



СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА ДВУХМОДОВОЙ КОНЕЧНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ЛАЗЕРА НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

А.П. Кузнецов, А.П. Широков

Представлены результаты численного исследования конечномерной двухмодовой модели, приближенно описывающей сценарии перехода к многочастотному режиму в лазере на свободных электронах с низкодобротной электродинамической системой. Выявлены качественно разные механизмы потери устойчивости одночастотной генерации. Приведены карты динамических режимов и показателей Ляпунова на плоскости параметров коэффициент передачи – нормированная длина пространства взаимодействия.

Введение

При использовании лазера на свободных электронах (ЛСЭ) в качестве генератора когерентного электромагнитного излучения важным является вопрос о характере взаимодействия продольных мод, а также о различных путях возникновения многочастотного режима. Этой проблеме посвящен ряд работ [1–7], где исследуются генераторы как с высокодобротными, так и с низкодобротными электродинамическими системами. В случае ЛСЭ с низкодобротной электродинамической системой сильная связь мод может быть сведена к ситуации попарного взаимодействия основной и каждой из паразитных мод. В работе [8] для описания процессов в таком генераторе было предложено дискретное отображение. Оно получено в рамках хорошо известного в микроволновой электронике приближения, основанного на представлении взаимодействия в виде двух этапов: модуляции потока электронов на входе генератора и передачи на выходе системы энергии сгруппированными электронами обратной электромагнитной волне [3,5,9]. В настоящей работе приведены результаты исследования этого отображения методами нелинейной динамики, что позволяет продемонстрировать богатство возможных динамических режимов, обсудить различные пути возникновения многочастотного режима и тонкие детали перехода к хаосу.

Основные дифференциальные и разностные уравнения двухмодового приближения

Пусть в полосу усиления генератора попадает много неэквидистантно расположенных продольных мод. В этом случае можно считать, что усиление каждой паразитной моды определяется только полем основной и слабо зависит от

других паразитных мод. Подобное взаимодействие можно описать следующей системой уравнений [8]:

$$du/d\zeta = \chi_1(\zeta)\text{Im}\{\alpha_n \exp(i\varphi+i\Phi) + \tilde{\alpha}_n \exp(i\tilde{\varphi}+i\tilde{\Phi})\}, \quad d\Phi/d\zeta = u, \quad (1)$$

$$d\alpha_n/d\zeta + i\Delta\alpha_n = i/\pi \chi_2(\zeta) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\varphi-i\Phi) d\varphi d\tilde{\varphi}, \quad (2)$$

$$d\tilde{\alpha}_n/d\zeta + i\tilde{\Delta}\tilde{\alpha}_n = i/\pi \chi_2(\zeta) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\tilde{\varphi}-i\tilde{\Phi}) d\tilde{\varphi} d\varphi, \quad (3)$$

с граничными условиями:

$$u(\zeta=0, \varphi, \tilde{\varphi}) = 0, \quad \Phi(\zeta=0, \varphi, \tilde{\varphi}) = 0,$$

$$\alpha_{n+1}(0) = R \alpha_n(L), \quad \tilde{\alpha}_{n+1}(0) = R \tilde{\alpha}_n(L).$$

Здесь α и $\tilde{\alpha}$ – амплитуды основной и паразитной мод, Δ и $\tilde{\Delta}$ – их расстройки, $\varphi, \tilde{\varphi} \in [0, 2\pi)$ – независимые начальные фазы электрона относительно каждой из мод, $\Phi(\zeta, \varphi, \tilde{\varphi})$ – изменение фаз электронов, R – коэффициент передачи, равный произведению коэффициентов отражения от зеркал, L – нормированная длина пространства взаимодействия.

В правых частях уравнений (1) – (3) присутствуют множители $\chi_{1,2}(\zeta)$, описывающие связь пучка с электромагнитными волнами. Считая, вслед за [3, 5, 9], что взаимодействие происходит лишь на входе и выходе системы, положим $\chi_1(\zeta) = L[\delta(\zeta) + \delta(\zeta - L)]/2$, $\chi_2(\zeta) = L\delta(\zeta - L)$. В этом случае систему уравнений (1) – (3) можно проинтегрировать аналитически. Если расстройки мод подобраны таким образом, чтобы усиление их амплитуд было максимальным, то в результате нетрудно получить следующее дискретное отображение [8]:

$$R^{-1}x_{n+1} - x_n = L^3 |J_0(y_n)J_1(x_n)|, \quad (4)$$

$$R^{-1}y_{n+1} - y_n = L^3 |J_0(x_n)J_1(y_n)|,$$

где $x_n = \alpha_n(0)L^2/2$, $y_n = \tilde{\alpha}_n(0)L^2/2$ – приведенные амплитуды основной и паразитной мод, J_0 и J_1 – функции Бесселя. В рамках этой модели возбуждение основной моды в отсутствие конкурента описывается функцией J_1 , а влияние на нее конкурента – функцией J_0 .

Как показано в работе [8], на плоскости параметров «коэффициент передачи R – нормированная длина пространства взаимодействия L » существуют две линии: L_{st} – соответствует значениям параметра L , при которых происходит возбуждение генератора на одной основной моде, и L_{cr} – момент возбуждения паразитной моды, причем аналитически была получена следующая формула:

$$L_{cr} \approx 2.9(R^{-1} - 1)^{1/3}. \quad (5)$$

При небольшой надкритичности $L > L_{cr}$ имеет место установившийся режим с генерацией, главным образом, двух продольных мод.

Механизмы потери устойчивости одночастотного режима

С целью установления детальной картины динамических режимов, демонстрируемых отображением (4), нами было проведено его численное исследование. Оно выявило существенно более тонкую структуру существующих режимов.

Карта динамических режимов и три ее увеличенных фрагмента приведены на рис. 1–4. На этих рисунках различными оттенками серого цвета показаны периодические режимы, цифры означают период реализующегося цикла, а буквы «s» или «n» обозначают соответственно синфазный или несинфазный режим. Вид карт, как известно, в определенной мере зависит от способа сканирования плоскости параметров, поскольку в богатых мультистабильными состояниями системах изображающая точка может притягиваться к различным аттракторам. При построении карт на рис.1–4 сканирование осуществлялось снизу вверх (а затем – слева направо), что наиболее отвечает физическому смыслу задачи, так как интерес представляют режимы, возникающие при повышении тока пучка – безразмерной длины пространства взаимодействия L .

Перейдем к обсуждению полученных результатов. Отметим прежде всего,

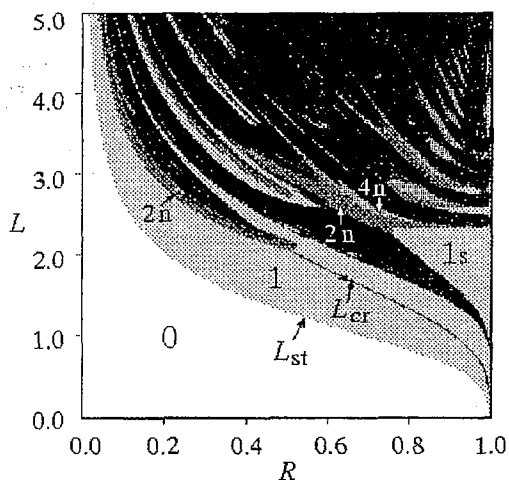


Рис. 1. Карта динамических режимов для отображения (4). Цифрами отмечены области: 0 – отсутствие колебаний, 1, 2, 4, 8 – циклы соответствующих периодов, буквами «s» и «n» отмечены синфазные и несинфазные режимы

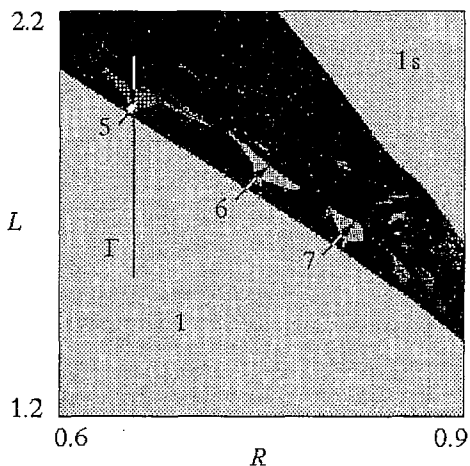


Рис. 2. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов, демонстрирующий расположение языков синхронизации. Цифрами отмечены периоды циклов

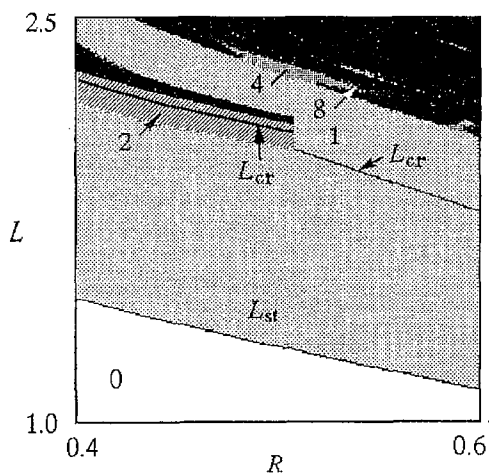


Рис. 3. Увеличенный фрагмент карты, иллюстрирующий режимы вблизи точки $R = 0.5$

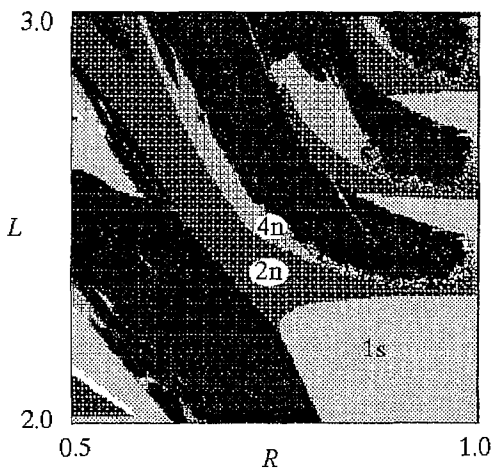


Рис. 4. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов, демонстрирующий многообразие синфазных и несинфазных циклов. Цифрами отмечены периоды циклов

что компьютерное моделирование выявляет линию L_{st} , которая на карте выглядит как граница окрашенных областей. Можно видеть также и линию L_{cr} , которая прорисовывается отдельными точками в наиболее светлой области серого цвета, отвечающей существованию устойчивой неподвижной точки отображения (4). В терминах дискретного отображения существование этих линий соответствует следующей смене режимов. При значениях $L < L_{st}$ существует единственная устойчивая неподвижная точка в начале координат фазовой плоскости $x = 0, y = 0$. На линии $L = L_{st}$ она становится неустойчивой, и возникает новая неподвижная точка, для которой $x > 0, y = 0$. При дальнейшем увеличении параметра L от L_{st} до L_{cr} величина x возрастает до определенного значения, и в момент $L = L_{cr}$ мягким образом появляется неподвижная точка, для которой $x > y > 0$. Это соответствует рождению второй паразитной моды.

Нетрудно видеть, однако, что такая картина, предсказанная в работе [8], имеет место лишь в правой части карты динамических режимов, то есть при достаточно больших значениях коэффициента отражения R . При небольших значениях R происходит следующее: неподвижная точка с координатами $x > 0, y = 0$ претерпевает бифуркацию удвоения периода, причем вторая мода остается по-прежнему невозмущенной, и лишь при дальнейшем увеличении параметра L происходит рождение паразитной моды. Рассмотрим условие осуществления каждого из описанных выше сценариев. Следуя авторам работы [8], предположим, что основная мода находится вблизи своего одномодового стационарного режима $x_{n+1} = x_n$, а паразитная мода возбуждается из шумов с малой амплитудой $y_n \ll 1$. Тогда амплитуду одномодовой генерации x^* (с учетом того, что функция J_0 почти равна единице) можно определить из первого уравнения системы (4)

$$(1-R)x^*/(RL^3) = |J_1(x^*)|, \quad (R \neq 0, L \neq 0). \quad (6)$$

Графическое решение уравнения (6) иллюстрируется с помощью рис. 5. Рассмотрим далее условие возбуждения паразитной моды $y_{n+1} > y_n$. Из второго уравнения системы (4) имеем

$$|J_0(x^*)J_1(y_n)| > y_n(1-R)/(RL^3).$$

Линеаризовав функцию Бесселя вблизи нуля ($J_1(y_n) \approx y_n/2, y_n > 0$), получим в окончательном виде условие возбуждения второй моды

$$2(1-R)/(RL^3) < |J_0(x^*)|. \quad (7)$$

На основании условия (7) в работе [8] и было получено уравнение (5) для критического значения параметра L . Нетрудно видеть, что оно определяет непрерывную линию на плоскости параметров. Однако условие (7) не является справедливым для всех значений параметра R из рассматриваемого диапазона. Оно было получено в предположении, что динамика отображения (4) определяется неподвижной точкой x^* . Если же при увеличении параметра L неподвижная точка

потеряет устойчивость и произойдет рождение 2-цикла раньше, чем возникнет генерация на второй частоте (то есть y_n станет больше нуля), то условие (7) теряет силу.

Рассмотрим возможность описанной ситуации, для чего исследуем неподвижную точку x^* уравнения (6) на устойчивость. Найдем её мультипликатор

$$\mu = RL^3 d/dx_n |J_1(x_n)| + R. \quad (8)$$

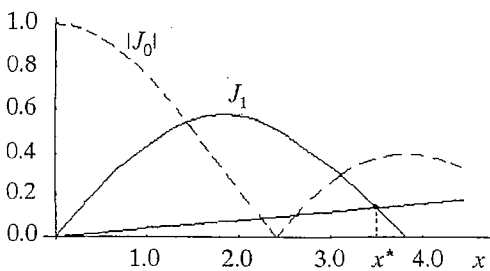


Рис. 5. Графическое решение уравнения (6) и нахождение условия возбуждения второй моды

В рассматриваемой области параметров функция Бесселя J_1 больше нуля и знак

модуля можно снять. Неподвижная точка теряет устойчивость и рождается 2-цикл, когда значение мультипликатора переходит через -1 . Полагая в уравнении (8) $\mu = -1$ и учитывая выражение (6), приходим к условию, определяющему момент рождения 2-цикла:

$$-2R/(RL^3) = J_0(x^*). \quad (9)$$

Как видно из уравнений (9), (7) в области параметра $R < 0.5$ неподвижная точка периода один x^* теряет устойчивость раньше, чем возникает паразитная мода ($y_n > 0$), и условие (7) заведомо является несправедливым¹. При значениях параметра $R > 0.5$ условие (7) корректно определяет зависимость (5).

Итак, в области параметров $R < 0.5$ из двух возможных механизмов потери устойчивости одночастотного режима – амплитудного (обусловленного модуляцией одной продольной моды) и частотного (вызванного конкуренцией разных мод) – в исследуемой двухмодовой модели ЛСЭ осуществляется первый.

Многочастотные режимы и переход к хаосу в двухмодовой модели

Рассмотрим теперь поведение отображения (4) при превышении параметром L критического значения L_{cr} . Как показывает компьютерное моделирование, в системе могут возникать различные периодические и квазипериодические колебания, а также хаос и гиперхаос.

В области параметра $R < 0.5$ с ростом L на фазовой плоскости x , у происходит рождение двух инвариантных кривых из двух точек, принадлежащих ранее циклу периода 2. (В терминах исходного генератора имеет место автомодуляция рассматриваемых мод с несоизмеримыми частотами.) Затем этот «2-тор» разрушается через потерю гладкости с образованием хаотического аттрактора.

Если увеличивать безразмерную длину пространства взаимодействия при $R > 0.5$, то мы обнаруживаем «линию нейтральности», к которой подходят многочисленные языки синхронизации. Их хорошо видно на увеличенном фрагменте карты на рис. 2. Представлены языки, которым отвечают числа вращения $1/5$, $1/6$, $1/7$. Первый из них выглядит «традиционно», а форма остальных языков искажается при подходе к значению $R = 1$. На рис. 6 показана эволюция фазового портрета при движении по плоскости параметров вдоль линии Γ , проходящей через язык синхронизации с числом вращения $1/5$. С ростом параметра L наблюдается синхронизация с образованием цикла периода 5 (рис. 6, б, в). Затем из каждой из пяти точек рождается инвариантная кривая (рис. 6, г). При дальнейшем увеличении параметра L на этих кривых образуются «углы» (рис. 6, д) и формируется сложно устроенный аттрактор (рис. 6, е–ж). Последнему рисунку серии (рис. 6, з) соответствуют два ляпуновских показателя, большие нуля, что свидетельствует о наличии в системе гиперхаоса.

При движении по плоскости параметров вблизи левой границы языка синхронизации с числом вращения $1/5$ наблюдается эволюция фазового портрета, иллюстрируемая рис. 7. Можно видеть инвариантную кривую, которая теряет гладкость и разрушается в соответствии с теоремой Афраймовича – Шильникова с образованием хаотического аттрактора. Заметим, что «линия нейтральности» уходит и в область $R < 0.5$, проходя выше соответствующих линий удвоения, рождения 2-тора и примыкающей к последней области сложной динамики. Ее можно видеть на фрагменте карты на рис. 3, где просматривается язык синхронизации с числом вращения $1/4$.

¹ $J_0(x^*)$ в рассматриваемой области меньше нуля, см. рис. 5.

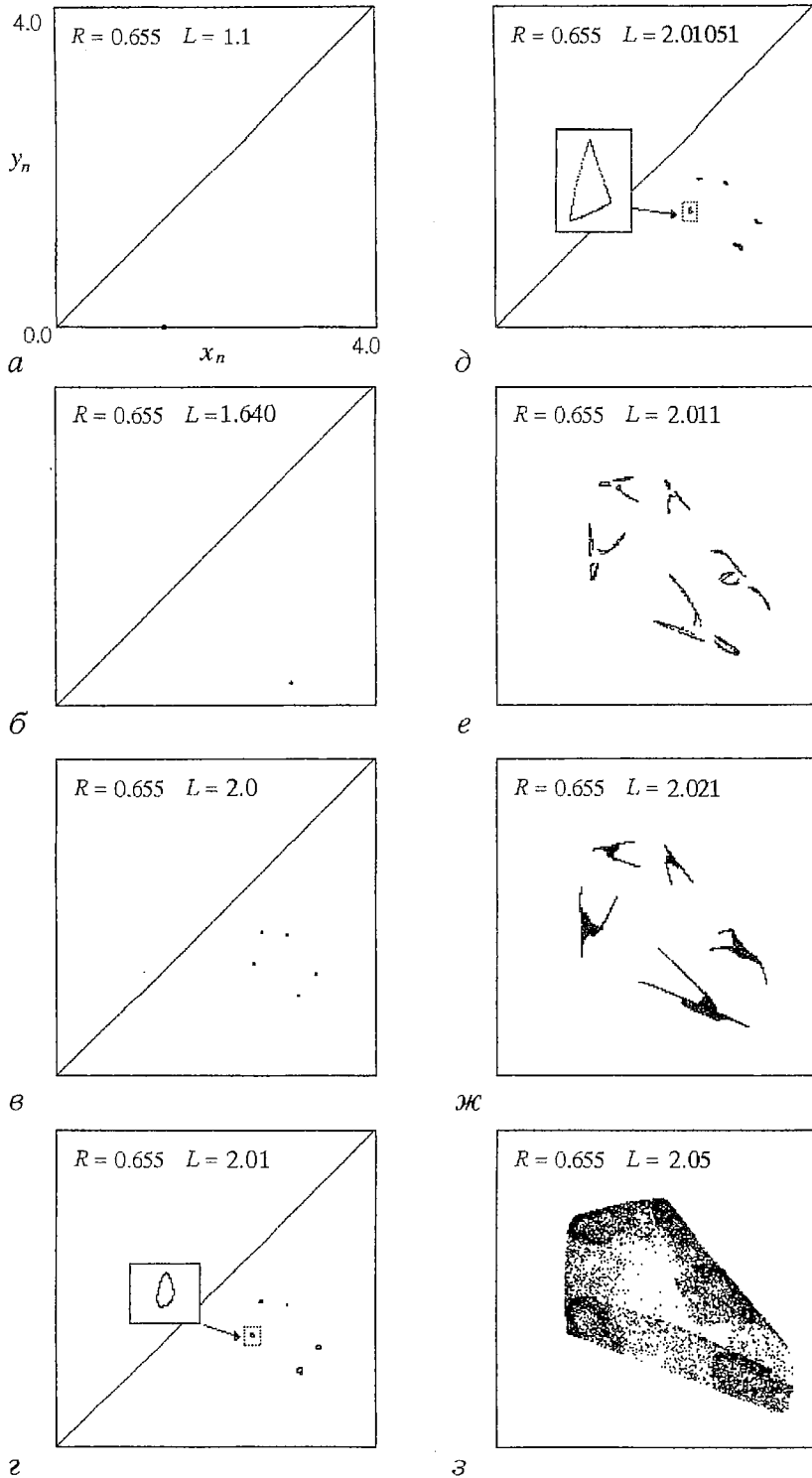


Рис. 6. Эволюция фазового портрета отображения (4) при движении вдоль линии Γ , указанной на рис. 2

На карте динамических режимов в ее правой части обнаруживается еще одна область существования устойчивой неподвижной точки. В этом случае реализуется режим синфазных колебаний, когда $x=y$ (то есть в терминах исходной

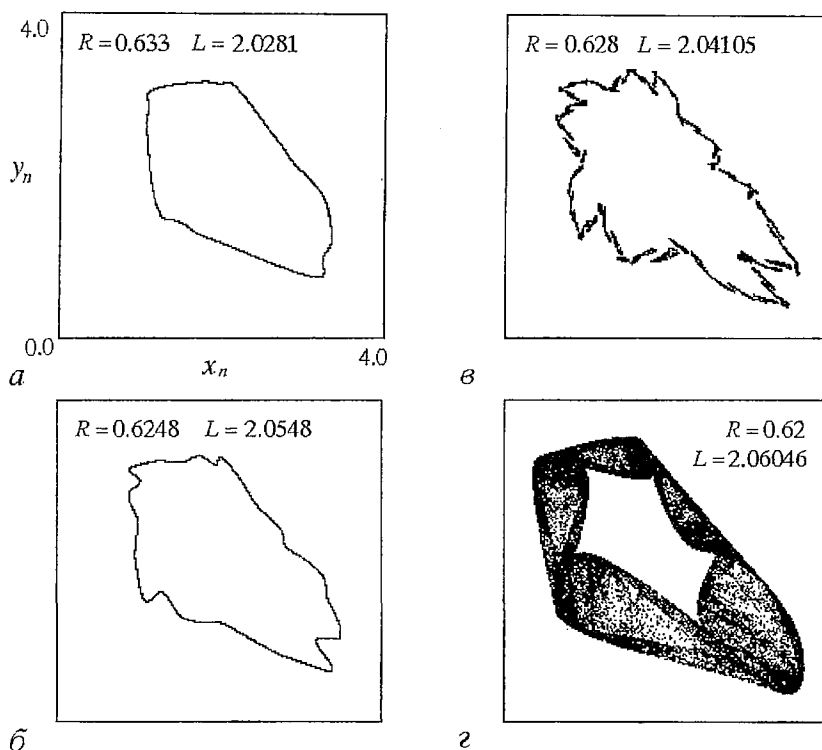


Рис. 7. Эволюция фазового портрета отображения (4) при движении вблизи левой границы языка синхронизации с числом вращения $1/5$

системы наблюдается генерация основной и паразитной мод с равными амплитудами). На рис. 1 и его фрагменте, рис. 4, эта область обозначена 1s. Такой режим при вариации параметров также становится неустойчивым, и происходит удвоение периода. Существенно, что рождающийся 2-цикл является несимметричным. Далее возникает несинфазный 4-цикл, 8-цикл, причем границы областей их устойчивости имеют сложную форму (см. рис. 4). После этого вновь возникают квазипериодические и хаотические режимы.

На рис. 8 представлены «карты» ляпуновских показателей отображения (4). Рис. 4, а соответствует первому, а 4, б – второму показателю. Видно, что в зависимости от параметра R квазипериодический режим может смениться либо

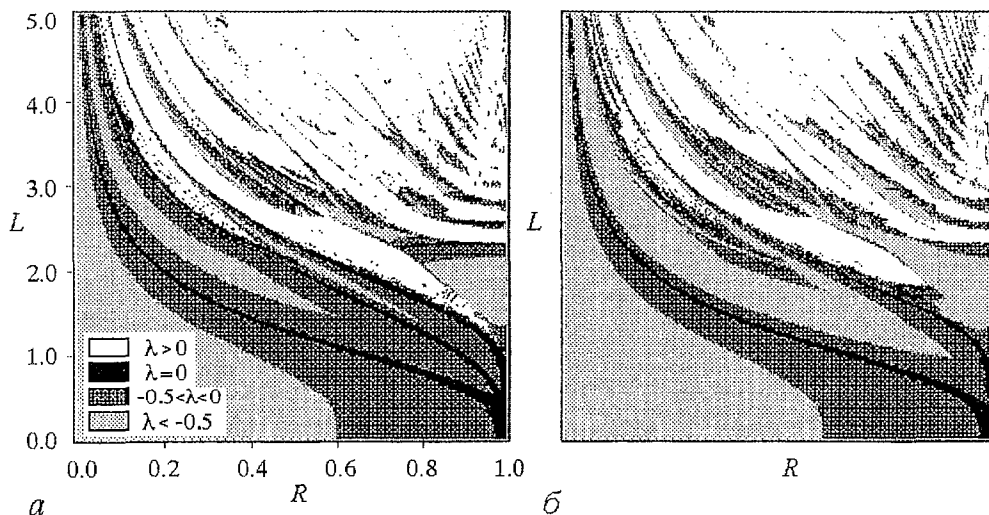


Рис. 8. Карты первого и второго показателей Ляпунова для отображения (4)

хаосом, либо гиперхаосом, которому отвечают два положительных показателя Ляпунова. Области гиперхаоса занимают значительную долю плоскости параметров, так что этот режим весьма типичен для отображения (4).

Заключение

Наше рассмотрение обнаружило тонкие детали и интересные особенности сложных режимов модельного отображения, описывающего динамику ЛСЭ с низкодобротной электродинамической системой. В какой мере соответствующие предсказания реалистичны? Это открытый вопрос, он требует существенно более серьезного компьютерного исследования исходных уравнений в частных производных. Однако представленные здесь результаты, особенно карта динамических режимов, могут служить полезным «путеводителем» для такого исследования. В любом случае, мы имеем дискретное отображение с интересным поведением, существенное преимущество которого состоит в том, что оно получено из «первых» принципов, из исходных уравнений, дополненных разумными физическими соображениями.

Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову и Д.И. Трубецкову за полезное обсуждение и внимание к работе.

Работа поддержана грантами РФФИ №96-15-96536 и 96-15-96921.

Библиографический список

1. Bogomolov Ya.L., Bratman V.L., Ginzburg N.S., Petelin M.I., Yunakovsky A.D. Nonstationary generation in free electron lasers // Optics Commun. 1981. Vol.36, № 3. P.209.
2. Ginzburg N.S., Petelin M.I., Shapiro M.A. Automodulation and stochastic oscillation regimes in resonant relativistic electron masers // Proc. 10th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Moscow, 1981. Vol.1. P. M2.
3. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника. Вып.2. Горький, 1981. С.101.
4. Ginzburg N.S., Petelin M.I. Multy-frequency generation in free electron lasers with quasi-optical resonator // Int. J. Electronics. 1985. Vol.59, № 3. P.291.
5. Antonsen T.M., Jr., Levush B. Mode competition and suppression in free electron laser oscillators // Phys. Fluids B. 1989. Vol.1, № 5, P.1097.
6. Гинзбург Н.С., Сергеев А.С. Динамика ЛСЭ генераторов с резонаторами произвольной добротности // ЖТФ. 1991. Т.61, № 6, С.133.
7. Блюх Ю.П., Бородкин А.В., Любарский М.Г., Онищенко И.Н., Файнберг Я.Б. Применение метода функционального отображения для исследования ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. ПНД. 1993. Т.1, № 1-2. С. 34.
8. Братман В.Л., Савилов А.В. Сценарий перехода к многочастотному режиму в ЛСЭ-генераторе с низкодобротной электродинамической системой // Изв. вузов. ПНД. 1994. Т.2, № 6. С.27.
9. Кузнецов А.П., Широков А.П. Дискретная модель релятивистской лампы обратной волны // Изв. вузов. ПНД. 1997. Т.5, № 6. С.76.

Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 21.12.98

COMPLEX DYNAMICS OF TWO-MODE LOW-DIMENSION MODEL OF FREE ELECTRON LASER

A.P. Kuznetsov, A.P. Shirokov

The results of numeric investigation of a low-dimension two-mode model, describing approximately scenario of transition to the multi-frequency regime in the free electron laser with a low-Q microwave system are presented. The qualitatively different mechanisms of stability loss of a one-frequency generation are revealed. The topographies of dynamical regimes and Lyapunov's exponents on a parameter plane: transmission coefficient – dimensionless space interaction length are presented.



Кузнецов Александр Петрович родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Опубликовал более 50 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соросовский доцент (1998), научный руководитель молодежного научного центра «Нелинейная динамика и сложные структуры» СФ ИРЭ РАН и студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» СГУ и СФ ИРЭ РАН. Автор

нескольких оригинальных учебных курсов для Высшего колледжа прикладных наук СГУ и двух популярных книг. E-mail: kuz@spkuz.saratov.su



Широков Андрей Петрович – родился в Ершове Саратовской области (1977). В настоящее время студент 5-го курса Высшего колледжа прикладных наук СГУ. Инженер Саратовского филиала Института радиофизики и электроники РАН. Соросовский студент (1998, 1999). Лауреат премии фонда им. Н.И. Вавилова. Занимается научной работой в студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор двух научных публикаций.