



ГЛОБАЛЬНАЯ синхронизация в решетках хаотических отображений с ограниченным количеством связей

Ю.В. Андреев

Исследуется устойчивость глобального синхронного режима в решетках хаотических отображений путем непосредственного расчета условий устойчивости, а также путем численного моделирования. Показано, что для решеток с локальными связями существует предельное значение показателя Ляпунова отображений решетки, при превышении которого глобальный синхронный режим теряет устойчивость. Обнаружено, что синхронный режим становится невозможен в больших решетках вследствие локальности, то есть малой «длины» связей, и предложены подходы к модификации структуры динамической системы, которые могут обеспечить устойчивость синхронного режима: перестройка динамического режима отображений решетки, увеличение размера локальной окрестности, использование нелокальных статических или динамических связей и введение внешнего управляющего узла (пейсмейкера). В модели с пейсмейкером обнаружен пространственный синхронный режим решетки, отличный от режима пейсмейкера (явление «обобщенной» синхронизации).

Введение

Одним из удобных инструментов изучения разнообразных явлений в физике, биологии, экономике и других науках являются модели, состоящие из большого количества взаимодействующих элементов с простой или сложной внутренней динамикой, в том числе и хаотической. Одной из популярных моделей является ансамбль (решетка) отображений. Исследователями изучаются ансамбли отображений с регулярными и хаотическими режимами, глобальными и локальными связями и т.п. Исследования показывают, что поведение ансамбля как целого существенно отличается от динамики отдельных его элементов и определяется, помимо парциальной динамики, как видом, так и силой связей элементов ансамбля.

Особый интерес представляет динамика ансамблей отображений с хаотической динамикой. В них наблюдаются такие типы поведения, как пространственно-временной хаос, хаотические кластеры, пространственные синхронные режимы и т.д. (см., например, [1] и приведенный там список литературы). В последнее время исследователей привлекают интересные, сложные явления, происходящие на «кромке хаоса», то есть на границе между хаотическим и регулярным поведением [2–5]. Эта граница (кромка хаоса) определяется режимом глобальной синхронизации, при которой резко упрощается поведение хаотической системы за счет скачкообразного уменьшения размерности ее аттрактора.

В данной работе исследуются условия реализации режима глобальной синхронизации в решетках связанных отображений. Обычно в моделях решеток для связи узлов используют метод «среднего поля», то есть в уравнении для каждого узла воздействие остальных узлов решетки представляют взвешенной суммой состояний этих узлов [1, 6]. Как показывают исследования ансамблей отображений, условия устойчивости глобального синхронного режима существенно зависят от того, как это «среднее поле» в уравнении для узла складывается с «полем» самого узла.

Рассмотрим подробнее наиболее употребительные типы связи. Ансамбль P идентичных одномерных отображений вида $x(t+1)=f(x(t))$, где t – дискретное время, можно связать следующим образом:

$$x_i(t+1) = f(x_i(t) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [x_j(t) - x_i(t)]) = f(\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j(t)), \quad i = 1, \dots, P, \quad (1)$$

где α_{ij} – коэффициент связи i -го отображения с j -м, а $A = \|\alpha_{ij}\|$ – матрица связей ансамбля (1). Этот тип связи называют нелинейным, диссипативным и т.п. Среднее поле ансамбля здесь представлено нелинейным членом.

Другой тип связи – линейный (или диффузионный):

$$x_i(t+1) = f(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [x_j(t) - x_i(t)], \quad i = 1, \dots, P, \quad (2)$$

где связь элементов ансамбля представлена линейным членом.

Иногда также применяется связь вида

$$x_i(t+1) = f(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [f(x_j(t)) - f(x_i(t))], \quad i = 1, \dots, P, \quad (3)$$

однако она эквивалентна типу связи (1) (см. Приложение), поэтому самостоятельного значения не имеет и в дальнейшем не рассматривается.

Можно непосредственно проверить, что в ансамблях (1)–(3) существует хаотический синхронный режим, при котором фазовые переменные всех отображений во все моменты времени совпадают друг с другом. Легко видеть, что этот режим совпадает с режимом парциального отображения. Целью данной статьи является исследование условий устойчивости этого синхронного режима в решетках идентичных одномерных отображений.

Известно, что одним из основных механизмов разрушения синхронного режима в связанных хаотических системах как с дискретным, так и с непрерывным временем при выполнении необходимых условий устойчивости является «on-off»-перемежаемость, проявляющаяся в виде нерегулярных всплесков (выбросов) разностного сигнала [7–9]. Было показано, что причиной «on-off»-перемежаемости является существование в хаотическом аттракторе неустойчивых периодических траекторий (например, неподвижных точек) с показателем Ляпунова, превышающим показатель Ляпунова самого хаотического аттрактора динамической системы [8, 10]. Мера таких траекторий на аттракторе нулевая. Однако в связанных системах они приводят к появлению в окрестности аттрактора синхронизации, расположенного на главной диагонали общего фазового пространства, узких областей с ненулевой мерой, из которых траектория может удаляться от аттрактора. При этом сам аттрактор синхронизации остается глобально притягивающим, и в поведении связанных систем наблюдается самосинхронизация, перемежающаяся время от времени срывами.

Однако «on-off»-перемежаемость наблюдается не во всех связанных системах. Наличие этого механизма зависит как от конкретного вида нелинейных систем, так и от типа связи между ними (например, см. [11]).

В данной работе используется диссипативная, нелинейная связь типа (1). Этот выбор обусловлен следующими причинами. Как было показано в [8], при линейной связи (2) «on-off»-перемежаемость неизбежна. В случае же нелинейной связи (1) «on-off»-перемежаемость в системе связанных отображений, по-видимому, тоже может иногда наблюдаться, однако в этом случае всегда можно

выбрать область параметров связи, при которой она исключена [12]. Сравнительный анализ условий устойчивости синхронного режима для типов связи (1) и (2), проведенный в [13] на модели из двух однонаправленно связанных отображений *tent map*, в подтверждение вышесказанного показал, что при связи типа (1) «on-off»-перемежаемость в рассмотренной системе не наблюдается в отличие от связи типа (2), что обеспечивает синхронный режим, более устойчивый по отношению как к малым возмущениям, так и к расстройкам параметров рассмотренных отображений.

Кроме этого, для нелинейной связи типа (1) можно провести более полный и строгий математический анализ и, в частности, получить в общем виде необходимое условие устойчивости синхронного режима в линейном приближении, что было впервые сделано в [14, 15]. Подробное изложение метода вычисления условий устойчивости вместе с обсуждением проблемы «on-off» перемежаемости дано в [12, 16].

Согласно этому методу, чтобы оценить устойчивость синхронного режима, необходимо оценить устойчивость движения, трансверсального к аттрактору синхронизации, расположенного на главной диагонали P -мерного гиперкуба, где P – размерность фазового пространства ансамбля отображений (1). Как показано в [14, 15], необходимое условие устойчивости можно вычислить непосредственно, зная спектр собственных чисел матрицы связей $A = \|a_{ij}\|$ ансамбля (1). Максимальный показатель Ляпунова движения в инвариантной плоскости, трансверсальной к главной диагонали, на которой расположен аттрактор синхронизации ансамбля, равен $\lambda_T = \lambda + \ln(|e_M|)$ и, соответственно, необходимое условие устойчивости имеет вид

$$\lambda_T = \lambda + \ln(|e_M|) < 0. \quad (4)$$

Здесь λ – показатель Ляпунова парциального отображения ансамбля, а e_M – одно из собственных чисел матрицы связей A . Чтобы получить e_M , из набора собственных чисел матрицы A отбрасывается одно число $e=1$ (с учетом кратности), а из оставшихся выбирается максимальное по модулю.

Условие (4) может быть получено в общем виде только для нелинейной связи типа (1). Для этого типа связи оно имеет универсальный характер, то есть не зависит от конкретного вида функции отображения f . Оно применимо и к многомерным отображениям, в этом случае λ имеет смысл максимального показателя Ляпунова парциальной системы.

В работах [12, 14–16] описанный метод расчета устойчивости синхронного режима был применен к ансамблям полностью связанных (каждый с каждым) отображений. Было показано, что в таких ансамблях синхронный режим всегда может быть реализован при достаточно сильной связи.

В данной работе исследуются условия устойчивости синхронного хаотического режима в двумерных решетках с небольшим количеством связей (решетки с локальными связями), и рассматриваются подходы, позволяющие реализовать такой режим за счет усложнения структуры решеток (решетки с нелокальными связями и решетки с внешним управлением).

1. Модель решетки с локальными связями

Концепция ансамбля хаотических элементов, приходящего в упорядоченное состояние вследствие локального взаимодействия, исследовалась на модели двумерной решетки с $M \times N$ локально связанными одинаковыми одномерными отображениями в узлах. В данной работе использовались 2 типа отображений: логистическое отображение $x(t+1) = f(x(t)) = \mu x(1-x)$ с параметром $\mu=4$ и кусочно-линейное отображение *Skew Tent*. При локальной связи узлы решетки x_{ij} , где (i,j) –

пространственные координаты узла, связаны только с ближайшими геометрическими соседями, то есть каждое отображение связано, например, с восемью ближайшими. Такая связь может быть описана следующим соотношением:

$$x_{ij}(t+1) = f((1-\alpha)x_{ij} + \alpha \sum_{m=1, n=1}^3 T_{mn} x_{i+m-2, j+n-2}), \quad (5)$$

где α – коэффициент связи. Поведение каждого узла помимо собственной динамики определяется взвешенным действием соседей. Условием существования синхронного режима является равенство суммы всех весов в (5) единице (это легко получить из основного соотношения (1)). Для простоты зададим периодические граничные условия: $x_{(M+1)j} = x_{1j}$ и $x_{i(N+1)} = x_{i1}$, то есть рассмотрим двумерную решетку на торе. Для описания связей будем использовать пространственные шаблоны весов, подобные тем, что применяются в клеточных нейронных сетях (CNN) [17]. Будем рассматривать только равные связи, при этом задавая тип окрестности шаблоном вида

$$T_{\text{Full}} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где центральная ячейка (0) соответствует узлу x_{ij} , а остальные (ненулевые) элементы – весам соседних узлов, действующих на узел x_{ij} . Сумма всех элементов любого шаблона T всегда устанавливается равной единице, что обеспечивает существование глобального синхронного режима. Данный шаблон отвечает окрестности 3×3 (окрестности радиуса 1), но можно рассматривать и большие окрестности, а также задавать сложные шаблоны с неравными элементами, которые отвечают неоднородным связям.

2. Устойчивость синхронного режима в решетках локально связанных отображений

Поведение системы будем исследовать численно путем моделирования решетки отображений и путем расчета условий устойчивости. При численном моделировании изучается поведение системы в зависимости от силы и вида локальной связи между узлами и от размеров решетки путем задания случайных начальных условий узлам решетки и итерирования системы. При визуализации значение переменной узла $x_{ij}(t)$, принимающей значения из диапазона $[0, 1]$, изображается оттенками серого, при этом черный цвет соответствует нулю, а белый – единице.

Прежде всего, хочется отметить, что «on-off»-перемежаемость не наблюдалась в экспериментах, описанных в данной статье.

Как показывают численные исследования, в достаточно больших решетках при ненулевой связи вида (5) глобальный синхронный режим является неустойчивым. Вместо него реализуется хаотическая во времени и пространстве кластерная структура. Наблюдаемые кластеры представляют собой локально синхронизированные участки решетки [18]. Узлы, принадлежащие одному кластеру, в течение некоторого времени движутся почти синхронно, хотя и хаотически во времени. Границы кластеров постоянно размываются, одни кластеры исчезают, другие появляются. Как следует из численного исследования, размеры кластеров зависят от величины связи между узлами – коэффициента α , что показано на рис. 1, где представлены мгновенные картины состояний решеток 32×32 , отличающихся силой связи α , в случайные моменты времени. При увеличении α средние размеры кластеров немного увеличиваются – от одного до

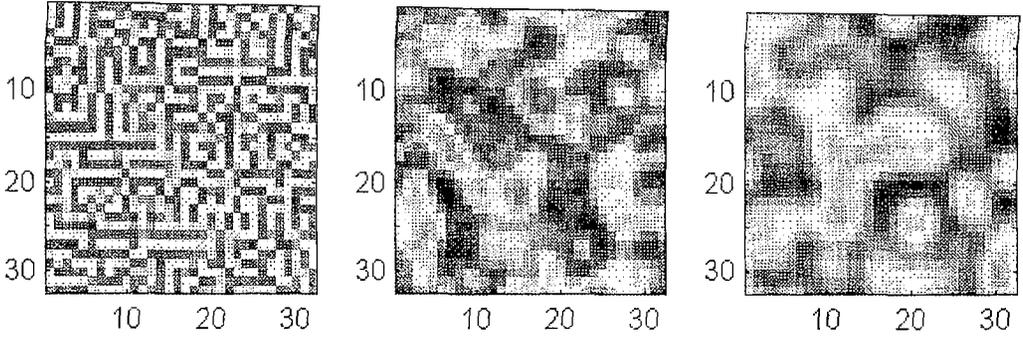


Рис. 1. Кластеры в решетках 32×32 с величиной внутренней связи $\alpha=0.2, 0.5$ и 0.9 , соответственно. Яркость ячеек пропорциональна значению переменной соответствующего отображения узла

приблизительно пяти, однако полной пространственной синхронизации в больших решетках не наблюдается ни при какой силе связи. Глобальная синхронизация узлов решетки наблюдается только в маленьких решетках – размера 5×5 и меньше, и при достаточно сильной связи. В этом случае решетка довольно быстро (быстрее, чем за 100 итераций) сходится к синхронному режиму с любых начальных условий.

Чтобы объяснить экспериментальные результаты, применим условие (4) к решеткам с локальными связями. Для расчета условий устойчивости синхронного режима прежде всего нужно построить матрицу связей A решетки $M \times N$ локально связанных отображений, для этого пронумеруем узлы решетки от 1 до $P=M \times N$ каким-либо регулярным образом, например, последовательно ряд за рядом сверху вниз. Можно показать, что порядок обхода узлов решетки может быть произвольным, поскольку это не меняет спектра собственных значений матрицы A . Матрица связей A для P узлов имеет размер $P \times P$. Вследствие локальности связей она содержит небольшое число ненулевых элементов, то есть является сильно разреженной для больших P . Каждому узлу решетки соответствует свой ряд матрицы A . Как следует из уравнения для локальной связи (5), на главной диагонали матрицы A находятся коэффициенты a_{ii} , описывающие воздействие узла на самого себя, то есть $(1-\alpha)$. Каждый ряд i матрицы A также содержит m коэффициентов $a_{ij}=\alpha/m$ связи соответствующего узла i с ближайшими соседями. Остальные элементы в ряду – нулевые.

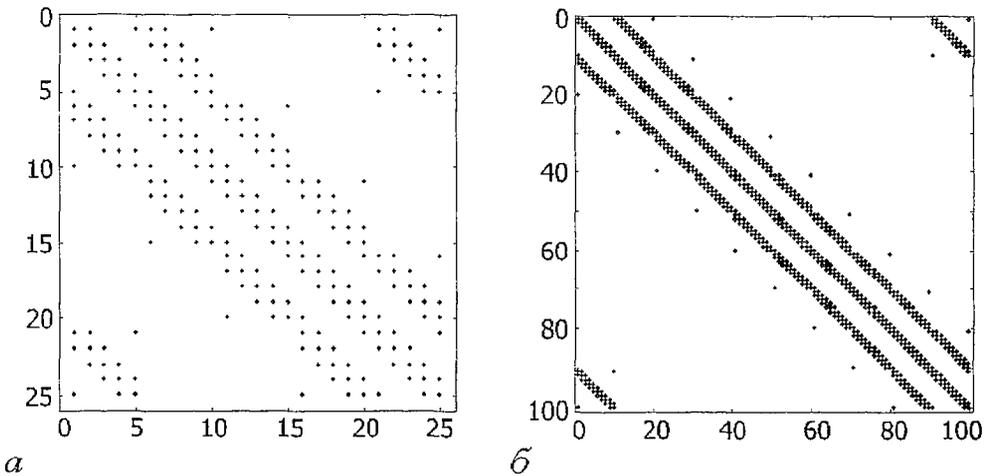


Рис. 2. Матрицы связей для решеток 5×5 (а) и 10×10 (б). Отмечены только ненулевые элементы

На рис. 2 схематически изображены матрицы связей для решеток 5×5 и 10×10 с шаблоном окрестности T_{Full} (6). Видно, как с увеличением размера решетки матрицы связей становятся все более разреженными. Отметим, что в случае ансамбля полносвязных отображений (каждый с каждым) в аналогичной матрице практически нет нулевых элементов.

Устойчивость синхронного режима вычислим согласно условию (2). В рассматриваемом случае парциальные логистические отображения решетки являются хаотическими, поэтому $\lambda > 0$. Численные расчеты показывают, что при слабой связи между узлами решетки синхронизация невозможна. При увеличении связи синхронный режим становится устойчивым в решетке размера 3×3 при $\alpha \approx 0.44$, в решетке 4×4 при $\alpha \approx 0.67$, и только при $\alpha \approx 0.96$ в решетке 5×5 (рис. 3). В решетках большего размера глобальная синхронизация невозможна при коэффициентах связи $\alpha \in [0, 1]$.

Сравнивая эти результаты с типичными картинками кластеров на рис. 1, можно сделать вывод, что характерный размер кластеров в решетках локально связанных отображений, по-видимому, близок (или равен) размеру наибольшей решетки, в которой возможен глобальный синхронный режим при данной величине связи α . Эта гипотеза подробнее проверяется в разделе 3.1.

3. Синхронный режим в больших решетках

Как было показано выше, в больших решетках хаотических отображений с локальными связями синхронный режим неустойчив. Однако, исходя из анализа условия устойчивости (2), можно предложить несколько подходов, которые могут обеспечить устойчивость глобального синхронного режима. Здесь мы рассмотрим четыре подхода. Первый связан с изменением динамики отображений решетки. Следующие три вытекают из отказа от идеи локальности связей: увеличение «глубины» связи, нелокальная связь и введение специального управляющего узла (пейсмейкера).

3.1. Перестройка хаотического режима. Этот способ достижения синхронного режима в больших решетках заключается в уменьшении степени хаотичности отображений ансамбля. В самом деле, из условия устойчивости (2) видно, что показатель Ляпунова λ_T для движения в плоскости, перпендикулярной аттрактору синхронизации, состоит из двух слагаемых: показателя Ляпунова парциального отображения λ и слагаемого $\ln(|e_M|)$, связанного с топологией связей элементов системы. Будем называть его топологическим, или связным фактором. Анализ показывает, что это слагаемое является отрицательным (или нулевым) практически для всех конфигураций связей между элементами решетки. Например, если из величины λ_T на рис. 3 вычесть постоянный уровень $\lambda \approx 0.7$, получим «чистые» зависимости топологического фактора от коэффициента связи. Как для полносвязных, так и для локально связанных решеток топологический фактор в диапазоне коэффициентов связи $\alpha \in [0, 1]$ отрицателен. При больших $\alpha \approx 1.5-2$ могут нарушаться условия применимости (4), поэтому этот диапазон не рассматривается.

Если режим парциального отображения является регулярным, то есть $\lambda < 0$,

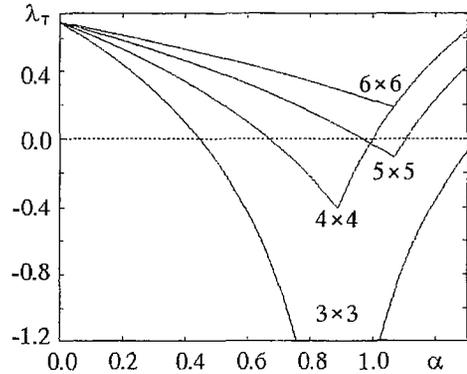


Рис. 3. Зависимость трансверсального показателя Ляпунова от коэффициента локальной связи α в решетках разного размера

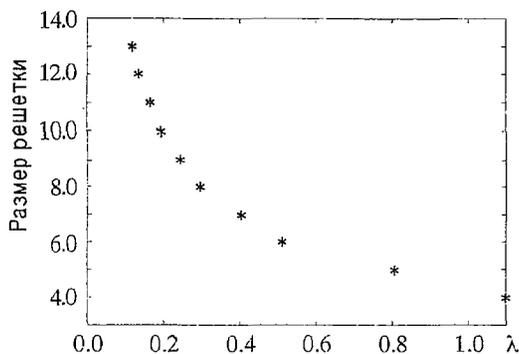


Рис. 4. Зависимость максимально допустимого показателя Ляпунова парциального отображения от размера решетки

синхронный режим будет устойчив в любых решетках. Если же элементы решетки являются хаотическими, то есть $\lambda > 0$, синхронный режим в решетке будет устойчив, только если коллективное взаимодействие узлов решетки при данной связи сможет компенсировать неустойчивость парциальной динамики узлов.

В больших решетках этого не происходит, поэтому для достижения пространственной синхронизации придется уменьшить λ — степень хаотичности узлов решетки, для чего требуется перестройка динамического режима.

На рис. 4 показана зависимость максимального показателя Ляпунова парциального отображения, при котором еще наблюдается устойчивый глобальный синхронный режим, от линейного размера решетки с окрестностью T_{Full} . Для квадратных решеток со стороной N эту зависимость можно аппроксимировать для больших N как $\lambda \propto N^{-1.9}$ или $N \propto \lambda^{-0.5}$. Из графика следует, что в случае хаоса с показателем Ляпунова $\lambda = \ln 2 \approx 0.69$, что соответствует, например, случаю одномерного логистического отображения с $\mu = 4$, синхронный режим возможен в решетке 5×5 , но чтобы получить его в решетке 9×9 , необходимо перестроить хаотический режим, скажем, до $\lambda = 0.2$.

Очевидно, что такой подход возможен не всегда, поскольку при перестройке динамического режима могут резко меняться статистические характеристики хаотического аттрактора, например такие, как инвариантная мера. К тому же, зависимость показателя Ляпунова от параметров парциального отображения может быть очень сложной или резкой, как это имеет место в логистическом отображении. В этом отношении интересным является кусочно-линейное отображение *Skew Tent*

$$x(t+1) = f(x(t), x_0) = \begin{cases} x(t)/x_0, & 0 \leq x(t) \leq x_0, \\ (1-x(t))/(1-x_0), & x_0 \leq x(t) \leq 1, \end{cases} \quad (7)$$

состоящее из двух сегментов, выходящих с концов единичного отрезка и пересекающихся в вершине с координатами $(x_0, 1)$ (рис. 5, а). Это отображение при всех значениях параметра имеет хаотический режим с равномерной инвариантной мерой на интервале $[0, 1]$, и при изменении параметра x_0 от 0 до 0.5 (или от 1 до 0.5) его показатель Ляпунова λ плавно меняется от 0 до $\ln 2 \approx 0.69$ (рис. 5, б).

Воспользуемся данными на графиках рис. 4 и 5, б для проверки гипотезы о том, что размеры кластеров в больших решетках определяются размером той решетки, в которой может наблюдаться глобальный синхронный режим при данном коэффициенте связи α и величине показателя Ляпунова λ парциального отображения. Для этого из рис. 4 найдем, что синхронный режим в решетке 5×5 достигается при $\lambda = 0.7$ (с небольшим запасом), в решетке 7×7 — при $\lambda = 0.3$, а в решетке 13×13 — при $\lambda = 0.1$. В отображении *Skew Tent* эти режимы наблюдаются при параметре x_0 , равном соответственно 0.5, 0.08 (или 0.92) и 0.02 (или 0.98).

На рис. 6 изображены типичные мгновенные картины состояний решеток 32×32 в случайные моменты времени, соответствующие режимам с показателями Ляпунова $\lambda = 0.7, 0.3$ и 0.1 . Как видно из рисунка, максимальные размеры наблюдаемых кластеров, приблизительно равные соответственно 5, 7 и 13,

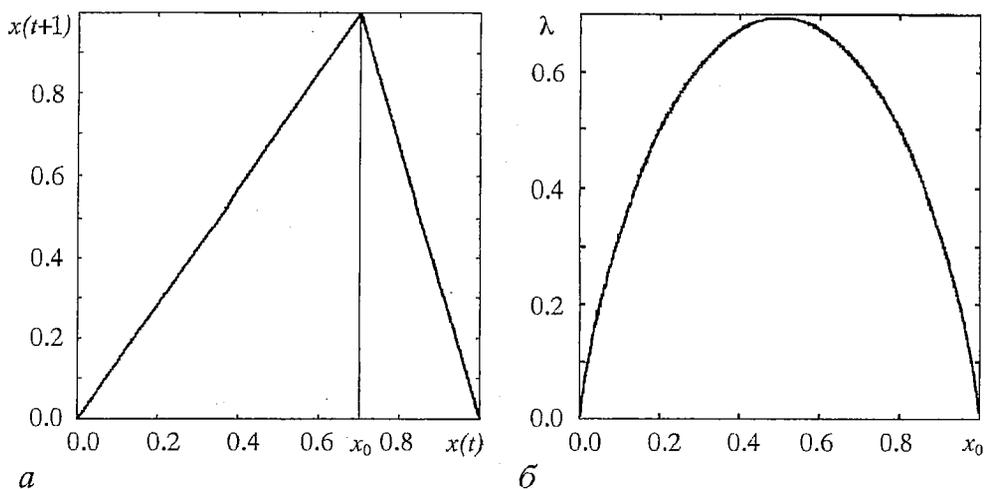


Рис. 5. Отображение *Skew Tent* и его показатель Ляпунова

подчиняются зависимости, приведенной на рис. 4, то есть максимальный размер кластера совпадает с максимальным размером той маленькой решетки, в которой еще возможен глобальный синхронный режим. Следует отметить также уменьшение «контраста» изображений с уменьшением λ , что фактически означает уменьшение дисперсии фазовых переменных отображений по узлам решетки.

Рассмотренный путь достижения глобального синхронного режима, по-видимому, может иметь место в естественных системах с пространственно-временным хаосом и объяснять внезапные переходы к синхронному режиму и обратно, к пространственному хаосу.

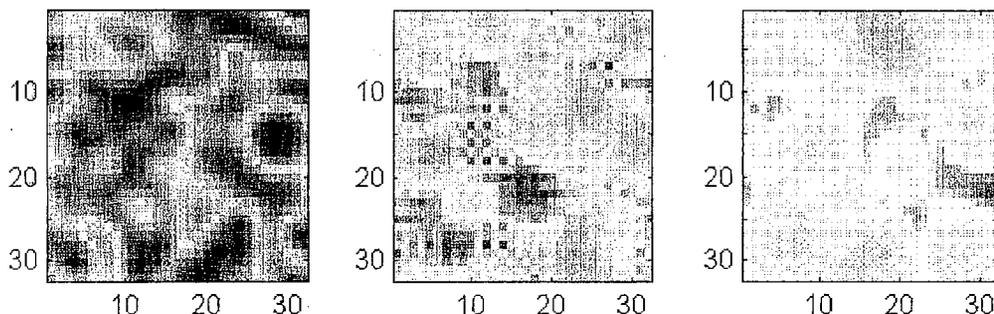


Рис. 6. Кластеры в решетках отображений 32×32 , с парциальными режимами с $\lambda=0.7, 0.3$ и 0.1 , соответственно; коэффициент связи $\alpha \sim 1$

3.2. Увеличение «глубины» связи. Известно, что в случае полностью связанных ансамблей (1) (каждый с каждым) всегда существует область коэффициента связи, обеспечивающая глобальную синхронизацию решетки хаотических систем (например, см. [12,14,16]). Можно предположить, что увеличение размера окрестности, а следовательно, и увеличение количества связей в системе должно привести к глобальной синхронизации.

Численные расчеты условий устойчивости больших решеток показали, что синхронный режим действительно становится возможным, начиная с некоторой величины локальной окрестности. Например, в случае решеток логистических отображений с $\lambda \approx 0.69$ синхронный режим становится возможным при величине стороны локальной окрестности, примерно равной половине стороны самой решетки. Эти результаты подтверждаются численным моделированием динамики решетки.

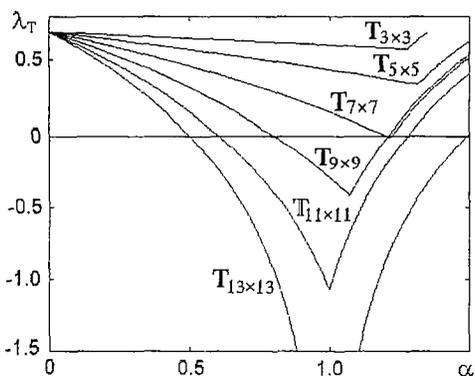


Рис. 7. Устойчивость синхронного режима в решетке 13×13 логистических отображений при различных размерах окрестности локальных связей. Синхронный режим устойчив при $\lambda < 0$

размеров окрестности, где $T_{n \times n}$ соответствует шаблону окрестности размера $n \times n$. Начиная с окрестности 7×7 , в решетке становится возможным синхронный хаотический режим, правда в очень узкой зоне параметра связи около $\alpha \approx 1.2$. При дальнейшем увеличении окрестности зона устойчивости режима по параметру связи α увеличивается, и при шаблоне окрестности $T_{13 \times 13}$, когда окрестность связи совпадает со всей решеткой, и система становится полностью связной, соответствующая кривая рис. 7 уходит на $-\infty$, то есть при коэффициенте связи $\alpha \sim 1$ решетка синхронизируется при любой величине показателя Ляпунова λ частичного отображения.

Эти численные результаты приведены для логистического отображения с $\lambda \approx 0.69$. Так как согласно формуле (4) необходимое условие устойчивости определяется суммой показателя Ляпунова частичного отображения и топологического фактора, соответствующего конкретной конфигурации связей узлов решетки. Для отображений с другим показателем Ляпунова λ' кривые на рис. 7 нужно всего лишь сдвинуть вверх или вниз, так чтобы пучок кривых при $\alpha = 0$ (что соответствует несвязанной решетке) сходил к точке λ' . Например, как можно определить из рисунка, для отображений с показателем Ляпунова $\lambda = 0.2$ решетка 13×13 в широком диапазоне параметра связи α синхронизируется уже при величине окрестности 5×5 .

Таким образом, в больших решетках синхронизация становится возможной при увеличении локальной окрестности, но при этом количество связей в системе с ростом размера окрестности стремительно нарастает, и говорить об ограниченности количества связей уже не приходится.

3.3. Статические и динамические нелокальные связи. Из анализа результатов исследования необходимых условий устойчивости (4) синхронного режима в решетках с большими окрестностями (п. 3.2) напрашивается вывод о том, что устойчивость такого режима обусловлена количеством связей в системе, то есть при уменьшении количества связей устойчивость синхронного режима должна ухудшаться, а при увеличении – улучшаться. В самом деле, в полностью связных системах, где каждый узел связан с каждым, синхронизация возможна при достаточно сильной связи (это подтверждает и рис. 7, кривая $T_{13 \times 13}$). В то же время, если количество связей в двумерных решетках уменьшить, например, используя шаблон окрестности вида

Рассмотрим эффект увеличения окрестности на примере решетки 13×13 путем постепенного увеличения размера окрестности от 3×3 до 13×13 (другими словами, увеличивая радиус окрестности от 1 до 6), используя при этом полностью связные весовые шаблоны, то есть связывая каждый узел со всеми узлами из своей окрестности. Нетрудно убедиться, что увеличение «глубины» связи, то есть размера окрестности локальной связи, приводит к более полному заполнению матрицы связей A .

Результаты расчета устойчивости синхронного режима согласно условию (4), приведенные на рис. 7, показывают постепенное усиление топологического фактора $\ln(|e_M|)$ при увеличении

$$\mathbf{T}_+ = 1/4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то условия устойчивости глобального синхронного режима действительно заметно ухудшаются, в частности, для логистического отображения с $\mu=4$ синхронный режим возможен только в решетке 3×3 (рис. 8).

Для того чтобы полнее проверить эту гипотезу о количестве связей, также были рассчитаны условия устойчивости глобсинхронного режима в одномерных (цепочки) и объемных трехмерных решетках отображений с полными шаблонами окрестностей радиуса 1. В цепочках отображений на каждый узел приходится по две связи от ближайших соседей, что описывается шаблоном окрестности $\mathbf{T}=(1/2 \ 0 \ 1/2)$, то есть еще меньше, чем в предыдущем случае двумерной решетки с шаблоном \mathbf{T}_+ . В объемных трехмерных решетках на каждый узел уже приходится 26 связей от соседей (что гораздо больше, чем в двумерных решетках с полной окрестностью), а шаблон \mathbf{T} является матрицей $3 \times 3 \times 3$.

Логично было бы ожидать ухудшения устойчивости синхронного режима с увеличением размерности решеток, исходя, например, из относительной плотности ненулевых элементов матрицы связей. Для одномерной цепочки длины N матрица связей имеет N^2 элементов, из которых $3N$ ненулевых, то есть относительная плотность равна $p=3/N$; у двумерной решетки $N \times N$ (N^2 узлов) с окрестностью \mathbf{T}_{Full} матрица связей имеет N^4 элементов, из них $3 \times 3N^2$ ненулевых, что дает $p=9/N^2$; соответственно для трехмерных решеток с окрестностью $3 \times 3 \times 3$ доля ненулевых элементов в матрице связей составит $p=27/N^3$. Нетрудно видеть, что, несмотря на увеличение количества связей на один узел решетки, при $N > 3$ плотность ненулевых элементов p в матрице связей с увеличением размерности решеток D падает как $p=(3/N)^D$.

Однако расчеты необходимых условий устойчивости (4) синхронного режима в цепочке длины N , двумерной решетке $N \times N$ и трехмерной решетке $N \times N \times N$ с соответствующими полными окрестностями показали, что эти условия совпадают. Точнее, совпадают минимумы кривых трансверсального показателя Ляпунова λ_T , хотя эти минимумы достигаются при разных величинах коэффициента связи α . Этот результат проиллюстрирован на рис. 9, где в качестве примера приведены расчетные кривые топологического фактора для одно-, двух- и трехмерных решеток с линейными размерами 4 и 5.

Как показывают расчеты, для оценки необходимых условий устойчивости синхронного режима в одно-, двух- и трехмерных решетках с полной окрестностью можно использовать один и тот же график на рис. 4, который был

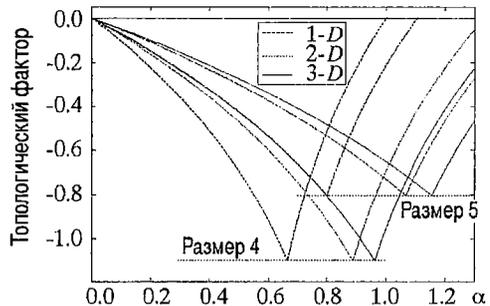
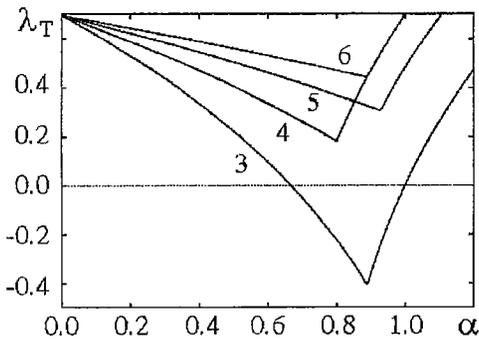


Рис. 8. Условия устойчивости синхронного режима в решетке с шаблоном \mathbf{T}_+

Рис. 9. Условия устойчивости синхронного режима в одно-, двух- и трехмерных решетках

ранее получен для двумерных решеток, если считать, что по ординате отложен линейный размер решетки.

Этот парадоксальный результат еще ждет своего объяснения. По-видимому, увеличение числа связей на узел с увеличением размерности решетки каким-то образом компенсирует экспоненциальное увеличение размера матрицы связей.

Расчеты приводят нас к следующему выводу: для синхронизации решетки хаотических элементов количество связей не является критическим параметром. В то же время, как следует из исследования (см. раздел 3.2), увеличение окрестности решеток приводит систему к синхронному режиму. Отсюда возникает предположение, что для устойчивости синхронного режима в хаотических решетках необходима достаточная «длина» связей, а не только их количество.

Для проверки этой гипотезы были исследованы условия устойчивости синхронного режима в решетках логистических отображений с небольшим числом нелокальных связей. Для этого фиксировалось количество связей на узел и выбирался шаблон связей по всей решетке, одинаковый для всех ее узлов. Это соответствовало шаблону окрестности T , увеличенному до размера решетки. Поскольку полный перебор всех возможных сочетаний связей немислим даже при небольших размерах двумерных решеток, исследовались условия устойчивости для какого-то количества вариантов шаблонов связей T , которые задавались случайным образом.

Численные эксперименты подтвердили эту гипотезу. Оказалось, что нелокальные «дальнодействующие» связи существенно улучшают устойчивость синхронного режима, позволяя заметно уменьшить количество связей в решетке. Проиллюстрируем эти выводы на примере решетки 16×16 с 16 связями на узел. На рис. 10 показаны расчетные кривые топологического фактора, соответствующие 10 различным шаблонам связей. Минимум топологического фактора в этих десяти случаях меняется в пределах от -0.56 до -0.81 . Это означает, что решетки отображений с показателями Ляпунова, меньшими соответствующих значений из диапазона $0.56 \div 0.81$, могут синхронизироваться. Например, для логистического отображения с $\mu=4$ показатель Ляпунова $\lambda \approx 0.7$, следовательно, в этих десяти случаях глобальный синхронный режим будет наблюдаться в решетке этих отображений только с теми шаблонами, у которых кривая топологического фактора проходит ниже уровня -0.7 .

Заметим, что в рассмотренном примере всего 16 связей на узел, что гораздо меньше, чем в случае решетки с широкой локальной окрестностью, рассмотренном выше. В самом деле, для стабилизации решетки 16×16 логистических отображений с $\lambda \approx 0.7$ методом широкой окрестности требуется окрестность размера как минимум 9×9 , что дает 80 связей на узел.

Шаблоны, которыми мы пользовались до сих пор, можно назвать статическими. Как видно из рис. 10, разные шаблоны связей дают очень разные

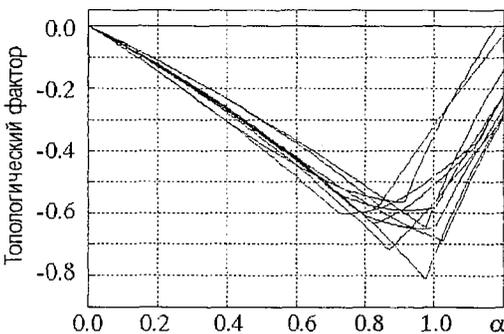


Рис. 10. Случайные шаблоны связей в решетке 16×16

минимумы топологического фактора. С некоторыми шаблонами связей условие устойчивости выполняется, а с некоторыми нет, то есть можно сказать, что есть «хорошие» и «плохие» шаблоны. Если же менять шаблон связей на каждом шаге итерирования, то можно попытаться обойти влияние «плохих» шаблонов, и таким образом, шаблоны становятся «динамическими». К сожалению, в этом случае уже нельзя применить подход [12,16] и формулу (4) для расчета необходимых условий устойчивости, поэтому решетка с динамическими шаблонами была

про моделирована численно. Как показали численные исследования, применение динамических шаблонов позволяет еще больше уменьшить количество связей, необходимых для синхронизации всей решетки, в частности, для решеток размером до 100×100 достаточно трех связей на узел.

Таким образом, отказ от идеи только локальных связей позволяет существенно уменьшить количество связей в большой решетке, необходимых для синхронизации. Например, для решетки 16×16 необходимо 80 локальных связей на узел (синхронизация методом широкой окрестности), или 16 статических нелокальных, или всего 3 динамические случайные связи.

3.4. Решетки с пейсмейкером. Как было показано выше, глобальный синхронный режим невозможен в больших решетках локально связанных хаотических отображений. Этот общий результат не зависит от вида отображений. Поэтому для достижения пространственной синхронизации необходимо как-то изменить систему.

Добавим к решетке еще один хаотический узел (назовем его пейсмейкером) и наделим его особой управляющей ролью, соединив его однонаправленно со всеми узлами решетки, как показано на рис. 11.

Динамика этого независимого узла описывается уравнением отображения f , а поведение узлов решетки – следующими выражениями:

$$x_{ij}(t+1) = f(\beta x_p + (1-\beta)[\alpha \sum_{m=1, n=1}^3 T_{mn} x_{i+m-2, j+n-2} + (1-\alpha)x_{ij}]), \quad (8)$$

где x_p – переменная пейсмейкера. Пейсмейкер одинаково связан со всеми узлами решетки с коэффициентом связи β . В отсутствие пейсмейкера, то есть при $\beta=0$, выражение (8) сводится к уравнению для решетки локально связанных отображений (5).

Как следует из результатов численного моделирования, в поведении решетки логистических отображений, управляемой пейсмейкером, в зависимости от параметра связи β можно выделить три различных типа движений: режим полной синхронизации при $\beta \in [0.5, 1]$, режим «синхронной решетки» при $\beta \in [0.332\dots, 0.5]$ и режим десинхронизации при малых β (рис. 12). При полной синхронизации режимы отображений решетки и пейсмейкера совпадают. Режим синхронной решетки отличается тем, что режимы отображений решетки совпадают между собой, но отличаются от режима пейсмейкера. Этот устойчивый хаотический режим, являющийся одним из проявлений феномена «обобщенной» синхронизации (например, см. [19–22]), существует при любых значениях коэффициента локальных связей α , и синхронное поведение узлов решетки оказывается обусловленным не их локальным взаимодействием, а побочным эффектом действия пейсмейкера. Наличие локальных связей сказывается только на скорости сходимости отображений решетки к синхронному режиму.

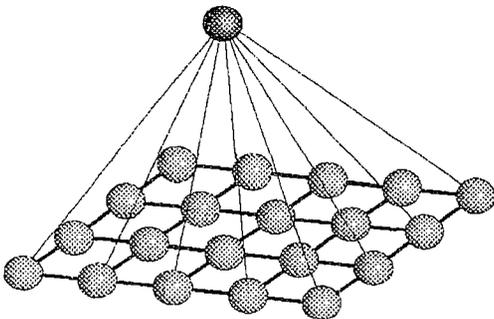


Рис. 11. Двумерная решетка с пейсмейкером

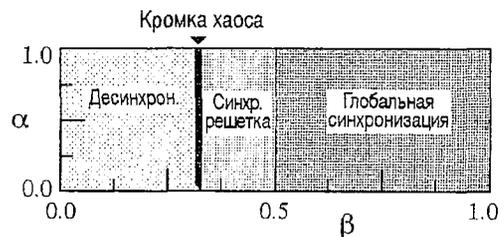


Рис. 12. Бифуркационная диаграмма решетки

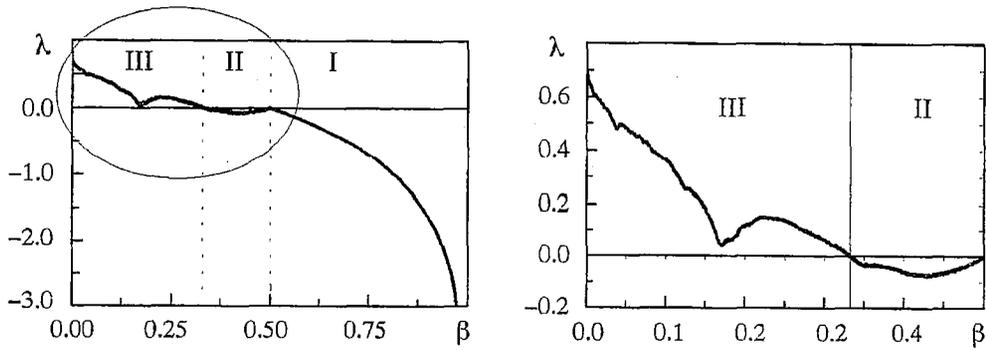


Рис. 13. Показатель Ляпунова колебаний, наведенных во втором отображении

Очевидно, что существование такого типа синхронизации в данном случае связано с тем, что вынужденные колебания в узлах решетки, наведенные пейсмекером, устойчивы по отношению к малым возмущениям в узлах. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим вынужденные колебания в системе двух идентичных логистических отображений с однонаправленной связью. Известно [12, 14–16], что в такой системе синхронный режим существует всегда, а условие его устойчивости по отношению к малым возмущениям в ведомом отображении в линейном приближении можно выразить неравенством

$$(1 - \beta) < \exp(-\lambda), \quad (9)$$

где λ – старший максимальный показатель Ляпунова первого отображения. В случае логистических отображений с $\mu=4$ и показателем Ляпунова $\lambda=\ln 2$ это дает условие устойчивости синхронного режима при $\beta \geq 0.5$. Данный теоретический результат подтверждается и численным моделированием решетки: при $\beta \geq 0.5$ и любом коэффициенте внутренней связи α наблюдается глобальный синхронный режим.

Вычислим показатель Ляпунова траектории второго отображения как вынужденных колебаний (наведенного движения), то есть в неавтономной системе

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \ln \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{k=1}^N \left| \frac{\partial}{\partial x_2} [f(\beta x_1(k)) + (1-\beta)x_2(k)] \right| \right]^{1/N} \right\} = \\ &= \ln \left\{ (1-\beta) \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{k=1}^N \left| \frac{\partial}{\partial x_2} [f(x_2(k))] \right| \right]^{1/N} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как траектории первого и второго отображений не совпадают, вычислить λ^* можно только численно. Зависимость показателя Ляпунова от коэффициента связи β приведена на рис. 13. Четко просматриваются три основные зоны по параметру β . Зона I, $\beta \in [0.5, 1.0]$, соответствует обычному синхронному режиму, показатель Ляпунова λ^* подчиняется закону $\lambda^* = \ln(1-\beta) + \lambda$. Этот режим устойчив, поскольку λ^* здесь отрицателен.

Когда β уменьшается и входит в зону II, $\beta \in [0.332\dots, 0.5]$, синхронные колебания разрушаются, однако движение во втором отображении не становится независимым. Вынужденные колебания во втором отображении устойчивы, что следует из отрицательного показателя Ляпунова. Таким образом, в фазовом пространстве полной динамической системы появляется новый аттрактор с корреляционной размерностью $D \approx 1.8$, который уже не лежит вдоль главной диагонали фазового пространства (рис. 14). Это режим «обобщенной» синхронизации, отвечающий за режим синхронной решетки отображений. Форма аттрактора во всей зоне II остается практически постоянной.

Наконец, третий тип движения реализуется в зоне III, $\beta \in [0, 0.332\dots]$. Показатель Ляпунова вынужденных колебаний становится положительным, и при $\beta \rightarrow 0$ движение системы быстро становится независимым.

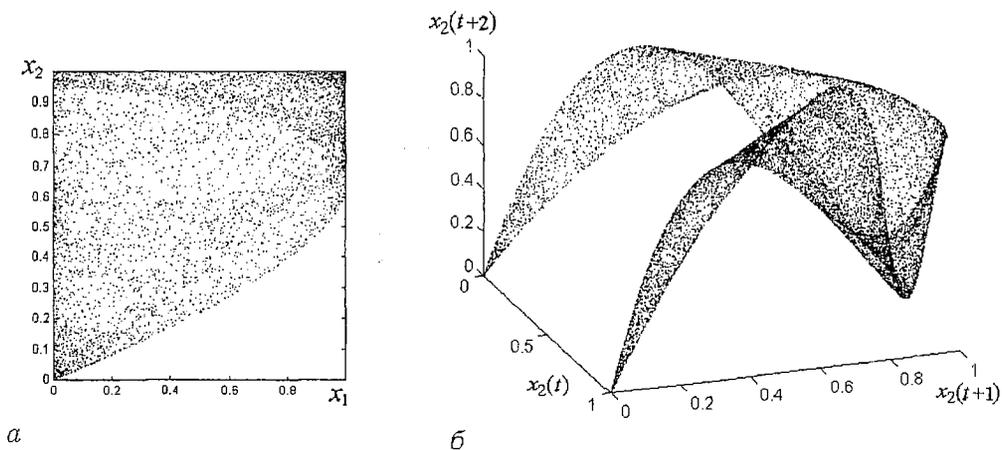


Рис. 14. Недиагональный аттрактор зоны II: *а* – фазовый портрет, *б* – реконструкция аттрактора по наблюдениям переменной второго отображения

Во время вычислений для каждого значения β задавались случайные значения x_1 и x_2 , затем система итерировалась 200000 раз, чтобы пропустить переходный процесс, и на следующих 200000 итерациях вычислялся показатель Ляпунова. Такая процедура гарантирует вычисления на аттракторе системы, а не на неустойчивых траекториях. (Если задать начальные условия системы в зоне III и итерировать систему, постепенно перестраивая (уменьшая) β , то система будет находиться на диагонали $x_1 = x_2$ и даже при $\beta < 0.5$ останется на этой траектории, хотя она станет неустойчивой.) К тому же, такая процедура позволит визуально выявить другие аттракторы в системе, если они существуют.

Экспериментально обнаружено, что в узкой зоне $\beta \in [0.31\dots, 0.332\dots]$, когда вынужденные колебания в системе двух отображений теряют устойчивость, в модели решетки с пейсмейкером режим синхронной решетки сохраняется при ненулевом α , то есть в ситуации, когда попарное взаимодействие узлов решетки с пейсмейкером более неспособно обеспечить устойчивость вынужденных колебаний, помогает наличие локальных связей (см. рис. 12). Чем ближе β к границе зон II и III, тем быстрее сходимость к синхронному режиму. Типичные времена переходного процесса порядка 100 шагов при силе локальных связей α около 1. При уменьшении α и приближении β к 0.31... времена сходимости увеличиваются до десятков тысяч. Ниже значения $\beta = 0.31\dots$ система становится десинхронизированной, хотя вблизи этой границы в решетке еще наблюдается перемежаемость между пространственным хаосом и синхронным режимом.

Таким образом, добавление пейсмейкера к двумерной решетке отображений с локальными связями позволяет обеспечить устойчивость синхронного режима в решетке. Наличие локальных связей при этом оказывается несущественным, а устойчивость синхронного режима решетки обеспечивается действием пейсмейкера. Зная показатель Ляпунова λ отображений системы, можно вычислить соответствующий диапазон (9) коэффициента связи β пейсмейкера с узлами решетки. В частном случае решетки логистических отображений даже при β , меньшем критического значения, обеспечивающего устойчивость глобального синхронного режима, существует зона по параметру связи β , в которой, благодаря явлению обобщенной синхронизации, наблюдается режим синхронной решетки. Однако следует заметить, что существование этого режима связано с динамическими свойствами логистического отображения, а для других типов отображений существование этого режима не гарантировано. В частности, в случае отображения «симметричный tent map» (отображение (7) с параметром $x_0 = 0.5$) этот режим невозможен, поскольку для любой траектории этого отображения показатель Ляпунова $\lambda = \ln 2$.

Выводы

Исследовалась устойчивость глобального синхронного режима в решетках отображений с локальными связями путем непосредственного расчета условий устойчивости по методу [12,14–16], а также путем численного моделирования. Обнаружено, что глобальный синхронный режим невозможен в больших решетках. Показано, что для каждой решетки существует критическое значение показателя Ляпунова составляющих решетку отображений, при превышении которого глобальный синхронный режим теряет устойчивость, то есть становится невозможным, и описана процедура его расчета.

Предложены четыре подхода к модификации структуры динамической системы, которые обеспечивают глобальный синхронный режим:

- перестройка динамического режима отображений решетки;
- увеличение локальной окрестности;
- нелокальные статические и динамические связи;
- введение управляющего узла (пейсмейкера).

В модели решетки с пейсмейкером обнаружена зона параметра, в которой наблюдается синхронный режим решетки, не совпадающий с режимом пейсмейкера (обобщенная синхронизация). Показано, что на границе зон синхронной решетки и десинхронизации наличие локальных связей позволяет сохранить устойчивость синхронного режима.

Автор выражает признательность А.С. Дмитриеву и М.Е. Широкову за ценные замечания и плодотворное обсуждение результатов работы.

Авторские программы для пакета MATLAB, использованные при работе над статьей, можно найти в Internet по адресу

<http://www.cplire.ru/win/InformChaosLab/people/Andreyev/lattices.html>

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант 97-01-00800).

Приложение

Покажем, как из связи типа (1) получить связь типа (3) и обратно.

Введем новые переменные y_i , равные аргументу функции в правой части (1)

$$y_i(t) = x_i(t) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [x_j(t) - x_i(t)], \quad i = 1, \dots, P. \quad (\text{П.1})$$

Тогда исходное выражение (1) можно переписать в виде

$$x_i(t+1) = f(y_i(t)), \quad i = 1, \dots, P. \quad (\text{П.2})$$

Чтобы получить уравнения эволюции для новых переменных, заменим t на $(t+1)$ в уравнении (П.1) и используем замену (П.2)

$$\begin{aligned} y_i(t+1) &= x_i(t+1) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [x_j(t+1) - x_i(t+1)] = \\ &= f(y_i(t)) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} [f(y_j(t)) - f(y_i(t))], \quad i = 1, \dots, P, \end{aligned}$$

то есть приходим к связи типа (3).

Обратный переход осуществляется следующим образом. Пусть имеются уравнения связи отображений ансамбля типа (3)

$$y_i(t+1) = f(y_i(t)) + \sum_{j=1}^P \alpha_{ij} [f(y_j(t)) - f(y_i(t))]$$

или в векторной форме

$$\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{F}(\mathbf{y}(t)),$$

где A – матрица связей и одновременно матрица преобразования переменных, $A_{ij}=\alpha_{ij}$ для $i \neq j$ и $A_{ii}=1-\sum_j \alpha_{ij}$. Введем замену $y=Ax$ (иначе, $x=A^{-1}y$), тогда

$$y(t+1) = Ax(t+1) = AF(y(t)),$$

следовательно, получаем связь типа (1)

$$x(t+1) = F(y(t)) = F(Ax(t)).$$

Преобразование уравнений (1) в (3) является однозначным. Обратное преобразование, а значит, и эквивалентность типов связи (1) и (3) имеет место при условии существования A^{-1} , то есть при $\det(A) \neq 0$. В этом случае из равенства друг другу всех x_i (синхронный режим) следует и равенство всех y_i , и наоборот.

Если условие $\det(A) \neq 0$ не выполнено, то есть ранг R матрицы A меньше P , то из равенства друг другу всех y_i напрямую следует равенство друг другу только R переменных x_i . Пусть для определенности это переменные с индексами $i=1, \dots, R$. Так как матрица A недоопределена, уравнения системы (1) не являются независимыми, то есть правые части уравнений для x_j , $j=R+1, \dots, P$ совпадают. Соответственно, должны совпадать и значения переменных x_j , $j=R+1, \dots, P$. Таким образом, из равенства y_i следует равенство x_i даже при $\det(A)=0$, то есть хотя преобразование (3) в (1) может быть неоднозначным, условия устойчивости эквивалентны.

Библиографический список

1. Theory and applications of coupled map lattices / Ed. K. Kaneko. New York: Wiley, 1993.
2. Langton C. Studying artificial life with cellular automata // Physica D. 1986. Vol. 22. P. 120.
3. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38, № 1. P. 364.
4. Gell-Mann M. What is complexity? // Complexity. 1995. Vol. 1, № 1. P. 16.
5. Gutowitz H. Cellular automata and the sciences of complexity // Complexity. 1995/1996. Vol. 1, № 5. P. 16.
6. Sinha S. Implications of varying communication speeds in «globally» coupled maps // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57, № 4. P. 4041.
7. Alexander J.C., Yorke J.A., You Z. Riddled basins // Int. J. Bifurc. Chaos. 1992. Vol. 2. P. 795.
8. Maistrenko Yu., Kapitaniak T. Different types of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 3285.
9. Heagy J.F., Carroll T.L., Pecora L. Experimental and numerical evidence for riddled basins in coupled chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73. P. 3528.
10. Heagy J.F., Carroll T.L., Pecora L. Desynchronization by periodic orbits // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, № 2. P. R1253.
11. Kuzmin L.V., Panas A.I. Synchronization stability of drive-response systems with dynamical chaos // Proc. 5th Int. Spec. Workshop Nonlinear Dynamics Electronic Systems. 26–27 June, 1997. Moscow, Russia. 1997. P. 485.
12. Dmitriev A.S., Shirokov M.E., Starkov S.O. Chaotic synchronization in ensembles of coupled maps // IEEE Trans. on Circuits and Systems–I: Fundamental Theory and Applications. 1997. Vol. 44, № 10. P. 918.
13. Hasler M., Maistrenko Yu.L. An introduction to the synchronization of chaotic systems: Coupled skew tent maps // IEEE Trans. Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications. 1997. Vol. 44, № 10. P. 856.
14. Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е. Синхронизация ансамблей диссипативно связанных отображений // Препринт ИРЭ РАН. М., 1994. 38 с.
15. Dmitriev A.S., Shirokov M.E., Starkov S.O. Chaotic synchronization of en-

sembles of locally and globally coupled discrete-time dynamical systems. Rigorous results and computer simulation // Proc. 3rd Int. Spec. Workshop Nonlinear Dynamics Electronic Systems. 28–29 July, 1995. Dublin, Ireland. University College Dublin. 1995. P. 287.

16. *Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е.* Синхронизация ансамблей связанных отображений // Изв. вузов. ПНД. 1996. Т. 4, №№. 4–5. С. 40.

17. *Chua L.O., Yang L.* Cellular neural networks: Theory // IEEE Trans. Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications. 1988. Vol. 35, № 10. P. 1257.

18. *Kaneko K.* Spatiotemporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices // Physica D. 1989. Vol. 37. P.60.

19. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51, № 2. P. 980.

20. *Kocarev L., Parlitz U.* Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 11. P. 1816.

21. *Stark J.* Invariant graphs for forced systems // Physica D. 1997. Vol. 109. P. 163.

22. *Hunt B.R., Ott E., Yorke A.* Differentiable generalized synchronization of chaos // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 55, №. 4. P. 4029.

*Институт радиотехники и
электроники РАН, Москва*

Поступила в редакцию 08.12.98

GLOBAL SYNCHRONIZATION IN LATTICES OF CHAOTIC MAPS WITH LIMITED NUMBER OF CONNECTIONS

Yu.V. Andreyev

Stability of the global synchronous mode of chaotic map lattices is investigated by means of direct calculation of the stability conditions, and by means of numerical simulation. The lattices with local connections are shown to have a limit value of the Lyapunov exponent of the lattice maps, above which the global synchronous mode loses stability. The synchronous mode in large lattices is found impossible due to the local nature, i.e., «short range» of the connections. We propose some approaches to modification of the dynamic system structure that can provide stability of the synchronous mode, such as tuning the dynamic mode of the lattice maps, extension of the local neighborhood, use of nonlocal static and dynamic connections, and introduction of an external control node (a pacemaker). In the model with the pacemaker, a spatial synchronous lattice mode is revealed, different from the pacemaker mode («generalized» synchronization).



Андреев Юрий Вениаминович – родился в Уфе (1960), окончил Московский физико-технический институт (1983). После окончания МФТИ работает в Институте радиотехники и электроники РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИРЭ РАН (1993) в области обработки информации методами нелинейной динамики. Опубликовал свыше 20 научных статей по этому направлению. E-mail: chaos@mail.cplire.ru