.0, три *crossroad area*, три *spring area*; d – 8.0, четыре *crossroad area*, три *spring area*; e – 8.0, увеличившаяся часть правой *crossroad area*. Буквой m обозначено место пересечения линий бифуркации седло–узел sn , буквой l – разделительная линия

вдоль линий бифуркации седло–узел возникают две *spring area*, а между ними – *crossroad area*. Вместе с тем левая и правая части конфигурации *crossroad area* разделяются, образуя две *crossroad area* (рис. 13, б). Далее с ростом амплитуды в месте пересечения линий бифуркации седло–узел соседних *spring area* рождается новая *spring area* (рис. 13, в), которая включается в последующие трансформации. Там, где линии бифуркации седло–узел пересекаются с аналогичными линиями соседних *spring area*, формируются еще две *spring area*. Кроме того, центральная *crossroad area* разделяется, порождая две такие же композиции (рис. 13, г), а боковые *crossroad area* трансформируются так, что их внутренние части разделяются вдоль белой пунктирной линии (рис. 13, д) и образуют две новых конфигурации *crossroad area* (рис. 13, е), правая из которых показана на рис. 13, з. На рис. 13, ж показан фрагмент рис. 13,е, содержащий две *spring area* и две *crossroad area*.

Сравнив эволюцию карт режимов осцилляторов с нелинейностью третьей, пятой и седьмой степени (15)–(17), можно сделать вывод о некоторых общих

закономерностях развития карт режимов осцилляторов с потенциальной функцией в виде полинома n -й степени, где n – четное целое число больше двух. С ростом

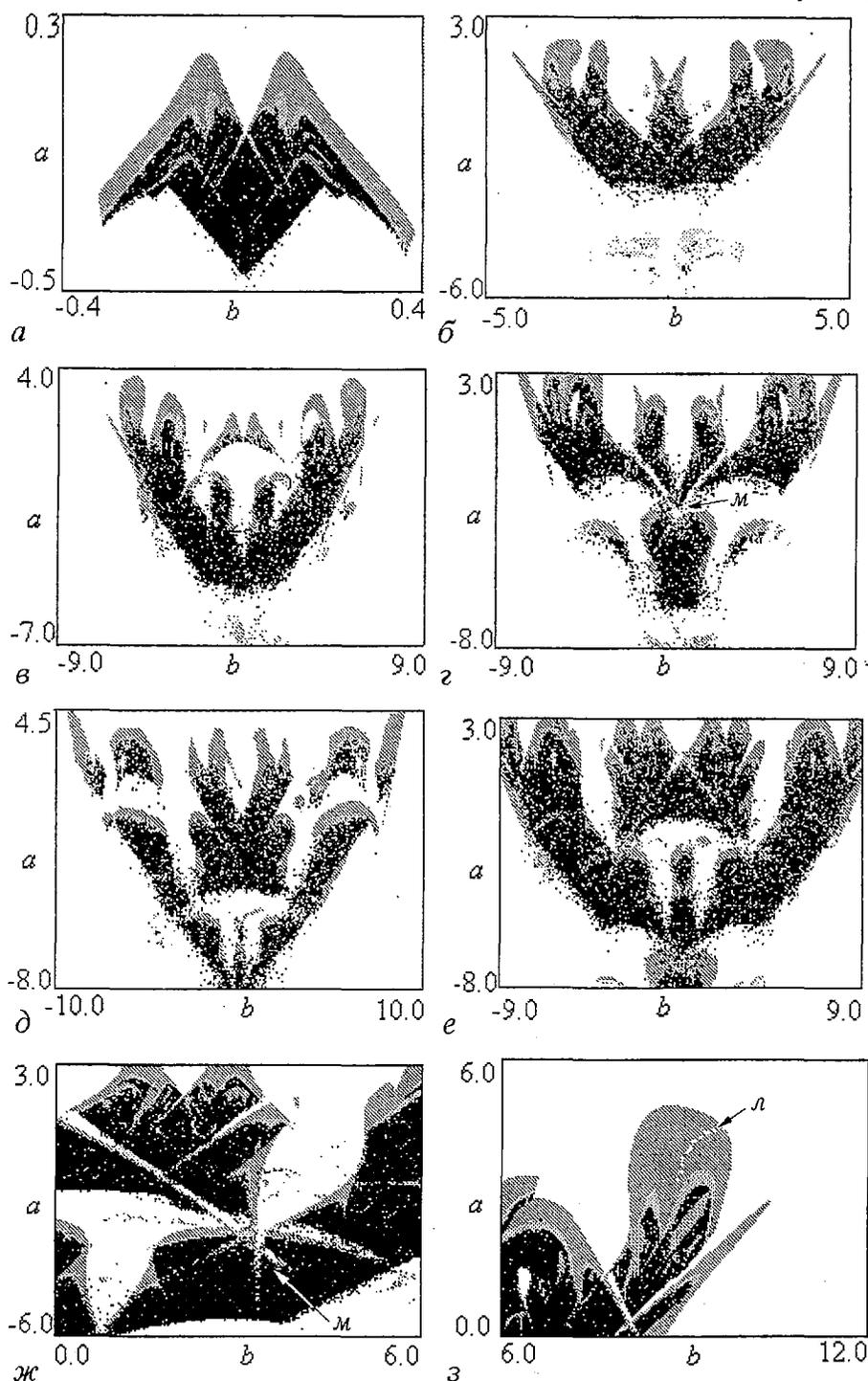


Рис. 13. Эволюция карт динамических режимов неавтономного осциллятора (17) при $k=0.2$, $\omega=1$ с ростом амплитуды воздействия B : а – 0.25, *crossroad area*; б – 3.0, по две *crossroad area* и *spring area*; в – 5.0, по три *crossroad area* и *spring area*; г – 6.0, две *crossroad area* и три *spring area*; д – 7.0, две *crossroad area* и пять *spring area*; е – 8.0, четыре *crossroad area* и пять *spring area*; ж – 8.0, две *spring area*; з – 8.0, увеличивающаяся часть правой *crossroad area*. Буквой *м* обозначено место пересечения линий бифуркации седло–узел zn , буквой *л* – разделительная линия

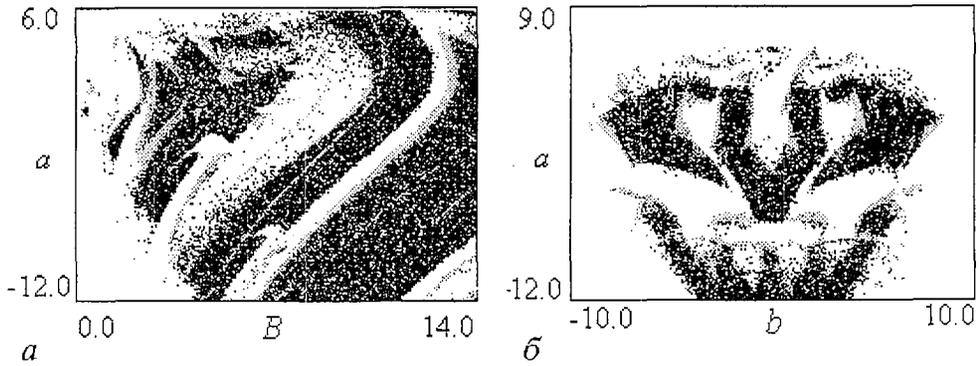


Рис. 14. Карта динамических режимов осциллятора с катастрофой бабочка при $k=0.2$, $\omega=1$, описываемого уравнением (18) (а) и уравнением (19) при $B=8.0$ (б)

амплитуды воздействия *crossroad area* увеличивается, ее правая и левая части разделяются, порождая две новые *crossroad area*, между которыми вдоль линий бифуркации седло–узел возникают две *spring area* и *crossroad area*. Далее в месте пересечения линий бифуркации седло–узел соседних *spring area* могут образовываться новые конфигурации *spring area*. Описанный выше сценарий образования новых композиций может повториться несколько раз с увеличением амплитуды воздействия, причем, все новые конфигурации подчиняются общему правилу удвоения периода субгармоник, представленному на рис. 9. Проведенное исследование показало, что повышение степени полинома потенциальной функции не меняет качественно эволюцию карт режимов. Однако описанный выше сценарий для осцилляторов с нелинейностью более высокой степени начинает развиваться при меньших значениях амплитуды внешнего воздействия и успевает повториться большее число раз на рассматриваемом диапазоне амплитуды, давая усложнение карт режимов.

В работе Ли и Муна [51] рассматривается система упругий стержень – три магнита с тремя устойчивыми положениями равновесия (см. рис. 1, е), динамика которой описывается уравнением осциллятора с потенциальной функцией (7) из табл. 1

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x(x^2 - x_0^2)(x^2 - 1) = B \cos \omega t, \quad (18)$$

где x_0 – отношение неустойчивого положения равновесия стержня к устойчивому. Обозначая $x_0^2 = a$, мы получаем частный случай осциллятора с катастрофой бабочка. Для него была построена карта режимов на плоскости параметров амплитуда воздействия B – параметр нелинейности a (рис. 14, а). На карте видны линии бифуркаций удвоения периода, переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Преобразуем уравнение (18) к виду

$$\ddot{x} + k\dot{x} + b + ax - (1+a)x^3 + x^5 = B \cos \omega t, \quad (19)$$

что соответствует в эксперименте наложению однородного внешнего поля «напряженности» b . Потенциальная функция для уравнения (19)

$$U(x) = bx + ax^2/2 - (a+1)x^4/4 + x^6/6 \quad (20)$$

имеет три потенциальные ямы и соответствует двухпараметрическому сечению катастрофы бабочка. Для такого уравнения также была построена карта режимов на плоскости параметров нелинейности b , a (рис. 14, б). При $B=8$ на карте появляются четыре конфигурации *spring area* внизу и три *spring area* сверху.

4. Динамика неавтономного нелинейного осциллятора непосредственно в точках катастроф

В рамках подхода теории катастроф естественным образом возникает задача

исследования $U(x) \sim x^n$ для целых $n \neq 2$. Такие осцилляторы отвечают точно точкам катастроф сборки, бабочка и так далее. Форма потенциальной функции для них существенно более пологая, чем для традиционного осциллятора с $U(x) \sim x^2$, причем стенки потенциальной ямы становятся все более крутыми с ростом n . Такие осцилляторы в автономном режиме являются неизохронными: даже для малых колебаний период зависит от их амплитуды, обращаясь в бесконечность при стремлении амплитуды к нулю.

Сначала рассмотрим динамику осциллятора точно в точке катастрофы сборки. Любопытно, что это есть система Уэды [86], определяемая уравнением вида

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B \cos \omega t. \quad (21)$$

Примерами такого осциллятора служат системы, представленные на рис. 1, $ж-и$, при выборе параметров, отвечающих тому, что система находится на пороге катастрофы. Так для балки на рис. 1, $ж$ нагрузка такова, что балка находится на пороге выпучивания; для системы на рис. 1, $з$ – пружина не натянута, а стержень горизонтален и т. д.

Будем далее проводить однопараметрический анализ динамики системы, фиксируя коэффициент диссипации k и рассматривая разные диапазоны амплитуды внешнего воздействия B . Бифуркационная диаграмма (рис. 15) для $k=0.2$ была построена с использованием двух указанных начальных условий с целью выявления сосуществующих аттракторов. Рассмотрим динамику системы при вариации амплитуды воздействия B . С ростом параметра B два симметричных решения периода один b_1, b_2 разной амплитуды в результате бифуркации седло–узел трансформируются в симметричный аттрактор f периода один³. Он через бифуркацию вилки теряет устойчивость и превращается в два асимметричных аттрактора h_3, h_4 периода один. Эти решения затем трансформируются в аттракторы i_1, i_2 , которые, удваивая период, становятся аттракторами j_1, j_2 , а те, в свою очередь, удваивая период, через каскад бифуркаций удвоений превращаются в хаотический аттрактор k . С дальнейшим ростом амплитуды воздействия последний сменяется парой сосуществующих аттракторов, один из которых – хаотический l_1 , а другой – аттрактор периода три l_2 . При $B \approx 9$ в хаотическом режиме появляется окно периода три, исчезающее при $B \approx 11$, когда аттрактор n периода три сменяется хаотическим аттрактором k . Последний уступает место хаотическому аттрактору o_1 и аттрактору o_2 периода один. После выхода из хаотической области устанавливается аттрактор p периода один. С ростом параметра B он через бифуркацию седло–узел превращается в аттракторы r_1 и r_2 разной амплитуды. А те в свою очередь, проходя через бифуркацию седло–узел, трансформируются в аттрактор s периода один. Этот аттрактор через бифуркацию вилки теряет устойчивость и порождает два асимметричных аттрактора u_1, u_2 того же периода.

Зафиксировав $k=0.3$, построим бифуркационное дерево в диапазоне значений параметра B от 32 до 57. Рис. 16 представляет нам многочисленные внезапные качественные изменения в хаотической динамике системе с ростом амплитуды воздействия, отраженные на фазовых портретах. Эти явления происходят при таких значениях параметров, при которых аттрактор сталкивается с неустойчивой седловой орбитой, и называются кризисами аттракторов [50].

Под кризисами вслед за Гребоджи [87,88] и Оттом [89] мы понимаем качественные изменения аттракторов, которые связаны с внезапными и сильными изменениями их бассейнов притяжения. Мы будем употреблять этот термин исключительно для трансформаций хаотических аттракторов, оставляя для периодических аттракторов термин бифуркация.

Начиная с $B=32$ имеется два асимметричных аттрактора периода один,

³ Обозначение разных аттракторов буквами английского алфавита от a до u введено Уэдой в [48].

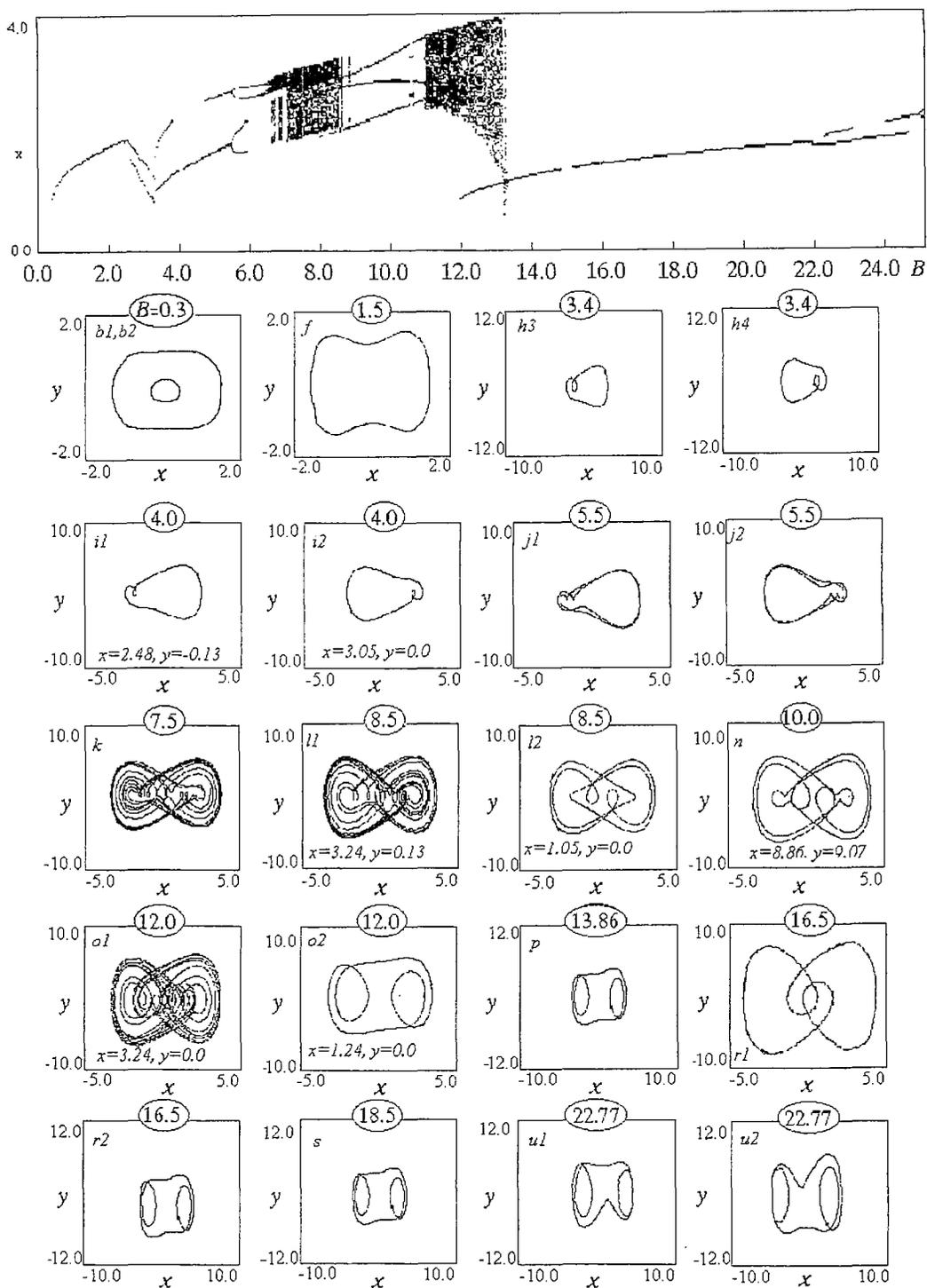


Рис. 15. Бифуркационное дерево и аттракторы системы Уэды (21) при $k=0.2, \omega=1$, построенные с использованием двух разных начальных условий $x_1=3.1, y_1=0.0, x_2=0.4, y_2=0.0$ для наблюдения сосуществующих аттракторов

возникших в результате бифуркации вилки. Повышение амплитуды воздействия приводит к тому, что каждый из них проходит через каскад удвоений периода к хаотическому аттрактору при $B=36.4$ (рис. 16, а). В районе $B \approx 37$ происходит

столкновение каждого хаотического аттрактора с неустойчивым решением периода один, полученным в результате бифуркации вилка. В результате столкновения два асимметричных хаотических аттрактора сливаются в один симметричный, то есть происходит внутренний кризис (рис. 16, б). Далее, при $B \approx 40$ через бифуркацию седло-узел рождается пара устойчивого и неустойчивого решений периода три, которые сосуществуют с хаотическим аттрактором вплоть до $B \approx 41$, где происходит граничный кризис: сталкиваются хаотический аттрактор и седловая орбита периода три (рис. 16, в). Вследствие этого остается лишь

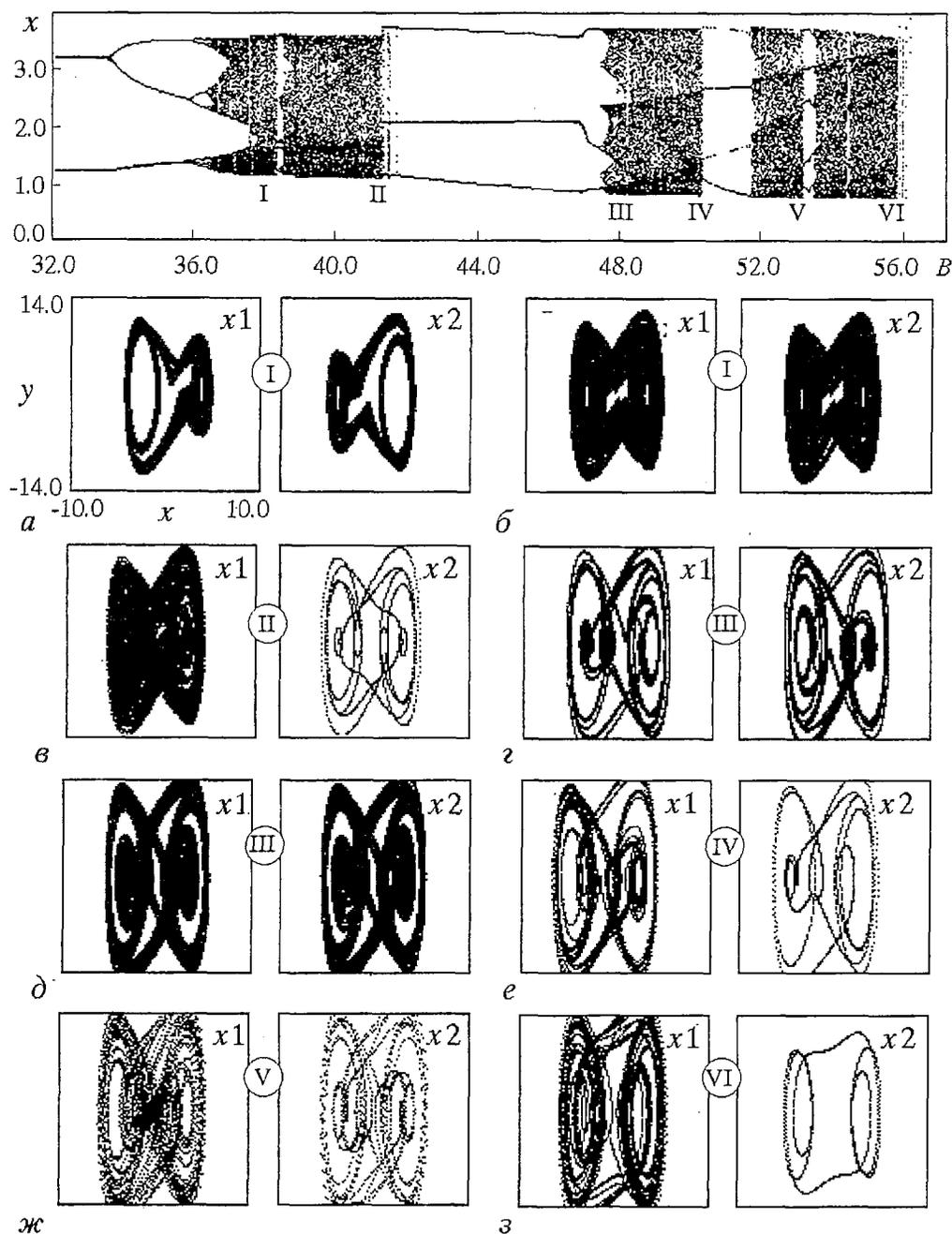


Рис. 16. Бифуркационное дерево и аттракторы системы Уэды (21), построенные с использованием двух разных начальных условий $x_1=3.1, y_1=0.0, x_2=0.4, y_2=0.0$, при $k=0.3, \omega=1$ и различных амплитудах воздействия B : а - 36.4, б - 37.3, в - 41.6, г - 47.5, д - 48.3, е - 50.2, ж - 53.1, з - 55.6

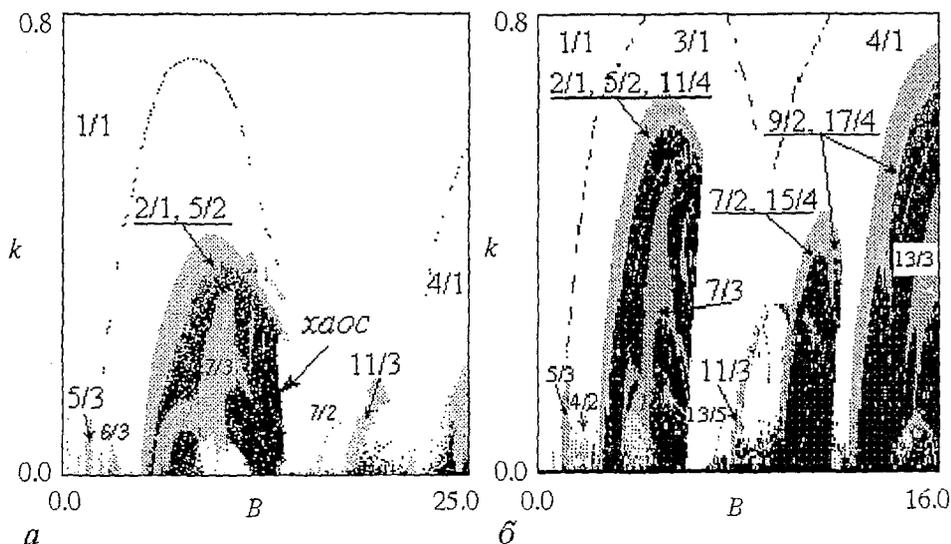


Рис. 17. Карты динамических режимов на плоскости (B, k) при $\omega=1$ системы Уэды (21) (а) и осциллятора в точке катастрофы бабочка (22) (б)

устойчивое решение периода три. Это периодическое окно существует до $B \approx 47$, где через бифуркацию вилка аттрактор теряет устойчивость и порождает два асимметричных аттрактора периода три. С ростом значений B эти аттракторы, удваивая период, превращаются в хаотические аттракторы (рис. 16, г). При $B \approx 48$ асимметричные хаотические аттракторы сливаются через граничный кризис в один (рис. 16, д). Хаотический режим существует до $B \approx 50$, здесь в результате бифуркации седло-узел рождаются два аттрактора периода два, а хаотический аттрактор исчезает в граничном кризисе (рис. 16, е). Потом снова образуются два хаотических аттрактора, претерпевающих внутренний кризис в районе $B \approx 52.5$, а при $B \approx 53$ происходит граничный кризис (рис. 16, ж), в результате которого на бифуркационном дереве устанавливается окно периода пять. При $B \approx 55$ происходит граничный кризис, когда исчезает хаотический аттрактор через столкновение с неустойчивой орбитой седлового типа (рис. 16, з).

Была также построена карта режимов на плоскости параметров амплитуда воздействия – коэффициент диссипации (B, k) (рис. 17, а). Было обнаружено, что внутри области, которая ограничена линией бифуркации потери симметрии решения периода $4/1$, развивается переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоенный периода.

Исследование систем с более сложным потенциалом естественно начать с осциллятора в точке катастрофы бабочка, описываемого уравнением вида:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^5 = B \cos \omega t. \quad (22)$$

В этой системе потенциальная яма имеет более крутые края, чем в системе Уэды, и все нелинейные эффекты разыгрываются при существенно меньшей амплитуде внешнего воздействия и большем коэффициенте диссипации. Дополнительно к тем явлениям, которые были описаны применительно к системе Уэды, здесь уже при малых значениях амплитуды появляются периодические окна, и соответственно происходят еще несколько граничных и внутренних кризисов.

Проведем однопараметрический анализ динамики системы, зафиксировав $k=0.2$. На рис. 18 представлены бифуркационное дерево и фазовые портреты осциллятора в точке катастрофы бабочка. С ростом амплитуды воздействия B два симметричных решения b_1, b_2 периода один, разной амплитуды, в результате

⁴ Обозначения аттракторов для осциллятора в точке катастрофы бабочка введены по аналогии с системой Уэды.

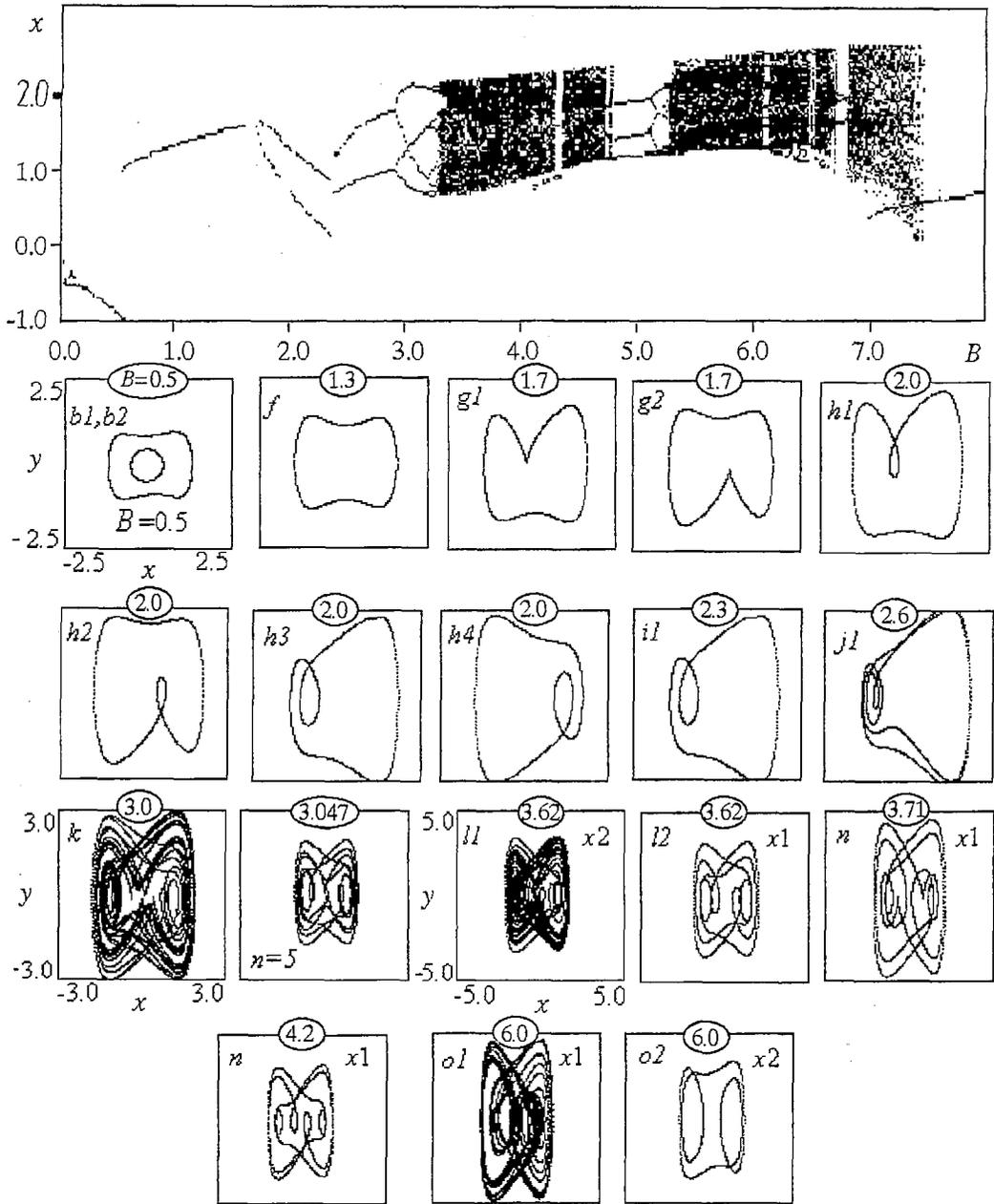


Рис. 18. Бифуркационная диаграмма и аттракторы осциллятора в точке катастрофы бабочка (22) при $k=0.2$, $\omega=1$, $x_1=3.1$, $y_1=3.1$, $x_2=-0.1$, $y_2=-0.1$

бифуркации седло-узел превращаются в симметричный аттрактор f периода один⁴. Аттрактор через бифуркацию вилки теряет устойчивость, и устанавливается два асимметричных аттрактора g_1 , g_2 . Эти аттракторы могут трансформироваться в один из четырех типов аттрактора h того же периода: h_1 , h_2 , h_3 , h_4 . Затем на смену этим решениям приходят взаимно симметричные аттракторы i_1 , i_2 , превращающиеся в аттракторы j_1 , j_2 периода четыре, которые через каскад бифуркаций удвоений периода превращаются в хаотический аттрактор k . При $B=3.047$ возникает аттрактор периода пять. При дальнейшем росте параметра B аттрактор k сменяется парой сосуществующих аттракторов, один из которых – хаотический l_1 , а другой – l_2 периода три. Затем появляется окно периода три, исчезающее при

$B \approx 3.7$. Далее в хаотической динамике возникают еще окна периода три с установлением аттракторов n при $B=4.08$, $B=5.59$, $B=5.8$. Последний аттрактор уступает место хаотическому аттрактору o_1 и аттрактору o_2 периода один. После области хаоса устанавливается аттрактор периода один p .

Рассмотрим кризисы хаотических аттракторов в этой системе. Первый кризис – внутренний, в результате которого два асимметричных хаотических аттрактора (рис. 19, а), сталкиваясь с неустойчивой орбитой, возникшей в результате бифуркации вилки, сливаются в один (рис. 19, б). Вторым кризис – граничный, он

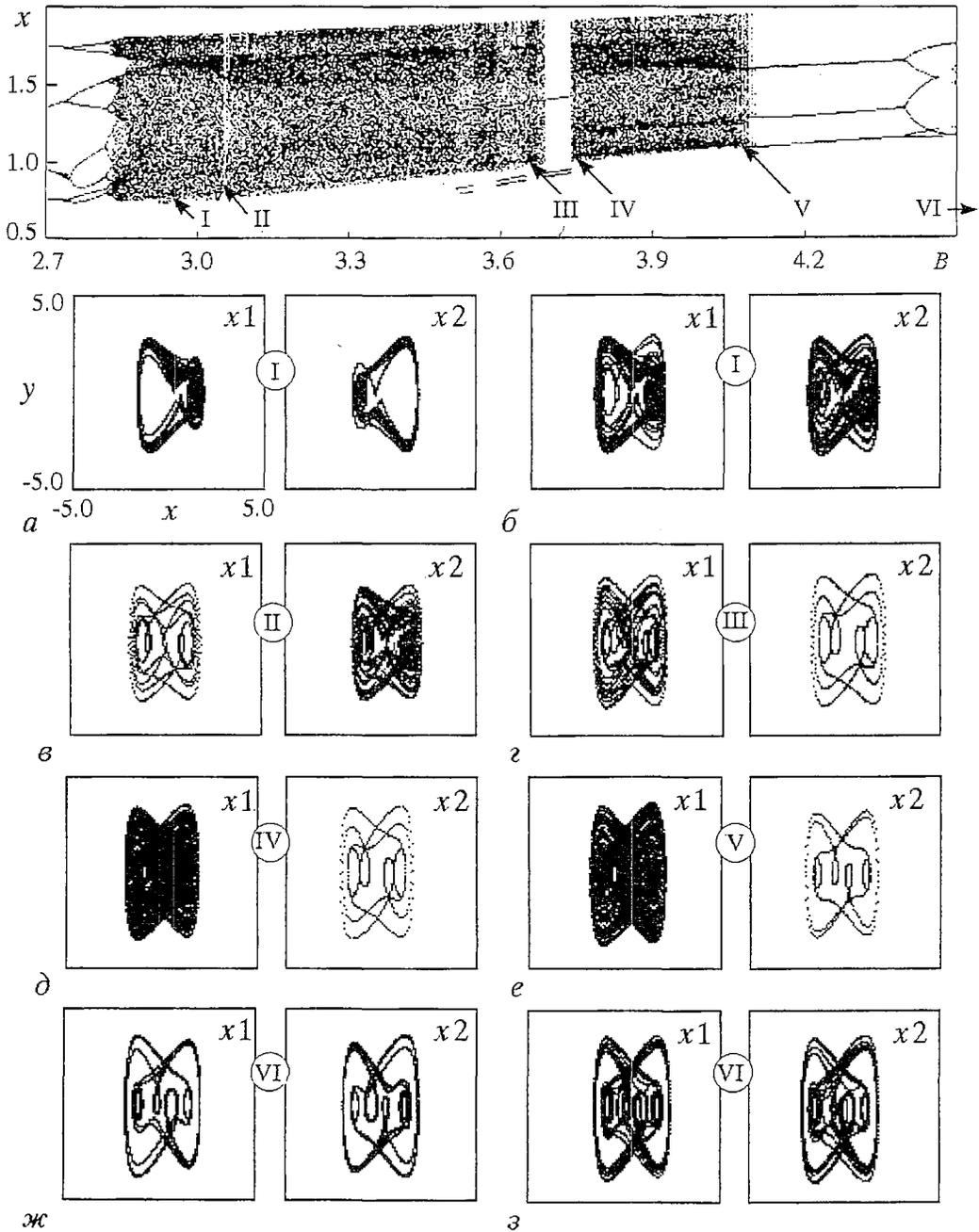


Рис. 19. Кризисы аттракторов осциллятора в точке катастрофы бабочка (22) при $k=0.2$, $\omega=1$, $x_1=3.1$, $y_1=3.1$, $x_2=-0.1$, $y_2=-0.1$ и различных амплитудах воздействия B : а – 2.962, б – 3.03, в – 3.047, г – 3.681, д – 3.738, е – 4.074, ж – 4.511, з – 4.545

происходит при $B=3.047$, где хаотический аттрактор сталкивается с неустойчивой орбитой периода пять и исчезает (рис. 19, в), остается аттрактор периода пять. Третий кризис – тоже граничный, он происходит в начале маленького окна периода три при $B=3.681$. Здесь хаотический аттрактор l_1 , сосуществовавший с аттрактором l_2 периода три, сталкивается с неустойчивой орбитой и исчезает (рис. 19, г). На смену аттрактору l_2 приходит аттрактор n того же периода. Четвертый и пятый кризисы аналогичны предыдущим и происходят в начале следующего окна периода три при $B=3.738$ и в начале большого окна при $B=4.074$ соответственно (рис. 19, д, е). Шестой кризис – внутренний, он завершает окно при $B=4.511$. Здесь возникшие в результате каскада бифуркаций удвоения периода асимметричные хаотические аттракторы (рис. 19, ж) сливаются в один (рис. 19, з). В результате следующего внутреннего кризиса при $B=5.26$ происходит увеличение размера хаотического аттрактора. Восьмой кризис, аналогичный второму, происходит в начале очередного периодического окна при $B=5.557$ (рис. 20, а). Девятый кризис при $B=5.643$ – внутренний, аналогичен шестому кризису (рис. 20, б, в). В десятом кризисе при $B=5.731$ аттракторы претерпевают те же изменения, но в обратном порядке: сначала хаотический аттрактор распадается на два асимметричных

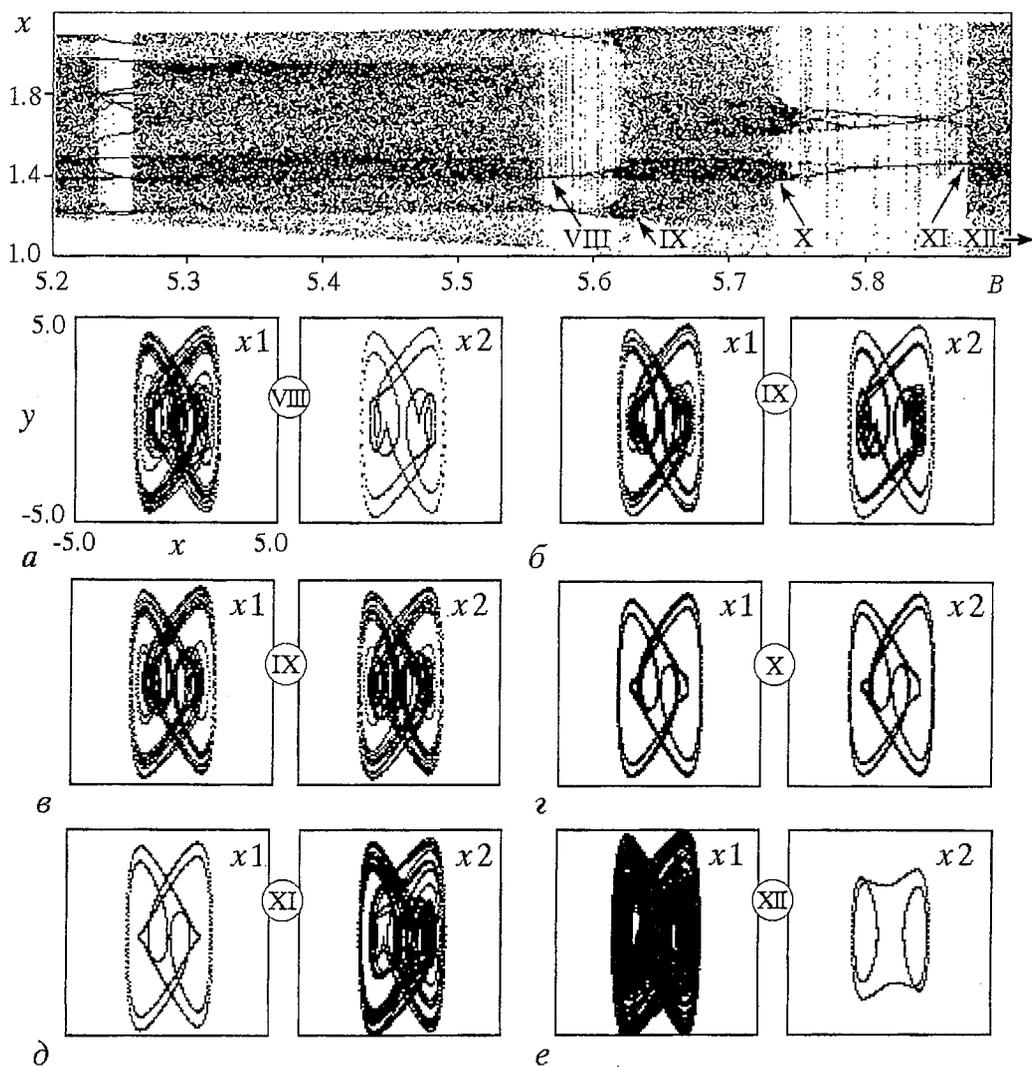


Рис. 20. Кризисы аттракторов осциллятора в точке катастрофы бабочка (22) при $k=0.2$, $\omega=1$, $x_1=3.1$, $y_1=3.1$, $x_2=-0.1$, $y_2=-0.1$ и различных амплитудах воздействия B : а – 5.557, б – 5.643, в – 5.7, г – 5.731, д – 5.867, е – 6.4

хаотических аттрактора (рис. 20, з), а потом они через обратный каскад бифуркаций удвоения периода переходят в аттрактор периода три. В одиннадцатом граничном кризисе при $B=5.867$ возникает хаотический аттрактор, сценарий его появления повторяет в обратном порядке третий кризис (рис. 20, д). И наконец, в последнем двенадцатом кризисе при $B=6.4$ хаотический аттрактор o_1 , сосуществовавший с периодическим o_2 , сталкивается с неустойчивой орбитой и исчезает (рис. 20, е), а аттрактор o_2 превращается в аттрактор p .

Для осциллятора в точке катастрофы бабочка была построена карта режимов на плоскости (B, k) (рис. 17, б). Ее структура аналогична карте режимов для системы Уэды, но в этом случае на карте в районе $B=12$ и $B=14$ появляются две конфигурации *crossroad area*. Их левые части образованы линиями бифуркаций удвоенный субгармоник $4/1, 7/2, 15/4$, а правые – линиями бифуркаций удвоенный субгармоник $4/1, 9/2, 17/4$. На карте дополнительно появились новые субгармоники периода $3/2, 4/2$, и $13/5$.

Заключение

Итак, в настоящей работе была предложена новая классификация нелинейных осцилляторов по схеме теории катастроф. Оказывается разные с точки зрения числа потенциальных ям и возможных решений модели осцилляторов из табл. 1, описывающие широкий класс физических явлений, представляют собой частный случай одного какого-либо модельного уравнения осциллятора с катастрофой при фиксированных значения параметров нелинейности. Исследование таких осцилляторов в настоящей работе распространяется на все пространство управляющих параметров.

Был исследован осциллятор с катастрофой складка (14): показана последовательность разрушения бассейна притяжений при изменении параметра нелинейности, на плоскости параметров амплитуда воздействия – параметр нелинейности определены области убегающих на бесконечность решений и области устойчивых режимов.

Использовавшийся в работе метод построения карт динамических режимов позволил обнаружить на плоскости параметров нелинейности рассмотренных осцилляторов конфигурации *crossroad area* и *spring area*. Была исследована эволюция этих конфигураций возле соответствующих линий складки. Изучалось влияние повышения степени полинома потенциальной функции на динамику системы и были обнаружены некоторые особенности. Так, при сравнении эволюции карт режимов осциллятора с катастрофой сборка (15), осциллятора с катастрофой бабочка (16) и осциллятора с нелинейностью седьмой степени (17) на плоскости параметров нелинейности, было обнаружено, что конфигурации *crossroad area* и *spring area* начинают появляться при меньших значениях амплитуды воздействия, чем в каждом предыдущем случае. Были установлены закономерности их эволюции и описан общий сценарий появления и исчезновения этих конфигураций с ростом амплитуды воздействия. Для осцилляторов с потенциальной функцией более высокого порядка этот сценарий успевает повториться несколько раз на рассматриваемом диапазоне амплитуды воздействия, давая повышение числа конфигураций *crossroad area* и *spring area* на картах режимов. Сопоставление динамики осцилляторов точно в точке катастрофы сборка (21) и точно в точке катастрофы бабочка (22) показало появление новых субгармонических режимов, добавление на бифуркационных диаграммах периодических окон; образование на картах режимов конфигураций *crossroad area*, развитие дополнительных бифуркаций и кризисов. Оказалось, что повышение степени нелинейности приводит к тому, что область сложной динамики начинает развиваться для меньших значений амплитуды воздействия и большем коэффициенте диссипации.

Работа выполнена при поддержке Минобразования РФ (грант № 00-02-17509) и фонда CRDF REC-006.

Библиографический список

1. *Duffing G.* Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Vieweg, Braunschweig, 1918.
2. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
3. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
4. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
5. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
6. *Баталова З.С., Неймарк Ю.И.* Об одной динамической системе с гомоклинической структурой // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. № 11.
7. *Белюстина Л.Н., Белых В.Н.* О глобальной структуре разбиения фазового пространства одной неавтономной системы // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 4. С. 595.
8. *Thompson J.M.T., Rainey R.C.T. and Soliman M.S.* Mechanics of ship capsize under direct and parametric wave excitation // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A. 1992. Vol. 338. P. 471.
9. *Thompson J.M.T. and Soliman M.S.* Fractal control boundaries of driven oscillators and their relevance to safe engineering design // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1990. Vol. 428. P. 1.
10. *Thompson J.M.T. and Soliman M.S.* Indeterminate jumps to resonance from a tangled saddle-node bifurcation // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1991. Vol. 432. P. 101.
11. *Thompson J.M.T.* Chaotic phenomena triggering the escape from a potential well // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1989. Vol. 421. P. 195.
12. *Thompson J.M.T., Bishop S.R. and Leung L.M.* Fractal basins and chaotic bifurcations prior to escape from the potential well // Phys. Lett. A. 1987. Vol. 121. P. 116.
13. *Thompson J.M.T.* Chaos and fractal basin boundaries in engineering // The Nature of Chaos. Ed. Tom Mullin. Clarendon Press – Oxford. 1995. P. 201.
14. *Soliman M.S. and Thompson J.M.T.* Transient and steady state analysis of capsize phenomena // Appl. Ocean Res. 1991. № 13. P. 82.
15. *Soliman M.S. and Thompson J.M.T.* Integrity measures quantifying the erosion of smooth and fractal basins of attraction // J. Sound Vib. 1989. № 135. P. 453.
16. *Soliman M.S. and Thompson J.M.T.* Basin organisation prior to a tangled saddle-node bifurcation // Int. J. Bif. & Chaos. 1991. № 1. P. 107.
17. *Soliman M.S. and Thompson J.M.T.* Global dynamics underlying sharp basin erosion in nonlinear driven oscillators // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. P. 3425.
18. *Soliman M.S. and Thompson J.M.T.* Indeterminate sub-critical bifurcations in parametric resonance // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1992. Vol. 438. P. 511.
19. *Soliman M.S.* Predicting regimes of indeterminate jumps to resonance by assessing fractal boundaries in control space // Int. J. of Bif. & Chaos. 1994. Vol. 4, № 6. P. 1645.
20. *Virgin L.N.* The nonlinear rolling response of a vessel including chaotic motions leading to capsize in regular seas // Appl. Ocean Res. 1986 (Submitted).
21. *Kao Y.H., Huang J.C. and Gou Y.S.* Routes to chaos in the Duffing oscillator with a single potential well // Phys. Lett. A. 1988. Vol. 131, № 2. P. 91.
22. *Thompson J.M. and Stewart H. B.* Nonlinear dynamics and chaos. Wiley, New York. 1986. 376 p.
23. *Huberman B.A., Crutchfield J.P.* Chaotic states of anharmonic systems in periodic fields // Phys. Rev. Lett. 1979. Vol. 43, № 23. P. 1743.
24. *Herath J., Fessler K.* Mode expansions and bifurcations in nonlinear single-well oscillators // Phys. Lett. A. 1987. Vol. 120, № 6. P. 265.
25. *Holmes C., Holmes P.* Second order averaging and bifurcations to subharmonics in Duffing's equation // J. Sound Vib. 1981. № 78. P. 161.
26. *Novak S., Frehlich R.G.* Transition to chaos in the Duffing oscillator // Phys. Rev. A. 1982. Vol. 26, № 6. P. 3660.

27. Rätý R., von Boehm J., Isomäki H.M. Absence of inversion-symmetric limit cycles of even periods and the chaotic motion of Duffing oscillator // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 103, № 6–7. P. 289.
28. Rätý R., von Boehm J., Isomäki H.M. Chaotic motion of a periodically driven particle in a asymmetric potential well // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34, № 5. P. 4310.
29. Swift J.W., Wiesenfeld K. Suppression of period doubling in symmetric systems // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 705.
30. Guckenheimer J. and Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. New York: Springer – Verlag, 1983.
31. Holmes P.J. Nonlinear oscillator with a strange attractor // Phil. Trans. Roy. Soc. Lon. A. 1979. Vol. 292, № 1394. P. 419.
32. Moon F.C. Fractal boundary for chaos in a two-state mechanical oscillator // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 962.
33. Moon F.C. Experiments on chaotic motions of a forced nonlinear oscillator: strange attractor // J. Appl. Mech. 1980. № 47. P. 638.
34. Moon W. and Holmes P.J. A magnetoelastic strange attractor // J. Sound Vib. 1979. Vol. 65. P. 285.
35. Moon W. and Holmes P.J. Strange attractors and chaos in nonlinear mechanics // J. Appl. Mech. 1983. Vol. 50. P. 1021.
36. Moon F.C. and Li G.X. Fractal basin boundaries and homoclinic orbits for periodic motions in a two well potential // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. P. 1439.
37. Moon F.C. and Li G.X. The fractal dimension of the two-well potential strange attractor // Physica D. 1985. Vol. 17. P. 99.
38. Szemplinska-Stupnicka W. Steady states in the twin potential oscillator: computer simulations and approximate analytical studies // Chaos. 1993. Vol. 3, № 3. P. 375.
39. Petersson J. Chaos new structural phase transition // Z. Naturforschung. A. 1990. Vol. 45. P. 958.
40. English V. and Lauterborn W. Regular window structure of a double-well Duffing oscillator // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44, № 2.
41. Parlitz U. Common dynamical features of periodically driven strictly dissipative oscillators // Int. J. of Bif. & Chaos. 1991. Vol. 3, № 3. P. 703.
42. Hayashi C. and Ueda Y. Behavior of solutions for certain types of nonlinear differential equations of the second order // Proc. 5th Int. Conf. Nonlinear Oscillations. Poznac. 1973. Vol. 14. P. 341.
43. Hayashi C. Nonlinear oscillations in physical systems. New York: McGraw Hill, 1964.
44. Hayashi C. Selected papers on nonlinear oscillations. Osaka, Japan: Nippon Printing and Publishing Co. 1975.
45. Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. М.: ИЛ, 1957. 204 с.
46. Hayashi C., Ueda Y., Kawakami H. Transformation theory as applied to the solutions of non-linear differential equations of the second order // Int. J. Non-Linear Mech. 1969. Vol. 4. P. 235.
47. Ueda Y., Yoshida S. Attractor-basin phase portraits of the forced Duffing's oscillator // Proc. European Conf. Circuit Theory Design. Paris. 1987. Vol. 1. P. 281.
48. Ueda Y. Survey of regular and chaotic phenomena in the forced Duffing oscillator // Chaos, Solitons and Fractals. 1991. Vol. 1, № 3. P. 199.
49. Ueda Y., Akamatsa N. and Hayashi C. Computer simulations of nonlinear ordinary differential equations and non-periodic oscillations // Electronics and Commun. in Japan. A. 1973. Vol. 56. P. 27.
50. Mosekilde E. Topics in Nonlinear Dynamic. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 1996. 380 p.
51. Li G. X., Moon F.C. Criteria for chaos of a three-well potential oscillator with homoclinic and heteroclinic orbits // J. Sound Vib. 1990. Vol. 136, № 1. P. 17.
52. Li G. X. Chaotic vibrations of a nonlinear system with five equilibrium states. M. S. Thesis. Cornell University. Ithaca, N. Y. 1984.
53. Huberman B.A., Grutchfield G.P. and Packard N.H. Noise phenomena in Josephson junctions // Appl. Phys. Lett. 1980. Vol. 37, № 8. P. 750.

54. MacDonald A. H., Plischke M. Study of the driven damped pendulum: application to Josephson junctions and charge-density-wave systems // Phys. Rev. B. 1983. Vol. 27, № 1. P. 201.

55. Bak P., Bohr T., Jensen M.H. Mode-locking and the transition to chaos in dissipative systems // Phys. Scr. T. 1984. Vol. 9. P. 50.

56. Miracky R.F., Clarke J., Koch R.H. Chaotic noise observed in a resistively shunted self-resonant Josephson tunnel junction // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 856.

57. Yeh W.J., He D.R., Kao Y.H. Fractal dimension and self-similarity of the devils staircase in a Josephson-junction simulator // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 480.

58. Yeh W.T., Kao Y.H. Intermittency in Josephson junctions // Appl. Phys. Lett. 1983. Vol. 42. P. 299.

59. Kao Y.H., Huang J.C., Gou Y.S. Persistent properties of crises in a Duffing oscillator // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35, № 12. P. 5228.

60. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та. 1995. с. 286.

61. Klinker T., Meyer-Ilse W. and Lauterborn W. Period doubling and chaotic behavior in a driven Toda oscillator // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 101, № 8, P. 371.

62. Goldstone J.A., Garmire E. Intrinsic optical bistability in nonlinear media // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 910.

63. Flytzanis Chr. and Tang C.L. Light-induced critical behavior in the four-wave interaction in nonlinear systems // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 441.

64. Желудев Н.И., Макаров В.А., Матвеева А.В., Свирко Ю.П. Структура хаоса при возбуждении нелинейного осциллятора гармонической внешней силой // Вест. МГУ. Сер. 3. 1984. Т. 25, № 5. С. 106.

65. Chui S.T., Ma K.B. Nature of some chaotic states for Duffing's equation // Phys. Rev. A. 1982. Vol. 26, № 4. P. 2262.

66. Elgin J.N., Forster D. Mechanism for chaos in the Duffing equation // Phys. Lett. A. 1983. Vol. 94, № 5. P. 195.

67. Крюков Б.И., Середович Г.И. О «странном» поведении решений уравнения Дуффинга // ДАН СССР. 1981. Т. 258, № 2. С. 311.

68. Beiersdorfer P., Wersinger J.M. Topology of the invariant manifolds of a period-doubling attractors for some forced nonlinear oscillators // Phys. Lett. A. 1983. Vol. 96, № 6. P. 269.

69. Hayashi C. The method of mapping with reference to the doubly asymptotic structure of invariant curves // Int. J. Non-Linear Mech. 1980. Vol. 15, № 415. P. 341.

70. Hayashi C., Abe M., Oshima K., Kawakami H. The method of mapping as applied to the solution for certain types of nonlinear differential equations // Тр. IX Межд. конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 1981. Т. I. Киев: Наукова думка, 1984. С. 40.

71. Kawakami H. The bifurcation pattern of periodic solutions observed in Duffing's equation // Тр. IX Межд. Конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 1981. Т. I. Киев: Наукова думка, 1984. С. 162.

72. Arecchi F.T., Lisi F. Hopping mechanism generating $1/f$ noise in nonlinear systems // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49, № 2. P. 94.

73. Holmes P., Whitley D. On the attracting set for Duffing's equation. I: Analytical methods for small force and damping // Physica D. 1983. Vol. 7, № 1-3. P. 211.

74. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.

75. Постон Т., Стюард И. Теория катастроф и ее применения. М.: Мир, 1980.

76. Bier M., Bountis T.C. Remerging Feigenbaum trees in dynamical systems // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 104. P. 239.

77. Chang S.J., Pendley P.R. Scaling and universal behavior on the bifurcation attractor // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 33, № 6. P. 4092.

78. Mackey R. S., Tresser C. Some flesh on the bifurcation structure of bimodal maps // Physica D. 1987. Vol. 27. P. 412.

79. Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L., Hotta A. Global bifurcation analysis of the double scroll circuit // Int. J. of Bif. & Chaos. 1991. Vol. 1. P. 139.

80. *Scheffczyk C., Parlitz U., Kurz T., Knop W., Lauterborn W.* Comparison of bifurcation structures of driven dissipative nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 43, № 12. P. 6495.

81. *Ringland J., Scell M.* Universal geometry in the parameter space of dissipative dynamical systems // *Europhys. Lett.* 1990. № 12. P. 595.

82. *Gallas J. A. C., Catarina S.* Structure of the parameter space of Henon map // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 70, № 18. P. 2714.

83. *Gallas J.A. C.* Structure of the parameter space of a ring cavity // *Appl. Phys. B.* 1995. Vol. 60. P. 203.

84. *Carcasses J., Mira C., Bosh M., Simo C. and Tatjer J. C.* Crossroad area – spring area transition. (1) Parameter plane representation // *Int. J. of Bif. & Chaos.* 1991. Vol. 1. P. 183.

85. *Mira C., Carcasses J.* On the crossroad area – saddle area and spring area transition // *Int. J. of Bif. & Chaos.* 1991. Vol. 1, № 3. P. 643.

86. *Moon F.C.* Chaotic vibrations. New York: John Wiley, 1987.

87. *Grebogi C., Ott E. and Yorke J.A.* Chaotic attractors in crisis // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 48. P. 1507.

88. *Grebogi C., Ott E. and Yorke J.A.* Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos // *Physica D.* 1983. Vol. 7. P. 181.

89. *Ott E.* Chaos in Dynamical Systems. Cambridge university press. 1993. P. 277.

*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 23.10.2000
после доработки 14.12.2000*

A FEATURES OF THE COMPLEX DYNAMICS OF THE NONLINEAR OSCILLATORS WITH THOM'S CATASTROPHES

A.P. Kuznetsov, A.Yu. Potapova

A survey of the regular and chaotic phenomena in the periodically forced nonlinear oscillators is represented. To classify the nonlinear oscillators the scheme of the catastrophe theory is used. Developed classification allows to describe the dynamics of many physical systems, which differ each from others in both the quantity of the potential wells and the possibility to escape from them, by using the only oscillator equation with some appropriate Thom's catastrophe as the potential function. The escape region and the region of the non-escaping solutions are estimated on the plane of the nonlinear parameter and forcing amplitudes for the oscillator with fold catastrophe. The boundary between these regions is illustrated by the basin erosion sequence. The dynamical regimes topographies which contain a crossroad area and a spring area are shown for the oscillators with high degree polynomial potential function. General features of topographies evolution for the oscillators with cusp catastrophe and with butterfly catastrophe are described. The bifurcations and crises, which occur in the considered systems, also depend on the degree of the potential function.



Потанова Анна Юрьевна – родилась в Саратове (1978). Окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2000). В настоящее время является аспирантом кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Младший научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – теория катастроф, физика нелинейных динамических систем, динамический хаос. Автор шести публикаций. Принимала участие в четырех международных научных конференциях. В 2000 году работала в Датском техническом университете в научной группе профессора Э. Мозекиде.