



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(4)

Научная статья  
УДК 519.722

DOI: 10.18500/0869-6632-003112  
EDN: EYZDZC

## Определение понятия информации в области компьютерных наук

О. А. Кузенков

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: ✉kuzenkov\_o@mail.ru

Поступила в редакцию 3.12.2023, принята к публикации 11.03.2024,  
опубликована онлайн 27.05.2024

**Аннотация.** Цель настоящего исследования состоит в формировании рабочего определения информации для обеспечения потребностей компьютерных наук. В настоящее время нет строгого определения данного термина. Наблюдается методологическое противоречие: разработка и применение информационных технологий требуют точности и строгости, но при этом в основе разработок лежит размытое, интуитивное понятие. *Материалы и методы.* Материалами для исследования служат существующие классические подходы к пониманию информации, в качестве основного метода — анализ этих подходов. Предлагаемое определение строится с учетом двух математических преобразований — выделения некоторого подмножества и отображения между множествами. Для формализации процедуры выделения используются методы теории нечетких множеств. *Результаты.* Предложено определение информации как результат отображения, при котором выделение подмножества из совокупности преобразов приводит к выделению соответствующего подмножества из совокупности образов. Выделяемое подмножество можно понимать как нечеткое, тогда допустимо эквивалентное определение информации как результат отображения, при котором повышение неоднородности распределения показателя присутствия на множестве преобразов приводит к повышению неоднородности распределения соответствующего показателя на множестве образов. Сущность нового определения демонстрируется на моделях популяционной динамики в дискретном времени. Значимость предложенного подхода для информационных технологий раскрывается на примере численного метода многоэкстремальной оптимизации. Показано, что предложенное определение позволяет сформулировать эффективные условия остановки для численного метода стохастической оптимизации, гарантирующие получение заданного количества информации. *Заключение.* Предлагаемое понимание информации позволяет преодолеть недостатки предыдущих подходов к пониманию сущности информации, сохраняет все преимущества классического подхода и согласуется с другими известными подходами в области компьютерных наук. Это определение может быть использовано для совершенствования численных методов оптимизации, равно как и других средств информационных технологий.

**Ключевые слова:** информация, энтропия, нечеткое множество, показатель принадлежности, отображение.

**Для цитирования:** Кузенков О. А. Определение понятия информации в области компьютерных наук // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 4. С. xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003112. EDN: EYZDZC

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Definition of information in computer science

*O. A. Kuzenkov*

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉kuzenkov\_o@mail.ru

Received 3.12.2023, accepted 11.03.2024, available online 27.05.2024

**Abstract.** Purpose of this study is to formulate a working definition of information to meet the needs of computer science. There is currently no strict definition of this term. There is a methodological contradiction: the development and application of information technologies requires accuracy and rigor, but at the same time the development is based on a vague, intuitive concept. *Materials and methods.* The materials for the study are existing classical approaches to understanding information, and the main method is the analysis of these approaches. The proposed definition is constructed taking into account two mathematical transformations: the selection of a certain subset and the mapping between sets. To formalize the allocation procedure, it is used apparatus of fuzzy sets. *Results.* A definition of information is proposed as the result of a mapping in which the selection of a subset from a set of prototypes leads to the selection of a corresponding subset from a set of images. The selected subset can be understood as fuzzy, then an equivalent definition of information is acceptable as a result of mapping, in which an increase in the heterogeneity of the distribution of the presence indicator on the set of prototypes leads to an increase in the heterogeneity of the distribution of the corresponding indicator on the set of images. The essence of the new definition is demonstrated using models of population dynamics in discrete time. The significance of the proposed approach for information technology is revealed using the example of the numerical method of multi-extremal optimization. It is shown that the proposed definition makes it possible to formulate effective stopping conditions for the numerical method of stochastic optimization, which guarantees the receipt of a given amount of information. *Conclusion.* The proposed understanding of information allows us to overcome the shortcomings of previous approaches to understanding the essence of information, retains all the advantages of the classical approach and is consistent with other well-known approaches in the field of computer science. This definition can be used to improve numerical optimization methods, as well as other information technology tools.

**Keywords:** information, entropy, fuzzy set, membership indicator, distribution, mapping.

**For citation:** Kuzenkov OA. Definition of information in computer science. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(4):xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003112

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Введение

Понятие информации является одним из важнейших в современном информационном обществе [1, 2]. Термин «информация» происходит от латинского глагола «informare», что дословно означает «приводить в форму», «придавать форму», преимущественно «придавать форму мысли». Первоначально этот термин указывал на приобретение объектом более высокой степени упорядоченности, структурированности в результате некоторого внешнего воздействия. В 1948 году К. Шеннон разработал строгую математическую теорию информации. Однако в созданной теории не было дано определение информации, рассматривался лишь ее количественный аспект. Здесь аксиоматически вводилась энтропия как функция от распределения вероятности, и количество информации определялось как разность значений этой функции [3]. Заметим, что при таком подходе информация неразрывно связывалась с вероятностью, в результате чего теория информации рассматривалась как частный случай теории вероятностей. Порой информацию полностью сводили к вероятности. Такой подход существенно ограничивал смысл информации и возможности ее применения в ряде прикладных областей, например, таких как геоинформатика. Он справедливо критиковался рядом исследователей [4]. В противовес этому подходу А. Н. Колмогоров дал определение информационной сложности без использования случайных процессов [5].

Д. С. Чернавский стремился отказаться от вероятности как базиса для определения информации и понимал информацию как выбор [6]. Но он заведомо исключал из рассмотрения физическую микроинформацию. Полноценной формальной теории информации на основе такого понимания построено не было.

Сейчас термин «информация» используется не только в точных, но и в гуманитарных науках [7, 8]. Сложилось философское направление, посвященное ее изучению [9–13]. При этом вопрос «Что такое информация?» сохраняет свою актуальность [14, 15]. Одна из основных проблем философии информации состоит именно в определении ее сущности [16]. Потребность общества иметь определенность в понимании информации отчетливо продемонстрирована Федеральным законом № 149-ФЗ от 27.07.2006 «Об информации, информационных технологиях и о защите информации», где была осуществлена юридическая формализация этого термина. Однако в настоящее время отсутствует единое общенаучное решение этой проблемы [17, 18]. В связи с этим развиваются новые подходы к пониманию информации, появляются новые концепции информации, новые системы ее количественного измерения [19–23]. Например, относительно недавно разработаны конструктивная теория информации и теория репрезентативной информации [24, 25]. В силу трудностей, связанных с универсальным определением информации, предпринимаются попытки дать точную формализацию этого термина для отдельных отраслей знания. В частности, углубляется понимание информации и связанных с ней вопросов в физике, квантовой теории, биологии и т. д. [26–29].

Особое системообразующее значение понятие информации имеет для сферы цифровой культуры, компьютерных наук, кибернетики. Классический шенноновский подход позволяет эффективно работать с процессами передачи информации в этой области. Но в ряде важнейших приложений, таких как обработка естественного языка, инженерия знаний, медицинская диагностика, распознавание образов и т. п. ключевую роль играет не передача информации от одного объекта к другому, а ее смысл и значение. Однако в области точных наук также нет строгого однозначного определения данного термина. В базовых учебниках по информатике и в технических стандартах часто пытаются объяснить информацию как сведения, сообщения, сигналы [30–32]. Но такое объяснение вовсе не раскрывает сущность понятия, а только заменяет один неопределенный термин на другой. Если сделать перевод слова «сведения» на английский язык, то обнаружится, что это не что иное, как «информация» (information), то есть такое «определение» является всего лишь тавтологией. Иногда понятие информации никак не определяется, ограничиваются лишь интуитивным пониманием его. При этом говорится, что оно является неопределимым, подобно основным математическим понятиям «точка» или «множество». Но такая аналогия не является корректной, поскольку неопределимые понятия математики вводятся через систему аксиом, однозначно определяющих их свойства по отношению друг к другу. А для информации никаких аксиом не задается. Порой информация отождествляется с данными, последние понимаются как некоторый набор чисел. Однако такая редукция не позволяет понять сущность, значение и роль информации в разнообразных информационных системах. Дополнительные сложности в однозначном понимании информации в области компьютерных наук вносит приобретающий все большее значение феномен квантовой информации [33].

Наблюдается явное методологическое противоречие. Разработка и применение современных информационных технологий требуют точности, логической обоснованности, строгости в исследованиях, но при этом в основе теоретических разработок лежит размытое, внутренне противоречивое, интуитивное понятие. В связи с этим актуальной является задача выработки корректного определения информации, возможно, не универсального и общенаучного, но практически значимого и обеспечивающего развитие современных информационных технологий.

Цель настоящего исследования состоит в формировании рабочего, математически строгого определения информации для обеспечения потребностей компьютерных наук.

## 1. Материалы и методы

Материалами для настоящего исследования служат существующие классические подходы к пониманию информации, в качестве основного метода — анализ этих подходов. Новое определение должно быть избавлено от недостатков существующих подходов. В частности, оно не должно относиться исключительно к сфере теории вероятностей. В то же время оно должно сохранять преимущества традиционных концепций, допускать вероятностную интерпретацию как частный случай.

Предлагаемое определение строится с учетом двух важнейших математических преобразований, связанных с пониманием информации: выделения некоторого подмножества и отображения между множествами. Для формализации процедуры выделения подмножества используются математические конструкции нечетких множеств. Отметим, что уже создатель классической теории нечетких множеств Л. Заде указывал на связь этой теории с пониманием информации: «Человеческий мозг использует допустимость нечеткости, кодируя информацию, достаточную для задачи (или достаточную для решения), элементами нечетких множеств, которые приближенно описывают исходные данные. Поток информации, поступающий в мозг через органы зрения, слуха, осязания и др., суживается таким образом в тонкую струйку информации, необходимой для решения поставленной задачи с минимальной степенью точности» [34].

Сущность нового определения демонстрируется на моделях популяционной динамики в дискретном времени, которые описываются системами разностных уравнений. При этом учитывается эффект мутагенеза. Показывается, что распределение численности сообщества по различным биологическим видам можно интерпретировать как информацию о наиболее приспособленном виде. Далее на основе приведенной модели популяционной динамики строится численный метод многоэкстремальной оптимизации. Этот метод рассматривается как динамический процесс постепенного уточнения информации о возможном расположении точки глобального максимума целевой функции. Преимуществом рассмотренного метода является гарантированная сходимость к точке глобального оптимума, то есть гарантированное получение интересующей исследователя информации. Тем самым иллюстрируется целесообразность предложенного подхода в понимании информации для информационных технологий.

## 2. Результаты

**Выделение подмножества.** В качестве основы для нового определения информации берется процедура выделения подмножества элементов из исходного множества. Анализируя классический подход математической теории информации, можно заметить, что здесь информация неразрывно связана с сокращением множества альтернатив — выбором варианта, реализацией исхода и т. п. Рассмотрим в качестве примера шахматную фигуру. Если известно ее положение (клетка) на шахматной доске, то, согласно формуле Хартли, это соответствует получению  $\log_2 64 = 6$  бит информации. Обратим внимание, что количество информации будет одним и тем же, независимо от того, стоит ли фигура в клетке  $e2$  или в клетке  $c4$ . Но информация о положении фигуры в этих случаях будет разной. Аналогично этому количество информации, передаваемой фразой «казнить нельзя помиловать», не зависит от того, в каком месте расположена запятая, но смысл информации при изменении ее положения меняется на противоположный. Отсюда видно, что смысл информации по существу ассоциируется с реализацией одной альтернативы из исходного множества. Такое понимание смысла информации отражено в определении Д. С. Чернавского: «Информация есть запомненный выбор одного варианта из нескольких возможных и равноправных» [13]. Заметим, что такая формализация полностью соответствует традиционному

представлению об информации как снижении неопределенности, только конкретизирует его. Здесь дается четкое понимание неопределенности, о которой идет речь, — неопределенность относительно того, какой именно элемент выделяется.

**Формализация выделения.** Для того чтобы дать строгое определение информации, необходимо точно определить операцию выделения подмножества. Для формализации выделенного подмножества  $A$  из  $Y$  используется характеристическая функция  $\chi_A$ , имеющая следующий смысл:

$\chi_A(y) = 1$ , если  $y$  принадлежит  $A$ ;

$\chi_A(y) = 0$ , если  $y$  не принадлежит  $A$ .

Числовая величина  $\chi_A$  является индикатором принадлежности, показателем присутствия элемента в выделяемом подмножестве, показателем выделения.

Однако в реальности не всегда удастся точно узнать границы выделяемого подмножества. Например, изображение прямоугольного объекта на фотографии может быть недостаточно контрастным из-за неправильной фокусировки, в силу чего границы изображения становятся размытыми и не позволяют точно знать пространственные координаты и размеры объекта. В этом случае целесообразно рассматривать выделяемое подмножество как нечеткое множество, понимаемое в смысле классического определения Л. Заде [35]. Здесь характеристическая функция  $\chi_A$  может принимать промежуточные значения от 0 до 1. Для математического удобства всегда можно перейти к характеристической функции, сумма значений которой равна единице:  $\sum_{y \in Y} \chi_A(y) = 1$ . Например, если известен вертикальный ряд «е» для положения шахматной фигуры, то такая характеристическая функция, определенная на множестве клеток шахматной доски, имеет следующие значения:  $\chi_A(e1) = \chi_A(e2) = \dots = \chi_A(e8) = 1/8$  и  $\chi_A = 0$  для остальных клеток доски. Если информация о положении фигуры не была получена и множество допустимых состояний содержит все клетки, то характеристическая функция равна  $1/64$  для каждой клетки. Рассматриваемая здесь характеристическая функция полностью соответствует классической конструкции Л. Заде. Но в отличие от наиболее распространенного в теории нечетких множеств нормированного случая здесь точная верхняя грань характеристической функции может быть меньше единицы (то есть функция не обязательно будет нормированной в классическом понимании). Заметим также, что для введения такой функции не требуется даже наличия частичного порядка среди элементов множества  $Y$ .

В качестве показателя присутствия элемента в подмножестве можно использовать вероятность реализации той или иной альтернативы, тогда все рассуждения будут соответствовать классической схеме математической теории информации. Но возможны и другие способы определения показателя присутствия. Например, в биологических системах таким показателем может служить численность или удельная численность вида, биомасса или удельная биомасса популяции; в экономических системах в качестве такого показателя можно взять удельный спрос на товар и т. п. [36]. В примере с фотографией черного прямоугольника значением характеристической функции может быть интенсивность черного цвета (или оттенок серого) в каждом пикселе изображения. Допустима также интерпретация информации как возможности того или иного состояния из первоначального множества. При такой интерпретации работа с информацией может осуществляться на основе известной теории возможностей [37].

Математически выделение нечеткого подмножества эквивалентно заданию распределения показателя принадлежности по исходному множеству  $Y$ . Информацию мы снова будем понимать как выделение подмножества (возможно нечеткого) из исходного множества. Можно дать эквивалентную математическую формулировку этой процедуры. Выделение подмножества имеет место тогда, когда происходит концентрация распределения показателя принадлежности на некотором подмножестве или в более общем случае повышается неоднородность распределения этого показателя по исходному множеству элементов.

**Энтропия.** Для характеристики степени четкости выделяемого подмножества будем использовать функцию энтропии в соответствии с классической формулой Шеннона

$$H = - \sum_{y \in Y} \chi_A(y) \log_2 \chi_A(y).$$

Энтропия количественно выражает степень равномерности распределения показателя присутствия; ее уменьшение соответствует концентрации распределения, увеличению степени выделения некоторого подмножества, повышению его четкости. Выделение подмножества — это переход от начального распределения показателя присутствия к новому с увеличением степени концентрации (четкости). Фактически такое итоговое распределение будет формализацией информации.

Это дает возможность содержательного понимания информации. Следует отметить, что при таком подходе информация может рассматриваться как результат процесса отбора, для описания которого существует разработанный математический аппарат на основе динамики меры (распределения) [38–40].

Данный подход соответствует подходу Л. Больцмана в физике, где энтропия определяется числом возможных микросостояний, а ее снижение, то есть приобретение информации — сокращением числа таких микросостояний [41]. Обратим внимание, что в отличие от определения, данного в [6], введенное понимание информации не исключает из сферы применения физическую микроинформацию. Хотя информацию о конкретном микросостоянии невозможно получить и сохранить, но выделенное подмножество микросостояний, соответствующее некоторому макросостоянию, вполне возможно для восприятия и запоминания через это макросостояние. Л. Больцман установил связь между сокращением числа микросостояний и повышением упорядоченности тела. Тем самым понимание информации как выделения некоторого подмножества вновь связывается с исконным значением этого термина — «придание формы», установление порядка или структуры. Такую информацию иногда называют внутренней структурной информацией, поскольку она характеризует степень организованности системы.

**Отображение.** Вторым принципиальным моментом в предлагаемом подходе к пониманию информации является использование понятия отображения. При раскрытии смысла концепции информации будем исходить из того, что информация является результатом отображения некоторого множества элементов (альтернатив, исходов, состояний и т. п.) в другое множество, которое может быть как натурным, так и знаковым (виртуальным). Например, таким множеством могут быть символы алфавита или двоичные числа. При этом выделение некоторого элемента из первого множества (реализация исхода или состояния) приводит к выделению соответствующего элемента из второго множества, который и представляет информацию об этом состоянии.

Можно установить соответствие между элементами  $y$  одного множества  $Y$  и элементами  $z$  другого множества  $Z : Y \rightarrow Z$ , то есть определить отображение  $f$  из  $Y$  в  $Z : f(y) = z$ . В частности, такое соответствие устанавливается при кодировке. Например, можно представить клетки шахматной доски двоичным кодом, то есть установить соответствие между множеством клеток и множеством шестизначных двоичных чисел:  $e5 \rightarrow 101101$ . В этом частном случае построенное отображение будет взаимно однозначным.

Выделение некоторого элемента из множества прообразов (реализация исхода или состояния) приводит к выделению соответствующего элемента из множества образов. Согласно принципу обобщения Л. Заде [37] введенное отображение  $f$  множества  $Y$  в  $Z$  определяет отображение нечеткого подмножества  $A$ , заданного характеристической функцией  $\chi_A(y)$  на  $Y$ , в нечеткое подмножество  $B$  из  $Z$  с характеристической функцией  $\chi_B(z)$  следующим образом:

$$\chi_B(z) = \sup_y \{\chi_A(y) | z = f(y)\}.$$

Увеличение неоднородности в одном распределении приводит к увеличению неоднородности другого распределения (концентрации распределения на некотором подмножестве).

Наряду с классическим отображением  $Y$  в  $Z$  можно также рассматривать нечеткое отображение  $fH$ , которое определяется как нечеткое подмножество, заданное на совокупности пар (декартовом произведении)  $Y \times Z$  соответствующей характеристической функцией  $\chi_{fH}(y, z)$ . Его можно понимать как отображение, при котором каждому элементу  $y$  из  $Y$  ставится в соответствие не конкретный элемент  $z$ , а нечеткое подмножество  $B$  в  $Z$ . В этом случае, согласно принципу обобщения Заде,  $fH$  определяет отображение нечеткого подмножества  $A$  из  $Y$  в нечеткое подмножество  $B$  из  $Z$  следующей формулой, связывающей соответствующие характеристические функции  $\chi_A(y)$  и  $\chi_B(z)$ :

$$\chi_B(z) = \sup_{y \in Y} \min\{\chi_A(y), \chi_{fH}(y, z)\}.$$

Полученная информация — это результат отображения, приводящего к выделению некоторого подмножества из совокупности образов (увеличению неоднородности распределения показателя присутствия). Такую информацию также называют внешней информацией, отражающей происходящее изменение во внешнем объекте, состояние которого описывается множеством прообразов  $Y$ . В рамках введенного определения информация становится строгим математическим понятием. Сделанная формализация позволяет получить дополнительные преимущества при исследовании ряда прикладных моделей, в том числе и с нелинейной динамикой.

**Иллюстрации. Популяционная динамика.** Рассмотрим следующую модель популяционной динамики. Пусть в общей среде обитания сосуществуют особи  $n$  различных биологических видов. Рассматривается дискретная последовательность равноотстоящих моментов времени  $t_k = t_0 + k\Delta t$ , где  $\Delta t > 0$  — некоторый фиксированный интервал времени. Пусть  $x_i(t_k)$  — численность  $i$ -го вида в сообществе в момент времени  $t_k$ . Пусть  $a_i$  — количество потомков, которое в благоприятных условиях может произвести одна особь вида  $i$  в единицу времени. Тогда  $a_i\Delta t$  — максимальное возможное количество потомков одной особи за время  $\Delta t$ . Не уменьшая общности, можно считать, что константы  $a_i$  различны для разных видов. Предполагается, что наличие в общей среде обитания других особей снижает рождаемость каждой особи («эффект тесноты»), причем коэффициент такого снижения зависит от общего числа возможных потомков во всей популяции и выражается следующим образом:

$$b_k = \frac{1}{\sum_{j=1}^n a_j x_j(t_k)\Delta t + 1}.$$

Предполагается также, что смертность в сообществе у всех видов пропорциональна общему приросту численности сообщества. Тогда разностные уравнения динамики численности популяции принимают следующий вид:

$$\Delta x_i(t_k) = x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k) = b_k a_i x_i(t_k)\Delta t - x_i(t_k) \sum_{j=1}^n b_k a_j x_j(t_k)\Delta t. \quad (1)$$

Считается, что в начальный момент времени  $t_0$  численность  $i$ -го вида равна  $x_i(t_0)$ , причем

$$\sum_{j=1}^n x_j(t_0) = 1.$$

Здесь под единицей понимается не одна особь, а некоторое стандартное количество особей, выбранное за единицу численности (например, тысяча).

Легко показать, что при сделанных предположениях численность сообщества будет постоянной и равной единице во все последующие моменты времени. Для этого можно рассмотреть вспомогательную систему разностных уравнений Мальтуса

$$\Delta z_i(t_k) = a_i z_i(t_k) \Delta t$$

с теми же самыми начальными условиями  $z_i(t_0) = x_i(t_0)$ . Каждое рекуррентное уравнение системы легко решается аналитически, и решение имеет вид геометрической прогрессии

$$z_i(t_k) = x_i(t_0)(1 + a_i \Delta t)^k.$$

Введем обозначение

$$S_n(t_k) = \sum_{j=1}^n z_j(t_k).$$

Пусть

$$x_i(t_k) = \frac{z_i(t_k)}{S_n(t_k)}. \quad (2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k) &= \frac{z_i(t_{k+1})S_n(t_k) - z_i(t_k)S_n(t_{k+1})}{S_n(t_k)S_n(t_{k+1})} = \\ &= \frac{\Delta z_i(t_k)}{\sum_{j=1}^n (\Delta z_j(t_k) + z_j(t_k))} - \frac{z_i(t_k)}{S_n(t_k)} \sum_{l=1}^n \frac{\Delta z_l(t_k)}{\sum_{j=1}^n (\Delta z_j(t_k) + z_j(t_k))} = \\ &= b_k a_i x_i(t_k) \Delta t - x_i(t_k) \sum_{j=1}^n b_k a_j x_j(t_k) \Delta t. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функции, определенные формулой (2), удовлетворяют системе уравнений (1). Но сумма всех этих  $n$  функций в каждый момент времени равна единице. Отсюда следует, что общая численность сообщества при сделанных предположениях остается постоянной и равной единице, что и требовалось показать. Более того, из этого также следует, что решение системы (2) имеет вид

$$x_i(t_k) = \frac{x_i(t_0)(1 + a_i \Delta t)^k}{\sum_{j=1}^n x_j(t_0)(1 + a_j \Delta t)^k}. \quad (3)$$

Фиксированные условия обитания сообщества определяют распределение констант (коэффициентов возможной рождаемости)  $a_i$  на множестве  $1, 2, \dots, n$  номеров биологических видов, образующих его. Пусть  $m$  — номер вида с наибольшим значением коэффициента размножения  $a_m$ . В этом случае из (3) вытекают соотношения

$$x_m(t_k) \rightarrow 1, \quad x_i(t_k) \rightarrow 0; \quad i \neq m, k \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Информация о наилучшем виде сообщества представляет собой номер  $m$  среди  $n$  возможных номеров; получение информации о наилучшем виде соответствует выделению одного элемента  $m$  из множества потенциальных альтернатив. Эту информацию можно получить, если знать распределение коэффициентов  $a_i$ . Однако, как правило, эмпирически измерить эти константы довольно сложно. Но тем не менее можно получить информацию о наилучшем элементе без знания величин  $a_i$  другим способом — путем наблюдения за численностями разных видов

в сообществе, то есть за распределением численностей разных видов  $x_i$  по множеству номеров видов. Распределение коэффициентов  $a_i$  генерирует распределение численностей  $x_i$  в каждый момент времени, то есть здесь имеет место отображение одного распределения в другое.

Формально можно рассмотреть множество номеров  $Y = \{1, 2, \dots, n\}$ , распределение коэффициентов  $a_i$  на нем и нечеткое отображение  $Y$  самого в себя, заданное следующим правилом. Элемент  $m$  из  $Y$ , соответствующий номеру с наибольшим значением  $a_i$ , отображается в нечеткое множество  $B$  с характеристической функцией  $\chi_B(i)$ , определенной значениями  $x_i(t_k)$ ; остальные номера переходят сами в себя без изменений. В фиксированный момент времени  $t_k$  распределение численностей  $x_i(t_k)$  по множеству номеров можно рассматривать как задание нечеткого множества, отображающего наилучший номер. Здесь  $x_i(t_k)$  будет иметь смысл показателя возможности реализации на номере  $i$  наилучшего вида. С течением времени степень такой реализации для вида  $m$  стремится к единице, для остальных видов — к нулю, то есть повышается уровень четкости выделяемого подмножества. Можно также рассчитать значение энтропии Шеннона по формуле

$$H(t_k) = - \sum_{j=1}^n x_j(t_k) \log_2 x_j(t_k).$$

Для биологических популяций функция энтропии обычно используется как характеристика биологического разнообразия. В данном примере ее можно рассматривать как степень однородности распределения численностей по множеству биологических видов сообщества, степень «нечеткости» выделения подмножества наилучших видов. Снижение энтропии свидетельствует о повышении неоднородности распределения, его концентрации на выделяемом подмножестве. Как следует из (4), в данном случае энтропия с течением времени стремится к нулю, то есть динамика численностей позволяет получить информацию о наилучшем виде с любой степенью точности.

**Мутагенез.** Рассмотрим более сложную модель. Пусть в биологическом сообществе происходит процесс мутагенеза. В каждый дискретный момент времени  $t_k$  существует  $k$  видов особей, но при их размножении лишь некоторая доля потомков  $q_k$  ( $0 < q_k < 1$ ) в точности повторяет своих родителей, а другая доля  $(1 - q_k)$  представляет собой мутацию, относящуюся к новому  $k + 1$ -му виду. Таким образом, в каждый момент времени в сообществе появляются особи нового вида, и число видов увеличивается на единицу. Разностные уравнения этой модели имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} \Delta x_i(t_k) &= q_k b_k a_i x_i(t_k) \Delta t - x_i(t_k) \left( \sum_{j=1}^k q_k b_k a_j x_j(t_k) \Delta t + (1 - q_k) \right), \quad i = 1, 2, \dots, k; \\ \Delta x_{k+1}(t_k) &= x_{k+1}(t_{k+1}) = 1 - q_k; \quad x_l(t_k) = 0, \quad l = k + 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Начальные условия берутся в виде

$$x_1(t_0) = 1, \quad x_2(t_0) = x_3(t_0) = x_4(t_0) = \dots = 0. \quad (6)$$

Здесь, как и в предыдущей модели, общая сумма численностей всех видов в каждый момент времени равна единице. Для того чтобы найти решение системы (5), снова введем вспомогательную систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} \Delta z_i(t_k) &= a_i z_i(t_k) \Delta t, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad z_1(t_0) = 1, \quad z_i(t_0) = 0, \quad i = 2, 3, \dots; \\ \Delta z_{k+1}(t_k) &= z_{k+1}(t_{k+1}) = \frac{1 - q_k}{q_k} S_k(t_{k+1}); \quad \Delta z_l(t_k) = 0, \quad l = k + 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что при этом выполняется равенство

$$q_k = \frac{S_k(t_{k+1})}{S_{k+1}(t_{k+1})}.$$

Как и в предыдущем случае, рассмотрим функции вида

$$x_i(t_k) = \frac{z_i(t_k)}{S_k(t_k)}. \quad (8)$$

Тогда для них будут выполняться следующие равенства:

$$\begin{aligned} \Delta x_i(t_k) &= \frac{z_i(t_{k+1})S_k(t_k) - z_i(t_k)S_{k+1}(t_{k+1})}{S_k(t_k)S_{k+1}(t_{k+1})} = \\ &= \frac{\Delta z_i(t_k)S_k(t_{k+1})}{S_k(t_{k+1})S_{k+1}(t_{k+1})} - \frac{z_i(t_k)}{S_n(t_k)} \left( \sum_{l=1}^k \frac{\Delta z_l(t_k)S_k(t_{k+1})}{S_k(t_{k+1})S_{k+1}(t_{k+1})} + \frac{z_{k+1}(t_{k+1})}{S_{k+1}(t_{k+1})} \right) = \\ &= q_k b_k a_i x_i(t_k) \Delta t - x_i(t_k) \left( \sum_{j=1}^k q_k b_k a_j x_j(t_k) \Delta t + (1 - q_k) \right), \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функции, определенные равенствами (8), удовлетворяют системе (5), а также начальным условиям (6). При этом вспомогательные уравнения (7) легко решаются по рекуррентной формуле

$$z_{i+1}(t_k) = \frac{1 - q_k}{q_k} S_i(t_{i+1}) (1 + a_{i+1} \Delta t)^{k-i-1}, \quad k > i; \quad z_{i+1}(t_k) = 0, \quad k < i.$$

В случае если

$$q_i = \frac{S_i(t_{i+1}) (1 + a_{i+1} \Delta t)^{-i-1}}{1 + S_i(t_{i+1}) (1 + a_{i+1} \Delta t)^{-i-1}}, \quad (9)$$

то

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= (1 + a_{i+1} \Delta t)^k, \quad k > i; \\ x_i(t_k) &= \frac{(1 + a_i \Delta t)^k}{\sum_{j=1}^k (1 + a_j \Delta t)^k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть снова  $m$  — номер вида с наибольшим значением коэффициента размножения  $a_m$ . Исходя из полученного аналитического решения (10), можно видеть, что  $x_m(t_k) \rightarrow 1$ ,  $x_i(t_k) \rightarrow 0$  при  $i \neq m, k \rightarrow \infty$ . Здесь снова наблюдается эффект постепенного получения информации о наилучшем виде. Точная информация соответствует одному выделенному элементу  $m$  из бесконечного множества натуральных номеров  $1, 2, \dots$ . Но в каждый конечный момент времени  $t_k$  можно иметь лишь ее приближение в виде нечеткого множества, которое определяется распределением соответствующих численностей  $x_i(t_k)$  на множестве натуральных чисел. Отметим, что здесь также можно найти энтропию (или разнообразие) системы в каждый момент времени по формуле Шеннона

$$H(t_k) = - \sum_{j=1}^{\infty} x_j(t_k) \log_2 x_j(t_k) \equiv - \sum_{j=1}^k x_j(t_k) \log_2 x_j(t_k).$$

Уменьшение энтропии будет соответствовать повышению степени неоднородности распределения и степени выделенности подмножества наилучших видов. Здесь снова энтропия распределения убывает до нуля, что соответствует получению информации о наилучшем виде с любой степенью точности.

**Генетические коды.** Пусть у каждого  $i$ -го биологического вида есть генетический код  $w_i$ , который мы будем представлять точкой на отрезке  $[0,1]$ . Это представление достаточно прозрачно, поскольку генетический код является последовательностью из четырех аминокислотных оснований, которую можно изобразить как последовательность цифр после запятой некоторого числа на указанном отрезке в четверичной системе счисления [42]. Пусть на отрезке  $[0, 1]$  определена непрерывная неотрицательная функция  $a(w)$ , значение которой соответствует коэффициенту размножения вида с генетическим кодом  $w$ . Предположим, что наибольшее значение  $a^*$  этой функции достигается в единственной точке  $w^*$ . Пусть коды счетного набора рассмотренных в предыдущем примере видов образуют всюду плотное множество на отрезке  $[0, 1]$ . Это означает, что на любой интервал отрезка попадает хотя бы одна точка из данного множества. Например, таким всюду плотным счетным множеством являются рациональные числа отрезка. Пусть динамика численности сообщества видов удовлетворяет системе (5) с условиями (6), (9), где  $a_i = a(w_i)$ .

Рассмотрим сколь угодно малую  $\delta$ -окрестность  $O_\delta(w^*) = (w^* - \delta, w^* + \delta)$  точки  $w^*$ . Обозначим  $D$  – дополнение  $O_\delta(w^*)$  до отрезка  $[0,1]$ ,  $D = [0, 1] \setminus (w^* - \delta, w^* + \delta)$ ;  $I(k)$  – подмножество из  $k$  первых видов, генетические коды которых принадлежат  $O_\delta(w^*)$ ,  $J(k)$  – подмножество из  $k$  первых видов, генетические коды которых принадлежат  $D$ ,  $I(k) = \{i : w(i) \in O_\delta(w^*), i = 1, 2, \dots, k\}$ ,  $J(k) = \{i : w(i) \in D, i = 1, 2, \dots, k\}$ .

В каждый  $k$ -й момент времени информацию о расположении точки максимума функции  $a(w)$  в окрестности  $O_\delta(w^*)$  можно получать по численности особей видов, у которых генетический код принадлежит данной окрестности, то есть по величине

$$\sum_{i \in I(k)} x_i(t_k).$$

Аналогичную оценку можно сделать для любого другого интервала из отрезка  $[0,1]$ . Покажем, что с течением времени численность особей с генетическим кодом из окрестности  $O_\delta(w^*)$  будет стремиться к единице.

Пусть  $a' = \sup_D a(w)$ . Очевидно,  $a' < a^*$ . Обозначим  $\varepsilon = a^* - a'$ . В силу непрерывности функции  $a(w)$  существует  $\theta$ -окрестность  $O_\theta(w^*)$  точки  $w^*$  такая, что для любого  $w$  из этой окрестности выполняется неравенство  $a(w) > a^* - \varepsilon/2$ . Поскольку последовательность  $w(i)$  всюду плотная в отрезке  $[0,1]$ , существует номер  $m$  такой, что  $w(m) \in O_\theta(w^*)$ . При  $k > m$  справедливы следующие оценки:

$$\sum_{i \in J(k)} x_i(t_k) = \frac{\sum_{i \in J(k)} (1 + a_i \Delta t)^k}{\sum_{j=1}^k (1 + a_j \Delta t)^k} < \frac{k(1 + a' \Delta t)^k}{(1 + (a^* - \varepsilon/2) \Delta t)^k} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда

$$\sum_{i \in I(k)} x_i(t_k) = \left( 1 - \sum_{i \in J(k)} x_i(t_k) \right) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 1, \quad (11)$$

что и требовалось показать.

**Оптимизация.** На основе рассмотренной динамики можно построить численный метод глобальной оптимизации. Задачей алгоритма является нахождение точки наибольшего значения непрерывной неотрицательной функции  $a(w)$ , заданной на отрезке  $[0,1]$  и имеющей единственную

точку глобального максимума. На первом шаге случайно выбирается точка  $w_1$  на отрезке  $[0, 1]$  и вычисляется значение функции  $a(w_1)$ . На каждом следующем шаге определенным образом добавляется еще одна точка, в которой также вычисляется значение функции  $a$ . Правило добавления новой точки после сделанных  $k$  шагов предполагает выполнение следующих операций.

1. Выбор опорной точки (борьба за производство потомства). Из имеющихся к  $k + 1$ -му шагу точек предыдущих испытаний  $w_1, \dots, w_k$  выбирается опорная точка  $w'_{k+1}$  с соответствующими вероятностями, вычисляемыми по формуле (10) при  $\Delta t = 1$ .
2. Мутация (производство потомства). На основе опорной точки  $w'_{k+1}$  случайно выбирается точка следующего испытания  $w_{k+1}$  из отрезка  $[0, 1]$  с плотностью вероятности

$$A_{k+1} \exp \frac{-(w_{k+1} - w'_{k+1})^2}{\sigma_{k+1}}.$$

Здесь  $\sigma_{k+1}$  — удвоенная дисперсия нормального распределения; константа  $A_{k+1}$  выбирается так, чтобы выполнялось условие нормировки вероятности, то есть

$$A_{k+1} = \frac{1}{\int_0^1 \exp(-(w_{k+1} - w'_{k+1})^2/\sigma_{k+1}) dw_{k+1}}.$$

3. Вычисление целевой функции (нахождение коэффициента рождаемости). В выбранной точке  $w_{k+1}$  вычисляется значение целевой функции  $a(w_{k+1})$ .

Далее процесс повторяется. Условием остановки метода в простейшем случае является исчерпание заданного числа шагов. Для построенного метода справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $\sigma_k = 2/\ln k$ . Тогда последовательность точек испытаний  $w_k$  является всюду плотной на отрезке  $[0, 1]$  с вероятностью 1. Иными словами, для любой точки  $w$  из  $[0, 1]$  и любого числа  $\theta > 0$  вероятность попадания хотя бы одной точки испытания  $w_k$  в  $\theta$ -окрестность  $O_\theta(w)$  точки  $w$  стремится к единице при  $k$ , стремящемся к бесконечности.

**Доказательство.** Возьмем произвольное положительное число  $\theta < 0.5$  и произвольную точку  $w \in [0, 1]$ . Рассмотрим ее  $\theta$ -окрестность  $O_\theta(w)$ . Вероятность  $P_k$  для точки  $w_k$  попасть в  $O_\theta(w)$  при заданной  $w'_k$  выражается следующим образом:

$$P_k = A_k \int_{w-\theta}^{w+\theta} \exp(-(w_k - w'_k)^2/\sigma_k) dw_k.$$

Принимая во внимание равенство  $\sigma_k = 2/\ln k$ , можно сделать следующие оценки:

$$A_k > \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_k}} = \frac{\sqrt{\ln k}}{\sqrt{2\pi}}; \quad 1 > \exp(-(w_k - w'_k)^2/\sigma_k) > \exp\left(-\frac{\ln k}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Тогда вероятность  $P_k$  можно оценить снизу

$$P_k > A_k \frac{2\theta}{\sqrt{k}} > \frac{\theta\sqrt{2\ln k}}{\sqrt{\pi k}}.$$

Вероятность  $Q_N$  непопадания за  $N$  итераций метода ни одной точки испытания в избранную окрестность оценивается следующим образом:

$$Q_N < \left(1 - \frac{\theta\sqrt{2\ln N}}{\sqrt{\pi N}}\right)^N.$$

Поскольку

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\theta \sqrt{2 \ln N}}{\sqrt{\pi N}} \right)^N = 0,$$

то  $Q_N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Но это также означает, что вероятность попадания хотя бы одной точки испытания в  $O_\theta(w)$  стремится к единице, что и требовалось доказать. Из предыдущего примера следует, что в этом случае для любой окрестности точки  $w^*$  максимума функции  $a(w)$  выполняется предельное соотношение (11).  $\square$

Покажем, что вероятность выбора точки  $w_k$  на  $k$ -м шаге метода из любой окрестности точки  $w^*$  стремится к единице при  $k$ , стремящемся к бесконечности.

Пусть  $\delta > 0$  — сколь угодно малое положительное число. Возьмем число  $\theta = \delta/2$ . Рассмотрим две окрестности точки  $w^*$ :  $O_\theta(w^*) \subset O_\delta(w^*)$ . Как следует из (10), вероятность выбора опорной точки  $w'_k$  из окрестности  $O_\theta(w^*)$  стремится к единице при  $k \rightarrow \infty$ . Если  $w'_k \in O_\theta(w^*)$ , то вероятность выбора точки следующего испытания  $w_k$  из окрестности  $O_\delta(w^*)$  можно оценить снизу следующим образом:

$$\begin{aligned} P_k^* &= A_k \int_{w^* - \delta}^{w^* + \delta} \exp\left(-\frac{(w_k - w'_k)^2}{\sigma_k}\right) dw_k > \frac{\sqrt{\ln k}}{\sqrt{2\pi}} \int_{w^* - \delta}^{w^* + \delta} \exp\left(-\frac{(w_k - w'_k)^2 \ln k}{2}\right) dw_k = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(w^* - w'_k - \delta)\sqrt{\ln k}}^{(w^* - w'_k + \delta)\sqrt{\ln k}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy. \end{aligned} \tag{12}$$

Поскольку  $w^* - \delta < w^* - \theta < w'_k < w^* + \theta < w^* + \delta$ , то

$$(w^* - w'_k - \delta)\sqrt{\ln k} \rightarrow -\infty, \quad (w^* - w'_k + \delta)\sqrt{\ln k} \rightarrow +\infty$$

при  $k \rightarrow +\infty$ . А это означает, что правая часть оценки (12) увеличивается до единицы, следовательно, вероятность выбора точки очередного испытания из сколь угодно малой окрестности  $O_\delta(w^*)$  точки  $w^*$  стремится к единице по мере увеличения числа шагов.

Построенный метод глобальной оптимизации относится к классу стохастических биоинспирированных эволюционных алгоритмов, поскольку использует общие идеи биологической эволюции. Но в отличие от других подобных алгоритмов, которые являются эвристическими, для него, как было показано выше, имеет место сходимость по вероятности последовательности точек испытаний к точке глобального максимума целевой функции. Этот алгоритм легко обобщается для решения задачи оптимизации функции произвольного числа переменных, заданной в произвольном многомерном параллелепипеде и даже в гильбертовом пространстве [43]. На рис. 1 представлен график изменения распределения вероятности выбора очередной точки испытания по мере увеличения числа шагов. Из графика видно, что с течением времени происходит концентрация распределения вероятности в сколь угодно малой окрестности точки глобального максимума.

Заметим, что поставленную задачу оптимизации можно понимать как задачу получения информации о расположении точки глобального максимума целевой функции. В соответствии с введенным определением, информация представляет собой выделенное подмножество из допустимого сегмента. При этом точную информацию или единственную альтернативу, реализующую максимум, представляет сама точка  $w^*$ . Но в действительности численными методами получить эту точку невозможно. Можно получить лишь подмножество сегмента, содержащее эту точку с большей или меньшей степенью уверенности. При этом выделяемое подмножество наиболее

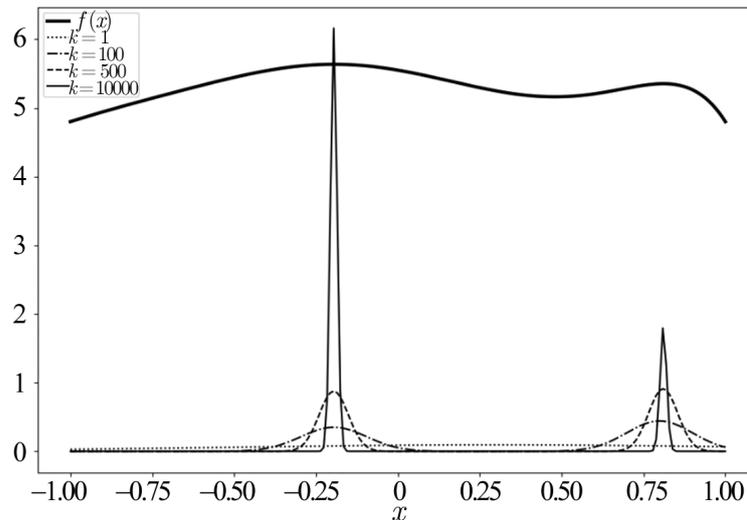


Рис. 1. Изменение распределения вероятности  $P_k(w)$  выбора точки очередного испытания при нахождении максимума функции  $f(w)$ , заданной на отрезке  $[-1, 1]$ , в зависимости от номера  $k$  шага метода

Fig. 1. Change in the probability distribution  $P_k(w)$  of choosing the point of the next test when finding the maximum of the function  $f(w)$  specified on the segment  $[-1, 1]$  depending on the method step number  $k$

целесообразно рассматривать как нечеткое, где вероятность выбора очередной точки испытания задает распределение показателя принадлежности к этому подмножеству. Это выделяемое подмножество и является информацией о максимуме функции, которая приобретает в результате работы алгоритма. Следует отметить, что рассмотренный метод является наглядной иллюстрацией изложенного выше общего процесса получения информации. Здесь исходное неоднородное распределение, задаваемое значениями целевой функции, в ходе работы метода генерирует новое распределение показателя принадлежности, благодаря чему определяется выделенное на данном шаге нечеткое подмножество, представляющее полученную к этому моменту информацию о возможном расположении точки максимума. По мере увеличения числа шагов все более возрастает степень выделенности подмножества, что легко можно проверить, рассчитав энтропию соответствующего распределения. Тем самым от шага к шагу возрастает информация о расположении точки максимума.

Такое понимание информации и метода оптимизации как процесса постепенного получения все большей информации позволяет сформулировать новое условие остановки алгоритма. Для итерационного алгоритма решения задачи оптимизации большое значение имеет условие остановки. Наиболее простым условием является ограничение на число шагов. Это условие очень популярно в численных методах глобальной оптимизации. Однако очевидно, что при этом нет никакой гарантии, что полученное за фиксированное число шагов алгоритма решение будет хорошей аппроксимацией искомого оптимума. Другим возможным условием остановки является прекращение улучшения значения целевой функции. Если, начиная с некоторого момента, получаемое решение практически не меняется, то процесс оптимизации заканчивается. Но для эвристических методов есть опасность прекращения улучшений из-за попадания в локальный экстремум. В результате может иметь место ситуация, что разные алгоритмы в одной и той же задаче дают отличающиеся результаты решения оптимизационной задачи (см. например, результаты, приведенные в [44]).

Значительно более эффективным условием остановки является условие достижения заданной точности приближения точки оптимума. Такое условие используется в некоторых сходящихся

алгоритмах детерминированного поиска: в методе «золотого сечения», в методе Пиявского и т. п. Однако использование этого условия в стохастических алгоритмах сталкивается с серьезными затруднениями. Здесь обычно невозможно оценить полученную точность приближения. Но эти затруднения можно решить, если понимать полученную в результате численного счета информацию не как отдельную точку наилучшего приближения, а как выделенное нечеткое подмножество возможного расположения точки глобального оптимума. Это множество определяется распределением показателя принадлежности по области поиска. В рассмотренном методе оптимизации роль такого показателя выполняла вероятность выбора точки очередного испытания. Тогда для любых заранее заданных малых положительных чисел  $\epsilon$  и  $\delta$  можно продолжать процедуру поиска до тех пор, пока показатель принадлежности для некоторого интервала длины  $\delta$  не превысит уровень  $1 - \epsilon$ . Такое условие будет гарантировать, что построенное приближение будет отличаться от настоящей точки максимума на более чем на  $\delta$  с достоверностью (вероятностью) не ниже чем  $(1 - \epsilon)$ .

Другим удобным условием останова может служить достижение заданного уровня концентрации показателя принадлежности. Уровень концентрации, как уже отмечалось, можно определить по значению энтропии. Тогда можно задать значение  $\epsilon$  и продолжать работу метода до тех пор, пока энтропия распределения показателя принадлежности не снизится ниже этого  $\epsilon$ . Такое условие останова фактически означает получение заданного количества информации относительно расположения точки оптимума.

Приведенный пример показывает, что новое понимание информации может быть полезно для совершенствования численных методов оптимизации. Положительный эффект от нового определения информации не исчерпывается только областью оптимизации. Ведь многие современные информационные технологии строятся на основе применения оптимизационных процедур, например, обучение нейронных сетей, решение задачи ранжирования, восстановление функции сравнения и т. п. Здесь новое понимание информации также может быть полезным. Например, решение задачи классификации нейронной сетью можно понимать как процесс отображения выделенного класса элементов из обучающей выборки в выделяемое подмножество весов нейронной сети [45]. В ходе обучения сети происходит постепенное сужение выделяемого подмножества весов, чтобы обеспечивать все более точную реакцию нейронной сети на предъявляемые для распознавания элементы. Как известно, эта задача решается на основе методов оптимизации, где, как было показано, новый подход позволяет сформулировать новые критерии останова. Соответственно, для сети это может быть представлено в виде условия завершения процесса обучения. Аналогичную ситуацию можно видеть при решении задачи ранжирования [46]. При идентификации функции сравнения в задаче ранжирования опять-таки фактически осуществляется постепенное сужение допустимого подмножества ее коэффициентов. Решение такой задачи снова можно выполнить с помощью численных методов оптимизации или с помощью нейронных сетей [46].

## Заключение

В результате проведенного исследования сформулировано новое определение информации как результат отображения, при котором выделение подмножества из множества прообразов приводит к выделению соответствующего подмножества во множестве образов.

С учетом того, что выделяемое подмножество можно понимать как нечеткое, допустимо другое эквивалентное определение информации как результат отображения, при котором повышение неоднородности распределения показателя присутствия на множестве прообразов приводит к повышению неоднородности распределения соответствующего показателя на множестве образов.

Это определение позволяет преодолеть недостатки предыдущих подходов к пониманию сущности информации. Данное определение не связывается жестко с вероятностью. Но в случае,

когда в качестве показателя принадлежности берется вероятность, оно позволяет получить то понимание информации, которое используется в классической математической теории. Тем самым данное определение сохраняет все ценные возможности классического подхода. В то же время отказ от вероятностной основы для информации расширяет сферу ее возможного применения.

Пусть, например, имеется план-карта, на которой крестиком отмечен квадрат расположения скрытого клада. Место, где зарыт клад, не является случайным событием, подобным исходу при броске кости. Однако данная карта представляет информацию о месте клада путем выделения подмножества точек его возможного расположения. Такое понимание информации, в отличие от классического, можно использовать в геоинформатике.

Данное определение не зависит от необходимости запоминания реализовавшегося выбора. Тем самым обеспечивается возможность применения этого определения для случая физической микроинформации.

Предлагаемое понимание информации через повышение неоднородности распределения показателя принадлежности согласуется с другими известными формальными подходами, используемыми в области компьютерных наук. Известно, что понятие распределения существенно используется в квантовой информации. Единицу квантовой информации — кубит — можно понять как комплекснозначное распределение на двухточечном множестве. Операции с квантовой информацией можно понимать как преобразования (отображения) распределений [33]. То есть в основе квантовой информации также лежит концепция распределения.

Информация как результат отображения между двумя распределениями соответствует колмогоровскому подходу. Информационная сложность двоичной строки по Колмогорову — это длина кратчайшей программы, которая производит данную строку на универсальной машине Тьюринга. В этом определении можно заметить использование двух распределений, одно из которых (программа машины Тьюринга) генерирует второе — двоичную строку, то есть фактически рассматривается отображение между двумя распределениями. При этом свойства (неоднородность) образа характеризуются некоторыми свойствами прообраза (количеством операторов).

Предлагаемое определение информации также согласуется с современными общенаучными подходами к ее пониманию. Согласно Д. Касагранду, информация — это любой тип паттерна (режим, образец, шаблон, узор, распределение), который влияет на формирование или преобразование других паттернов [47]. Здесь можно видеть отображение одного распределения в другое.

В рамках еще одного подхода информация понимается как сигнал [48]. Сигнал — это низкоэнергетический вход в систему, который не является значимым для обеспечения системы энергией, но связан с распределением значимых источников энергии и может использоваться для прогнозирования поступления энергии на высокоэнергетических входах в более позднее время. Здесь снова можно заметить отображение распределения значимых энергетических источников в распределение энергии слабого источника.

Рассмотренное определение может быть очень полезным при работе с семантической информацией. Оно позволяет оперировать нечеткими лингвистическими переменными [49]. Однако очевидно, что проблема определения семантической информации требует отдельного подробного рассмотрения. При исследовании информации в рамках введенного определения могут применяться результаты теории возможностей.

Введенное определение имеет большое методическое значение при подготовке IT-специалистов. Оно позволяет сформировать отчетливые, корректные представления о сущности базового понятия в области информационных технологий, благодаря чему система обучения становится логичной и последовательной. При этом освоение такого определения не сопряжено со значительными математическими трудностями, вполне доступно студентам младших курсов обучения. Разработанный подход внедрен в учебный процесс подготовки бакалавров информационных

технологий в Нижегородском государственном университете имени Н. И. Лобачевского. Здесь указанное определение изучается в рамках дисциплин «Теория информации», «Математическое моделирование процессов отбора», а также рассматривается в обзорном курсе «История и методология прикладной математики и информатики» [50, 51].

Предлагаемое объяснение информации позволяет сделать это понятие достаточно строгим, что дает возможность его применения в сфере компьютерных наук. Это определение может быть использовано для совершенствования численных методов оптимизации, равно как и других методов информационных технологий.

*Автор выражает признательность студенту ННГУ С. А. Налчаджяну за помощь в подготовке графиков для статьи.*

## Список литературы

1. *Kosta A., Pappas N., Angelakis V.* Age of Information: A New Concept, Metric, and Tool // *Foundations and Trends in Networking*. 2017. Vol. 12, no. 3. P. 162–259. DOI: 10.1561/13000000060.
2. *Maatouk A., Kriouile S., Assaad M., Ephremides A.* The Age of Incorrect Information: A New Performance Metric for Status Updates // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 2020. Vol. 28, no. 5. P. 2215–2228. DOI: 10.1109/TNET.2020.3005549.
3. *Leinster T.* Entropy and diversity: the axiomatic approach. New York: Cambridge University Press, 2021. 442 p. DOI: 10.48550/arXiv.2012.02113.
4. *Мазур М.* Качественная теория информации. М.: Мир, 1974. 238 с.
5. *Колмогоров А. Н.* Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей // *Успехи математических наук*. 1983. Т. 38, № 4. С. 27–36. DOI: 10.1070/rm1983v038n04abeh004203.
6. *Чернавский Д. С.* Синергетика и информация: Динамическая теория информации. М.: Наука, 2001. 304 с.
7. *Bates M. J.* Concepts for the Study of Information Embodiment // *Library Trends*. 2018. Vol. 66, no. 3. P. 239–266. DOI: 10.1353/lib.2018.0002.
8. *Adriaans P.* A Critical Analysis of Floridi’s Theory of Semantic Information // *Knowledge, Technology & Policy*. 2010. Vol. 23. P. 41–56. DOI: 10.1007/s12130-010-9097-5.
9. *Floridi L.* What is the philosophy of information? // *Metaphilosophy*. 2002. Vol. 33, no. 1–2. P. 123–145. DOI: 10.1111/1467-9973.00221.
10. *Ган Л.* Философия информации и основы будущей китайской философии науки и техники // *Вопросы философии*. 2007. № 5. С. 45–57.
11. *Adriaans P., van Benthem J.* Philosophy of information (Handbook of the philosophy of science). North Holland, 2008. 1000 p.
12. *Коллин К. К.* Философия информации: структура реальности и феномен информации // *Метафизика*. 2013. Т. 4(10). С. 61–84.
13. *Sequoiah-Grayson S.* The Metaphilosophy of Information // *Minds and Machines*. 2007. Vol. 17. P. 331–344. DOI: 10.1007/s11023-007-9072-4.
14. *Mingers J., Standing C.* What is information? Toward a theory of information as objective and veridical // *Journal of Information Technology*. 2018. Vol. 33, no. 2. P. 85–104. DOI: 10.1057/s41265-017-0038-6.
15. *Diaz Nafria J.* What is information? A Multidimensional Concern // *TripleC*. 2010. Vol. 8, no. 1. P. 77–108. DOI: 10.31269/triplec.v8i1.76.
16. *Crnkovic G., Hofkirchner W.* Floridi’s “Open Problems in Philosophy of Information”, Ten Years Later // *Information*. 2011. Vol. 2, no. 2. P. 327–359. DOI: 10.3390/info2020327.
17. *Robinson L., Bawden D.* Mind the Gap: Transitions between concepts of information in varied

- domains // *Theories of Information, Communication and Knowledge*. 2014. Vol. 34. P. 121–141. DOI: 10.1007/978-94-007-6973-1\_6.
18. *Лекторский В. А., Пружинин Б. И., Бодякин В. И., Дубровский Д. И., Колин К. К., Мелик-Гайказян И. В., Урсул А. Д.* Информационный подход в междисциплинарной перспективе (материалы «круглого стола») // *Вопросы философии*. 2010. № 2. С. 84–122.
  19. *Zins C.* Conceptual Approaches to Defining Data, Information and Knowledge // *Journal of the American Society for Information Science and Technology*. 2007. Vol. 58, no. 4. P. 479–493. DOI: 10.1002/asi.20508.
  20. *Liew A.* Understanding Data, Information, Knowledge And Their Inter-Relationships // *Journal of Knowledge Management Practice*. 2007. Vol. 8, no. 2.
  21. *Capurro R., Hjørland B.* The Concept of Information // *Annual Review of Information Science and Technology*. 2003. Vol. 37, no. 1. P. 343–411. DOI: 10.1002/aris.1440370109.
  22. *Beynon-Davies P.* Significance: Exploring the nature of information, systems and technology. London: Palgrave Macmillan, 2010. 355 p.
  23. *Callaos N., Callaos B.* Toward a Systemic Notion of Information: Practical Consequences // *Informing Science*. 2002. Vol. 5, no. 1. P. 1–11. DOI: 10.28945/532.
  24. *Vigo R.* Representational information: a new general notion and measure of information // *Information Sciences*. 2011. Vol. 181, no. 21. P. 4847–4859. DOI: 10.1016/j.ins.2011.05.020.
  25. *Deutsch D., Maretto C.* Constructor theory of information // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2015. Vol. 471, no. 2174. P. 20140540. DOI: 10.1098/rspa.2014.0540.
  26. *Dittrich T.* “The concept of information in physics”: an interdisciplinary topical lecture // *European Journal of Physics*. 2015. Vol. 36, no. 1. P. 015010. DOI: 10.1088/0143-0807/36/1/015010.
  27. *Clifton R., Bub J., Halvorson H.* Characterizing quantum theory in terms of information-theoretic constraints // *Foundations of Physics*. 2003. Vol. 33. P. 1561–1591. DOI: 10.1023/A:1026056716397.
  28. *Morrison M. L., Rosenberg N. A.* Mathematical bounds on Shannon entropy given the abundance of the *i*th most abundant taxon // *Journal of Mathematical Biology*. 2023. Vol. 87. P. 76. DOI: 10.1007/s00285-023-01997-3.
  29. *Cushman S. A.* Entropy in landscape ecology: a quantitative textual multivariate review // *Entropy*. 2021. Vol. 23, no. 11. P. 1425. DOI: 10.3390/e23111425.
  30. *Беляев М. А., Малинина Л. А., Лысенко В. В.* Основы информатики: Учебник для вузов. М.: Феникс, 2006. 352 с.
  31. *Симонович С. В.* Информатика. Базовый курс: Учебник для вузов. 3-е изд. Стандарт третьего поколения. СПб.: Питер, 2011. 640 с.
  32. *Макарова Н. В., Волков В. Б.* Информатика: Учебник для вузов. СПб.: Питер, 2011. 576 с.
  33. *Nielsen M., Chuang I.* Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 702 p. DOI: 10.1017/CBO9780511976667.
  34. *Заде Л. А.* Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // *Математика сегодня*. 1974. С.5–49.
  35. *Заде Л. А.* Нечеткие множества // *Нечеткие системы и мягкие вычисления*. 2015. Т. 10, № 1. С. 7–22.
  36. *Kuzenkov O., Morozov A.* Towards the Construction of a Mathematically Rigorous Framework for the Modelling of Evolutionary Fitness // *Bulletin of Mathematical Biology*. 2019. Vol. 81, no. 11. P. 4675–4700. DOI: 10.1007/s11538-019-00602-3.
  37. *Перфильева Е. Г.* Приложения теории нечетких множеств // *Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика»*. 1990. Т. 28. С. 83–151.

38. *Kuzenkov O., Ryabova E.* Variational Principle for Self-replicating Systems // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2015. Vol. 10, no. 2. P. 115–128. DOI: 10.1051/mmnp/201510208.
39. *Kuzenkov O. A., Novozhenin A. V.* Optimal control of measure dynamic // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015. Vol. 21, no.1-3. P. 159–171. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.08.024.
40. *Sandhu S., Morozov A., Kuzenkov O.* Revealing Evolutionarily Optimal Strategies in Self-Reproducing Systems via a New Computational Approach // *Bulletin of Mathematical Biology* 2019. Vol. 81, no. 11. P. 4701–4725. DOI: 10.1007/s11538-019-00663-4.
41. *Muller I.* A History of Thermodynamics: The Doctrine of Energy and Entropy. Berlin: Springer, 2007. 330 p. DOI: 10.1007/978-3-540-46227-9.
42. *Shu J. J.* A new integrated symmetrical table for genetic codes // *Biosystems*. 2017. Vol. 151. P. 21–26. DOI: 10.1016/j.biosystems.2016.11.004.
43. *Morozov A. Y., Kuzenkov O. A., Sandhu S. K.* Global optimisation in hilbert spaces using the survival of the fittest algorithm // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2021. Vol. 103. P. 106007. DOI: 10.1016/j.cnsns.2021.106007.
44. *Yao X., Liu Y., Lin G.* Evolutionary programming made faster // *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 1999. Vol. 3, no. 2. P. 82–102. DOI: 10.1109/4235.771163.
45. *Kuzenkov O., Morozov A., Kuzenkova G.* Recognition of patterns of optimal diel vertical migration of zooplankton using neural networks // *IJCNN 2019 — International Joint Conference on Neural Networks*, Budapest. Hungary. 2019. P. 1–6. DOI: 10.1109/IJCNN.2019.8852060.
46. *Kuzenkov O., Kuzenkova G.* Identification of the fitness function using neural networks // *Procedia Computer Science*. 2020. Vol. 169. P. 692–697. DOI: 10.1016/j.procs.2020.02.179.
47. *Casagrande D.* Information as verb: Re-conceptualizing information for cognitive and ecological models // *Journal of Ecological Anthropology*. 1999. Vol. 3, no. 1. P. 4–13. DOI: 10.5038/2162-4593.3.1.1.
48. *Dusenbery D. B.* Sensory Ecology. New York: Freeman, 1992. 558 p.
49. *Заде Л. А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 167 с.
50. *Кузенков О. А., Кузенкова Г. В., Киселева Т. П.* Компьютерная поддержка учебно-исследовательских проектов в области математического моделирования процессов отбора // *Образовательные технологии и общество*. 2019. Т. 22, № 1. С. 152–163.
51. *Кузенков О. А.* Изучение концепции информации студентами ИТ-направлений // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2023. Т. 19, № 1. С. 13–23. DOI: 10.25559/SITITO.019.202301.013-023.

## References

1. Kosta A, Pappas N, Angelakis V. Age of Information: A New Concept, Metric, and Tool. *Foundations and Trends in Networking*. 2017;12(3):162–259. DOI: 10.1561/13000000060.
2. Maatouk A, Kriouile S, Assaad M, Ephremides A. The Age of Incorrect Information: A New Performance Metric for Status Updates. *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 2020;28(5):2215–2228. DOI: 10.1109/TNET.2020.3005549.
3. Leinster T. Entropy and diversity: the axiomatic approach. New York: Cambridge University Press; 2021. 442 p. DOI: 10.48550/arXiv.2012.02113.
4. Mazur M. Qualitative information theory. М.: Mir; 1974. 238 p. (in Russian). (Jakosciova teoria informacji. Warszawa. Wydawnictwa Naukowo techniczne. 1970.)
5. Kolmogorov AN. Combinatorial foundations of information theory and the calculus of probabilities. *Russian Mathematical Surveys*. 1983;38(4):29–40. DOI: 10.1070/rm1983v038n04abeh004203.

6. Chernavsky DS. Synergetics and information. M.: Nauka; 2001. 304 p. (in Russian).
7. Bates MJ. Concepts for the Study of Information Embodiment. *Library Trends*. 2018;66(3):239–266. DOI: 10.1353/lib.2018.0002.
8. Adriaans P. A Critical Analysis of Floridi’s Theory of Semantic Information. *Knowledge, Technology & Policy*. 2010;23:41–56. DOI: 10.1007/s12130-010-9097-5.
9. Floridi L. What is the philosophy of information? *Metaphilosophy*. 2002;33:1–2;123–145. DOI: 10.1111/1467-9973.00221.
10. Gang L. Philosophy of information and the foundations of the future Chinese philosophy of science and technology. *Questions of philosophy*. 2007;5:45–57 (in Russian).
11. Adriaans P, van Benthem J. *Philosophy of information (Handbook of the philosophy of science)*. North Holland, 2008. 1000 p.
12. Colin KK. Philosophy of information: the structure of reality and the phenomenon of information. *Metaphysics*. 2013;4(10):61–84 (in Russian).
13. Sequoiah-Grayson S. The Metaphilosophy of Information. *Minds and Machines*. 2007;17:331–344. DOI: 10.1007/s11023-007-9072-4.
14. Mingers J., Standing C. What is information? Toward a theory of information as objective and veridical. *Journal of Information Technology*. 2018;33(2):85–104. DOI: 10.1057/s41265-017-0038-6.
15. Díaz Nafría J. What is information? A Multidimensional Concern. *TripleC*. 2010;8(1):77–108. DOI: 10.31269/triplec.v8i1.76.
16. Crnkovic G, Hofkirchner W. Floridi’s “Open Problems in Philosophy of Information”, Ten Years Later. *Information*. 2011;2(2):327–359. DOI: 10.3390/info2020327.
17. Robinson L, Bawden D. Mind the Gap: Transitions between concepts of information in varied domains. *Theories of Information, Communication and Knowledge*. 2014;34:121–141. DOI: 10.1007/978-94-007-6973-1\_6.
18. Lektorsky VA, Pruzhinin BI, Bodyakin VI, Dubrovsky DI, Kolin KK, Melik-Gaikazyan IV, Ursul AD. The information approach in interdisciplinary prospect (a round-table discussion). *Russian studies in philosophy*. 2010;2:84–122 (in Russian).
19. Zins C. Conceptual Approaches to Defining Data, Information and Knowledge. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*. 2007;58(4):479–493. DOI: 10.1002/asi.20508.
20. Liew A. Understanding Data, Information, Knowledge And Their Inter-Relationships. *Journal of Knowledge Management Practice*. 2007;8(2).
21. Capurro R, Hjørland B. The Concept of Information. *Annual Review of Information Science and Technology*. 2003;37(1):343–411. DOI: 10.1002/aris.1440370109.
22. Beynon-Davies P. *Significance: Exploring the nature of information, systems and technology*. London: Palgrave Macmillan, 2010. 355 p.
23. Callaos N, Callaos B. Toward a Systemic Notion of Information: Practical Consequences. *Informing Science*. 2002;5(1):1–11. DOI: 10.28945/532.
24. Vigo R. Representational information: a new general notion and measure of information. *Information Sciences*. 2011;181(21):4847–4859. DOI: 10.1016/j.ins.2011.05.020.
25. Deutsch D, Marett C. Constructor theory of information. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2015;471(2174):20140540. DOI: 10.1098/rspa.2014.0540.
26. Dittrich T. “The concept of information in physics”: an interdisciplinary topical lecture. *European Journal of Physics*. 2015;36(1):015010. DOI: 10.1088/0143-0807/36/1/015010.
27. Clifton R, Bub J, Halvorson H. Characterizing quantum theory in terms of information-theoretic constraints. *Foundations of Physics*. 2003;33:1561–1591. DOI: 10.1023/A:1026056716397.

28. Morrison ML, Rosenberg NA. Mathematical bounds on Shannon entropy given the abundance of the *i*th most abundant taxon. *Journal of Mathematical Biology*. 2023;87:76. DOI: 10.1007/s00285-023-01997-3.
29. Cushman SA. Entropy in landscape ecology: a quantitative textual multivariate review. *Entropy*. 2021;23(11):1425. DOI: 10.3390/e23111425.
30. Belyaev MA, Malinina LA, Lysenko VV. *Fundamentals of Computer Science: Textbook for Universities*. M.: Phoenix, 2006. 352 p. (in Russian).
31. Simonovich SV. *Informatics. Basic course: Textbook for Universities*. 3rd ed. Third generation standard. St. Petersburg: Peter, 2011. 640 p. (in Russian).
32. Makarova NV, Volkov VB. *Computer science: Textbook for Universities*. St. Petersburg: Peter, 2011. 576 p (in Russian).
33. Nielsen M, Chuang I. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 702 p. DOI: 10.1017/CBO9780511976667.
34. Zadeh LA. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. 1973;SMC-3(1):28–44. DOI: 10.1109/TSMC.1973.5408575.
35. Zadeh LA. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965;8(3):338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.
36. Kuzenkov O, Morozov A. Towards the Construction of a Mathematically Rigorous Framework for the Modelling of Evolutionary Fitness. *Bulletin of Mathematical Biology*. 2019;81(11):4675–4700. DOI: 10.1007/s11538-019-00602-3.
37. Perfl'eva IG. Applications of the theory of fuzzy sets. *Journal of Soviet Mathematics*. 1992;58(2): 148–194. DOI: 10.1007/BF01097427.
38. Kuzenkov O, Ryabova E. Variational principle for self-replicating systems. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2015;10(2):115–128. DOI: 10.1051/mmnp/201510208.
39. Kuzenkov OA, Novozhenin AV. Optimal control of measure dynamic. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015;21(1-3):159–171. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.08.024.
40. Sandhu S, Morozov A, Kuzenkov O. Revealing evolutionarily optimal strategies in self-reproducing systems via a new computational approach. *Bulletin of Mathematical Biology* 2019;81(11):4701–4725. DOI: 10.1007/s11538-019-00663-4.
41. Muller I. *A History of Thermodynamics: The Doctrine of Energy and Entropy*. Berlin: Springer, 2007. 330 p. DOI: 10.1007/978-3-540-46227-9.
42. Shu JJ. A new integrated symmetrical table for genetic codes. *Biosystems*. 2017;151:21–26. DOI: 10.1016/j.biosystems.2016.11.004.
43. Morozov AY., Kuzenkov OA, Sandhu SK. Global optimisation in hilbert spaces using the survival of the fittest algorithm. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2021;103:106007. DOI: 10.1016/j.cnsns.2021.106007.
44. Yao X, Liu Y, Lin G. Evolutionary programming made faster. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 1999;3(2):82–102. DOI: 10.1109/4235.771163.
45. Kuzenkov O, Morozov A, Kuzenkova G. Recognition of patterns of optimal diel vertical migration of zooplankton using neural networks. *IJCNN 2019 – International Joint Conference on Neural Networks*, Budapest. Hungary. 2019. P. 1–6. DOI: 10.1109/IJCNN.2019.8852060.
46. Kuzenkov O, Kuzenkova G. Identification of the fitness function using neural networks. *Procedia Computer Science*. 2020;169(692–697). DOI: 10.1016/j.procs.2020.02.179.
47. Casagrande D. Information as verb: Re-conceptualizing information for cognitive and ecological models. *Journal of Ecological Anthropology*. 1999;3(1):4–13. DOI: 10.5038/2162-4593.3.1.1.
48. *Dusenbery DB*. *Sensory Ecology*. New York: Freeman, 1992. 558 p.

49. Zade LA. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. Information Sciences. 1975;8(3):199–249. DOI: 10.1016/0020-0255(75)90036-5.
50. Kuzenkov O, Kuzenkova G, Kiseleva T. Computer support of training and research projects in the field of mathematical modeling of selection processes. Educational technologies and society. 2019;22(1):152–163 (in Russian).
51. Kuzenkov OA. Studying the Concept of Information by IT-students. Modern Information Technologies and IT-Education. 2023;19(1):13–23 (in Russian). DOI: 10.25559/SITITO.019.202301.013-023.



*Кузенков Олег Анатольевич* — родился в Горьковской области (1961). Окончил с отличием факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (1989, ГГУ). С 2015 года работает на кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Научные интересы — теория меры, оптимизация и теория оптимального управления, математическое моделирование. Имеет более 120 публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: kuzenkov\_o@mail.ru  
ORCID: 0000-0001-9407-0517  
AuthorID (eLibrary.Ru): 12881