



## ХАОТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ В ПРОТОЧНОМ ЛАЗЕРЕ С ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ НАКАЧКОЙ

*А. Ю. Лоскутов, А. В. Мушенков, А. И. Одинцов, А. И. Федосеев*

Численно исследуется динамика генерации быстропоточных лазеров с пространственно неоднородной стационарной накачкой внутри неустойчивого резонатора. Подробно изучены характеристики хаотической генерации и сценарий ее развития при изменении управляющего параметра системы. Расчеты включали построение проекций аттракторов, отображений Пуанкаре, определение корреляционной размерности и размерности вложения аттрактора. Найдено, что хаотическая генерация возникает путем разрушения квазипериодической динамики с двумя несонизмеримыми частотами. Посредством вычисления размерности аттрактора описаны перестройки хаотических режимов.

### 1. Введение

Лазер как нелинейная распределенная система является удобным средством для исследования нелинейных светодинамических явлений, таких как оптическая неустойчивость, автопulsации излучения, возникновение хаоса и др. [1–3]. Практический интерес к этим явлениям связан с возможностью создания на их основе новых эффективных методов управления временными характеристиками лазерного излучения [4], что в перспективе позволило бы разработать типы технологических лазеров с быстрым переключением режимов работы. В то же время хаотические режимы генерации могут найти применение в системах передачи информации [5].

Движение среды через оптический резонатор лазера приводит к специфическим механизмам неустойчивости, обусловленным нелокальным характером взаимодействия поля со средой и возникновением инерционной обратной связи между различными пространственными зонами системы. При этом сильное влияние на динамику генерации оказывают пространственные градиенты параметров системы в направлении потока.

Хаотическая генерация лазеров исследовалась в целом ряде работ (см., например, [6–8]). В большинстве случаев она получалась при внешней модуляции параметров лазера (добротности резонатора, скорости накачки и т.п.) или была вызвана конкуренцией встречных волн в кольцевом резонаторе. В работе [4] было показано, что в быстропоточном лазере (БПЛ) с неоднородной накачкой внутри неустойчивого резонатора при соответствующем выборе профиля накачки и других параметров системы могут наблюдаться различные динамические режимы генерации, включая разные виды автомодулированной генерации, а также

хаотическую генерацию. В такой системе хаотизация колебаний не связана с какой-либо внешней модуляцией параметров, а обусловлена взаимодействием двух конкурирующих механизмов образования инверсии – вноса возбужденных частиц потоком и внутренней, неоднородной по пространству накачки. Целью настоящей работы было детальное исследование хаотической динамики генерации БПЛ.

## 2. Физическая модель быстропротекающего лазера с пространственно неоднородной накачкой

Рассматривалась идеализированная модель быстропротекающих газовых лазеров с неустойчивым резонатором (НР), которые находят применение для обработки материалов (так называемые «технологические лазеры»). Расчеты выполнены для НР цилиндрической геометрии. На рис. 1 изображена верхняя (по потоку газа) часть такого резонатора. При этом ось резонатора совпадает с осью  $Z$ . Распределение накачки внутри НР характеризуется резким спадом скорости возбуждения вблизи оптической оси в зоне неоднородности шириной  $h_0$  (на рис. 1 заштрихована).

В расчетной модели были сделаны следующие основные допущения.

1. Поле в НР описывалось в приближении геометрической оптики с использованием уравнений переноса для цилиндрических волн.

2. Для активной среды использовалось простейшее линейризованное кинетическое уравнение с одной релаксационной константой, соответствующее двухуровневой модели среды.

3. Принималась модель НР, в которой потери считаются равномерно распределенными по длине резонатора, что позволяет пренебречь изменением характеристик поля и среды вдоль оптической оси резонатора и рассматривать одномерную задачу для определения интенсивности поля  $I(x,t)$  и коэффициента усиления среды  $\alpha(x,t)$ . Последнее допустимо для НР с небольшим увеличением  $M \leq 2$ , где  $M$  – коэффициент увеличения на двойной проход.

При сделанных предположениях система уравнений для поля и среды может быть записана как

$$\tau_c \partial I / \partial t + x \partial I / \partial x = [(\alpha - a) / \theta - 1] I, \quad (1)$$

$$\partial \alpha / \partial t - v \partial \alpha / \partial x = -(\sigma I + \tau_r^{-1}) \alpha + \sigma S, \quad (2)$$

где  $\theta = \ln M / (2L)$  – распределенные потери на расширение пучка,  $L$  – длина резонатора,  $\tau_c = (c\theta)^{-1}$  – время растекания поля в НР,  $a$  – распределенные диссипативные потери,  $v$  – скорость потока,  $\sigma$  – сечение оптического перехода,  $\tau_r$  – время релаксации инверсии среды,  $S$  – скорость возбуждения (накачки).

В БПЛ с дозвуковой скоростью протока величина  $\tau_c$  обычно на 3–4 порядка меньше других характерных времен – времени релаксации  $\tau_r$  и времени пролета газа через резонатор  $\tau_f = h/v$ . Это дает основание пренебречь в уравнении (1) первым членом, считая, что процесс генерации является квазистационарным, и поле в каждый момент времени отслеживает адиабатически медленные изменения характеристик среды. Использование такого квазистационарного приближения позволяет значительно сократить объем вычислений. Условия применимости данного приближения к решению системы (1)–(2) имеют вид:

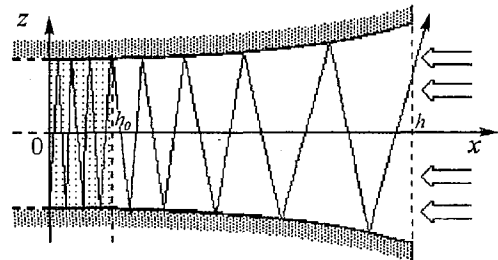


Рис. 1. Схема неустойчивого резонатора. Широкими стрелками показано направление движения активной среды

$$\sigma/\tau_c \ll 1, \quad v\tau_c \partial\alpha/\partial x \ll \alpha. \quad (3)$$

При заданном  $\tau_c$  эти условия накладывают ограничения на максимальную интенсивность поля в резонаторе и на допустимую величину пространственных градиентов усиления. Однако как показывает более детальный анализ и численное моделирование, данное приближение в принятой модели может приводить к нефизичным решениям, характеризующимся неограниченным ростом величин  $I$  и  $\partial\alpha/\partial x$ , для которых условия (3) не выполняются ни для какого конечного  $\tau_c$ . Их появление связано с наличием ступенчатого спада интенсивности поля на краю зеркал, что может приводить к образованию резких градиентов коэффициента усиления и неограниченному сужению импульсов генерации. Для устранения такого рода решений в модели НР производилось «сглаживание» края зеркал [9] путем специального выбора профиля потерь  $a(x)$ , входящих в (1). (В реальном резонаторе естественное сглаживание распределения поля на краю зеркал происходит благодаря дифракции излучения).

В численных расчетах использовались нормированные величины  $x/h$ ,  $t\tau_f$ ,  $\tau/\tau_f$ ,  $\tau_c/\tau_f$  (для них сохраняются прежние обозначения), а также безразмерные величины интенсивности  $w = \sigma/\tau_f$ , коэффициента усиления  $g = \alpha/\theta$ , диссипативных потерь  $\chi = a/\theta$  и скорости накачки  $q = \sigma\tau_f/\theta$ .

Таким образом, в нормированных величинах уравнения квазистационарной генерации можно записать в виде

$$x\partial w/\partial x = (g - \chi - 1)w, \quad (4)$$

$$\partial g/\partial t - \partial g/\partial x = -(w + \tau_r^{-1})g + q, \quad (5)$$

где функция  $\chi(x)$  описывает дополнительные потери, вводимые в краевой зоне сглаженного зеркала. При этом интенсивность на оси резонатора определяется соотношением

$$w(0,t) = (\partial g/\partial x)_{x=0} - \tau_r^{-1} + q(0), \quad (6)$$

вытекающим из (5) с учетом условия квазистационарности  $g(0,t)=1$ , которое должно выполняться в НР при наличии генерации. Граничное условие для коэффициента усиления при  $x=1$  имеет вид  $g(1,t)=g_h$ , где  $g_h$  – коэффициент усиления среды, поступающей на вход резонатора. В качестве начальных распределений  $g(x,0)$  и  $w(x,0)$  использовались стационарные решения системы (4)–(5). Профиль накачки имел следующий вид:

$$q(x) = q_m[1 - \exp(-x^4/h_0^4)], \quad (7)$$

где  $h_0$  – ширина зоны неоднородности накачки вблизи оси НР ( $h_0 \ll h$ ),  $q_m$  – максимальная скорость накачки вдали от оси.

Система, описываемая уравнениями (4)–(7), полностью определяется независимыми параметрами  $\tau_r$ ,  $h_0$ ,  $q_m$ , (профиль  $\chi(x)$  считаем фиксированным), а также заданием входного усиления  $g_h$ . Большинство расчетов было выполнено для значения  $h_0/h=0.1$ . При этом величина  $g_h$  принималась равной  $g_h = g_m = q_m\tau_r$ , где  $g_m$  – максимальное значение коэффициента усиления, которое может быть достигнуто в неподвижной среде в отсутствие генерации. Приводимые ниже данные получены для значения  $g_m=3.8$ . При описании динамического поведения системы в качестве основного управляющего параметра использовалась величина  $\tau$ , выражающая отношение времени релаксации к времени пролета.

### 3. Особенности хаотической динамики системы

Приводимые ниже результаты расчетов показали, что с изменением управляющего параметра  $\tau$  наблюдается достаточно сложная картина смены

динамических режимов работы лазера. Стационарная генерация имеет место в диапазоне  $0.2 < \tau < 1.7$ . В области  $\tau < 0.2$ , где основной вклад в образование инверсии дает механизм внутренней накачки [4], наблюдаются регулярные автопульсации с периодом  $T \approx 0.15\tau_f$ . К противоположной границе устойчивости стационарной генерации ( $\tau \approx 1.7$ ) примыкает область хаотической генерации. При дальнейшем увеличении  $\tau$ , начиная со значения  $\tau \approx 2.4$ , вновь возникают регулярные автопульсации с периодом следования импульсов, близким к  $\tau_f$ . Их возникновение обусловлено механизмом смены активной среды в резонаторе, который при больших  $\tau$  становится доминирующим [4]. Таким образом, хаотическая динамика имеет место в промежуточной области значений управляющего параметра, в которой в образовании инверсии участвуют оба названных механизма.

В настоящей работе основное внимание уделено изучению хаотической генерации и сценария ее развития. Помимо пространственно-временных распределений  $I(x,t)$  и  $\alpha(x,t)$  исследовались также фурье-спектры интенсивности. Кроме того, для облегчения анализа динамики системы (4)–(5) были построены отображения Пуанкаре, а также проекции аттрактора на плоскости в фазовом пространстве. Сечения Пуанкаре соответствовали заданному уровню значений выходной интенсивности поля  $I_{out} = x_0 = \text{const}$ . В качестве двух других динамических переменных  $x_1$  и  $x_2$  были выбраны значения интенсивности на оси НР и величина коэффициента усиления в средней точке апертуры резонатора. Эти же переменные использовались при построении проекций аттракторов на плоскость  $x_0 = \text{const}$ . Рассчитывались также величины корреляционной размерности и размерности вложения аттракторов.

Расчеты показывают, что развитие хаоса из режима стационарной генерации происходит в узком диапазоне изменения управляющего параметра между значениями  $\tau = 1.69$  и  $\tau = 1.71$  и проходит несколько стадий. Непосредственно вблизи границы устойчивости при  $\tau = 1.690$  наблюдалось появление слабой модуляции интенсивности генерации (с глубиной  $\sim 0,3\%$ ) синусоидальным сигналом с частотой  $\nu_m = 7.28\nu_f$  ( $\nu_f = 1/\tau_f$  – пролетная частота). Динамический режим на этом этапе соответствует предельному циклу.

При  $\tau = 1.693$  появляется вторая модуляционная частота  $\nu'_m = 6.25\nu_f$  и модуляция интенсивности принимает вид биения двух частот. Разность частот  $\Omega = \nu_m - \nu'_m$  близка к пролетной частоте  $\nu_f$ . Соответствующее отображение Пуанкаре в форме замкнутой кривой отвечает квазипериодический динамике с двумя несоизмеримыми частотами. Вид проекции аттрактора показывает, что последний представляет собой двумерный тор с плотной обмоткой.

Начиная со значения  $\tau = 1.696$ , наблюдается усложнение отображений Пуанкаре и проекций аттракторов, которые принимают характерный вид, показывающий, что поверхность тора становится негладкой (рис. 2, а). В соответствии со сценарием разрушения квазипериодического движения на этой стадии тор начинает гофрироваться [10]. При этом происходит значительное усложнение фурье-спектра и пространственно-временной картины генерации. Дальнейшая стадия разрушения тора показана на рис. 2, б.

Разрушение тора и переход от квазипериодической динамики к хаотическим колебаниям завершается при  $\tau = 1.71$ . При последующем увеличении значения управляющего параметра вплоть до  $\tau = 2.055$  происходит усложнение хаотической динамики, а временная картина генерации становится все более неупорядоченной. В фурье-спектрах появляется большое число уширенных спектральных компонент. Отображения Пуанкаре и проекции аттракторов состоят из множества нерегулярно расположенных точек и траекторий. На рис. 2, в в качестве примера показан вид проекции аттрактора для случая развитого хаоса, наблюдаемого при

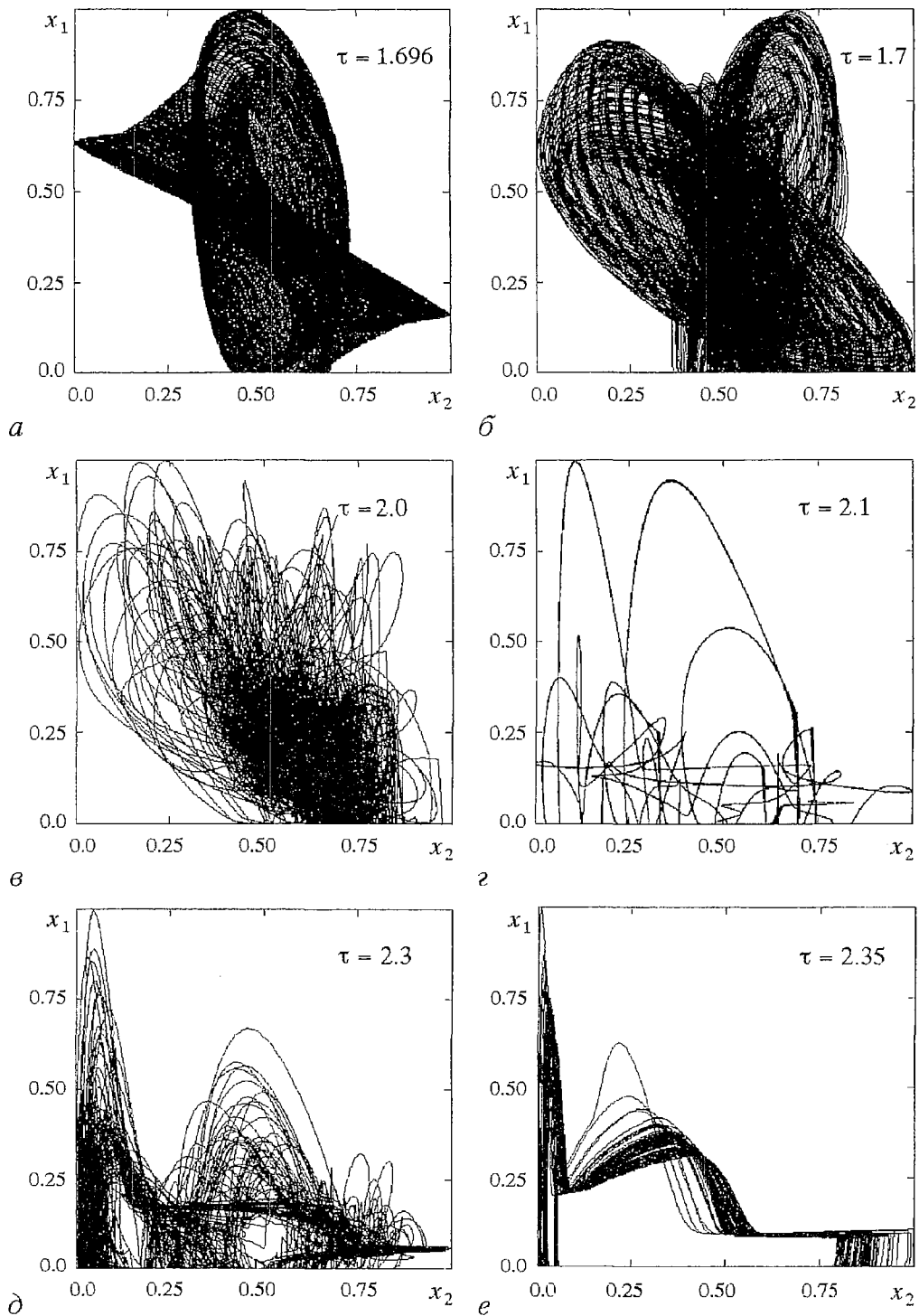


Рис. 2. Проекция аттракторов на плоскость  $x_0 = \text{const}$  при различных значениях управляющего параметра  $\tau$

$\tau=2.0$ , а на рис. 3 приведена соответствующая пространственно-временная картина генерации.

Однако в дальнейшем в результате бифуркации, происходящей вблизи значения  $\tau=2.1$ , динамический режим генерации резко упрощается. Отображения

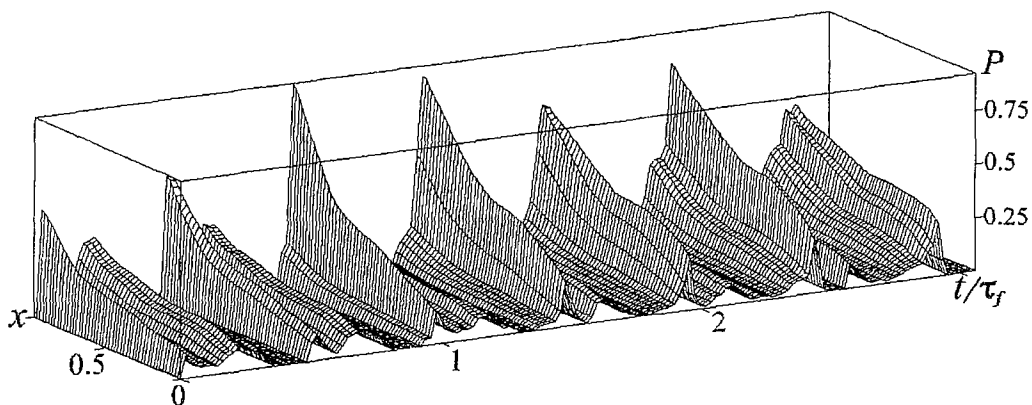


Рис. 3. Пространственно-временное распределение интенсивности генерации для значения управляющего параметра  $\tau=2.0$

Пуанкаре и проекции аттракторов принимают вид, характерный для периодической динамики (рис. 2, г). В сложной временной картине генерации обнаруживается периодичность с величиной периода  $T \approx 3.3\tau_f$ . Наблюдается существенное упрощение фурье-спектров, обусловленное тем, что значения частот спектральных компонент становятся соизмеримыми. Можно предположить, что это является следствием захвата частот спектральных компонент и их фазовой синхронизации. Периодическая динамика сохраняется в относительно широком интервале вплоть до значения  $\tau \approx 2.3$ .

При  $\tau=2.3$  хаотическая динамика вновь появляется (рис. 2, д), однако, как видно из рисунка, хаос в этой области является менее развитым, чем вблизи  $\tau=2.0$  (см. рис. 2, в). Это связано с тем, что точка с  $\tau=2.3$  находится близко к границе области существования хаоса. Уже при значении  $\tau=2.35$  происходит вырождение хаотического аттрактора в тор (рис. 2, е), а в области  $\tau > 2.4$  динамика генерации становится периодической.

Для систем, имеющих сложную, в том числе хаотическую динамику, количественной мерой неупорядоченности движения чаще всего служит спектр показателей Ляпунова. Однако для распределенных систем, которые описываются уравнениями в частных производных, расчет этих показателей затруднен. В то же время, для такого рода систем могут быть использованы другие количественные характеристики. Для того, чтобы установить число эффективных степеней свободы (это позволяет, по крайней мере принципиально, описать поведение распределенной системы с помощью соответствующего числа обыкновенных дифференциальных уравнений), нами проводились вычисления размерности вложения аттрактора. Параллельно рассчитывалась также корреляционная размерность самого хаотического аттрактора при различных значениях управляющего параметра. В этих расчетах использовался хорошо известный метод Грассбергера - Прокачиа, основанный на вычислении корреляционных интегралов. Этот метод позволяет определить обе указанные размерности по наблюдаемой временной зависимости всего одной из динамических переменных системы [11]. В качестве такой переменной выбиралась величина выходной мощности генерации. Данные расчетов представлены на рис. 4. Вблизи левой границы исследуемого диапазона, где динамической характеристикой системы является предельный цикл, размерность вложения минимальна и составляет  $d_e=3$ . По мере увеличения  $\tau$  размерность вложения увеличивается сначала до  $d_e=6$  (квазипериодическая генерация), затем достигает максимальной величины  $d_e=8$  (хаотическая генерация в диапазоне  $\tau=1.8 \div 2$ ). Приведенные данные позволяют считать, что возникновение хаоса связано с усложнением характера движения и

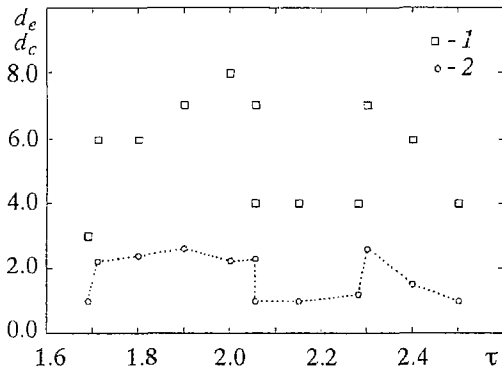


Рис. 4. Размерность вложения  $d_e$  (1) и корреляционная размерность аттрактора  $d_c$  (2), рассчитанные для различных значений управляющего параметра  $\tau$

исследуемой распределенной системы проточного лазера моделью, использующей систему из небольшого числа обыкновенных дифференциальных уравнений.

В исследуемом диапазоне  $\tau$  изменение корреляционной размерности аттрактора  $d_c$  в целом качественно повторяет изменение размерности вложения. По сравнению с квазипериодическим режимом вблизи границ диапазона, где  $d_c \approx 2$ , корреляционная размерность хаотического аттрактора заметно увеличивается и в области глубокого хаоса приближается к значению  $d_c = 3$ . Там, где происходит отмеченное выше упрощение динамики ( $\tau = 2.1 \div 2.3$ ), полученные значения корреляционной размерности близки к единице. Изменения величины  $d_c$  внутри области хаотической генерации указывают на происходящую перестройку хаотического аттрактора.

#### 4. Заключительные замечания

Результаты расчетов динамики БПЛ с неоднородной накачкой внутри неустойчивого резонатора позволили выяснить основные закономерности хаотических режимов генерации в лазерных системах данного класса. Найдено, что хаос возникает в результате потери устойчивости стационарной генерации. Сценарий его развития включает стадии предельного цикла и квазипериодической динамики с двумя несоизмеримыми частотами с последующим распадом двумерного тора. С увеличением управляющего параметра хаотическая динамика претерпевает качественные изменения, свидетельствующие о происходящей перестройке хаотического аттрактора. Это подтверждается данными расчетов размерности хаотического аттрактора и размерности его вложения. Внутри диапазона хаотической генерации существует область периодической динамики, которая возникает в результате захвата и фазовой синхронизации частотных компонент фурье-спектра генерации.

Физическая природа возникновения хаоса в рассматриваемой системе заключается в наличии в ней двух типов неустойчивости с разными характерными частотами возмущений. Они связаны с различными процессами восстановления инверсии в резонаторе лазера – вносом возбужденных частиц потоком и пространственно неоднородной накачкой внутри резонатора. Хаотическая генерация имеет место в промежуточной области значений управляющего параметра, в которой оба эти процесса играют заметную роль. Наблюдаемая эволюция динамических режимов в зависимости от  $\tau$  отражает сложное

увеличением числа эффективных степеней свободы динамической системы.

Как видно из рисунка, с ростом управляющего параметра от значения  $\tau = 2.1$  происходит падение размерности вложения, что соответствует вырождению хаотической динамики в периодическую. Восстановление хаотической динамики при  $\tau = 2.3$  сопровождается увеличением размерности вложения ( $d_e = 7$ ), а затем, при переходе к периодическому режиму генерации вблизи правой границы исследуемого диапазона величина  $d_e$  вновь уменьшается. Полученные данные по величинам размерностей вложения (см. рис. 4) указывают на принципиальную возможность адекватного описания динамики

взаимодействие указанных конкурирующих процессов в механизме генерации лазера.

*Работа выполнена при поддержке Миннауки РФ по программе «Физика лазеров» (пр. № 1.60)*

### Библиографический список

1. Haken H. // Rev. Mod. Phys. 1975. Vol. 47, № 1. P. 67.
2. Casperson L.W. // IEEE J. Quant. El. 1978. Vol. QE 14, № 10. P. 756.
3. Хакен Г. Лазерная светодинамика М.: Мир, 1988. 240 с.
4. Мушенков А.В., Одинцов А.И., Саркаров Н.Э., Федосеев А.И., Федянович А.В. // Квантовая электроника. 1997. Т. 24, № 5. С. 431.
5. Лоскутов А.Ю., Мищенко Ю.В., Рыбалко С.Д. // Физическая мысль России. 1997. Т. 23. С. 53.
6. Глова А.Ф., Козлов С.Н., Лиханский В.В., Ярцев В.П. // Квантовая электроника. 1990. Т. 17, № 7. С. 8946.
7. Dangoise D., Glorieux P., Hennequin D. // Phys. Rev. 1987. Vol. 36, № 10. P. 4775.
8. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г. // Квантовая электроника. 1994. Т. 21, № 10. С. 903.
9. Ананьев Ю.А. Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения. М.: Наука, 1979. 285 с.
10. Арнольд В.И., Абраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Динамические системы. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 5, 218 с.
11. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990, 280 с.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию 6.10.98  
после переработки 23.02.99

### CHAOTIC GENERATION IN A CROSSFLOW LASER WITH SPATIAL NONUNIFORM EXCITATION

*A. Loskutov, A.V. Mushenkov, A.I. Odintsov, A.I. Fedoseev*

Dynamics of a model of the continuously pumped crossflow laser with the unstable cavity is investigated. Depending on the control parameter characteristics of the chaotic lasing and onset of chaos are described. Projection of the corresponding attractors, Poincare maps, correlation and embedding dimensions are presented. It is shown that the chaotic lasing appears via destruction of a quasiperiodic behaviour with two incommensurate frequencies. By calculation of the attractor dimension qualitative changing in the corresponding chaotic regimes is described.



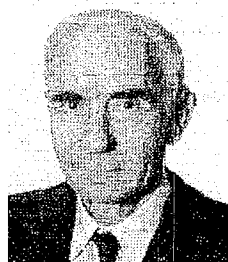
*Лоскутов Александр Юрьевич* – доктор физико–математических наук, доцент физического факультета МГУ, автор более 80 научных статей и нескольких монографий, в том числе учебного пособия. Специалист в области физики нелинейных процессов, лауреат премии им.И.И.Шувалова (1998). Научный руководитель 14 диссертационных работ.

E-mail: loskutov@moldyn.phys.msu.su





*Мушенков Андрей Викторович* – аспирант кафедры оптики и спектроскопии физического факультета МГУ, автор 8 научных публикаций в области физики лазеров, нелинейной оптики.



*Одинцов Анатолий Иванович* – кандидат физико–математических наук, доцент кафедры оптики и спектроскопии физического факультета МГУ, автор более 150 научных публикаций. Область научных интересов – оптическая спектроскопия, физика лазеров, нелинейная оптика. Научный руководитель 14 диссертационных работ.



*Федосеев Анатолий Иванович* – кандидат физико–математических наук, доцент кафедры оптики и спектроскопии физического факультета МГУ, автор 58 научных публикаций в области физики лазеров, квантовой электроники.