



РЕКОНСТРУКЦИЯ УРАВНЕНИЙ НЕАВТОНОМНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ: МОДЕЛИ, ЭКСПЕРИМЕНТ

Б.П. Безручко, Е.П. Селезнев, Д.А. Смирнов

Предложена процедура конструирования по скалярному временному ряду дифференциальных уравнений модели колебательной системы, находящейся под действием гармонической внешней силы. В процедуре используется алгоритм глобальной реконструкции и учитывается априорная информация о виде воздействия. Процедура протестирована на нескольких эталонных системах – нелинейных осцилляторах с различным видом силы трения и потенциала. Ее работоспособность и эффективность демонстрируются на динамических системах с добавленными шумами и на примере построения модели реальной радиотехнической системы – нелинейной RLC -цепи с переключаемыми конденсаторами.

Введение

Возможности современной вычислительной техники позволили развить новые подходы к созданию эмпирических математических моделей объектов и явлений. Если раньше речь шла, в основном, об интерполяции (или аппроксимации) данных эксперимента и о получении функциональной зависимости наблюдаемых величин от времени или координаты, то сейчас разрабатывается техника построения модельных дифференциальных или разностных уравнений. Одним из способов является реконструкция¹ уравнений динамической системы по скалярному временному ряду – дискретной последовательности чисел, полученной стробированием временной реализации одной наблюдаемой переменной [1–7]. С ее помощью в последние годы решаются задачи прогнозирования [1–7], классификации систем [8,9], скрытой передачи информации [10].

Используемые методики обычно ориентированы на построение модели в универсальном виде (система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с правой частью в виде полинома) и реализуют алгоритм глобальной реконструкции² для определения значений параметров. Но такая

¹ В статье мы пользуемся общепринятым термином «реконструкция» (восстановление), хотя он полностью адекватен лишь ситуации, когда временной ряд получен путем численного решения уравнений. В приложении к реальным объектам и явлениям, для которых нет единственной или «истинной» математической модели, уместнее было бы говорить о «конструировании», а не о «реконструкции».

² Глобальной реконструкцией называют восстановление модели по *всему* временному ряду. Модель получают, например, в виде системы обыкновенных уравнений первого порядка. Альтернативой является построение локальных (например, кусочно-линейных) предсказательных моделей, которые выборочно используют для прогноза короткие (локальные) участки временного ряда [1,11,12]. Они реализуются алгоритмически, но не могут быть записаны аналитически в компактной форме (дифференциальных уравнений или отображений).

модель во многих случаях не обладает свойством глобальной устойчивости (фазовые траектории уходят на бесконечность); она пригодна, как правило, лишь для весьма краткосрочного прогноза, а ее параметры многочисленны, и им трудно придать физический смысл. Это практически неизбежная «плата» за общность исходного представления, за экономию сил и времени на выборе математической конструкции, наиболее удобной для наполнения конкретным физическим содержанием. Вероятность угадывания оптимальной структуры модельных уравнений без учета априорной информации или специального предварительного исследования объекта (если это возможно) в общем случае очень мала. Поэтому представляется целесообразным выделять некоторые классы движений и систем и разрабатывать для них специфические процедуры построения моделей. Успех моделирования при таком подходе зависит от набора базовых классов моделей, которыми располагает исследователь, и от их изученности, от надежности процедур распознавания подходящего класса по временному ряду, от способов определения оптимальных значений параметров.

Например, если размерность наблюдаемого движения мала (не выше 3) и известно о наличии внешнего воздействия на исследуемый объект, есть основания предполагать (гипотеза), что его поведение можно удовлетворительно описать уравнением неавтономного осциллятора. В данной статье предлагаются процедуры проверки этого предположения, а также конкретизации модельных уравнений в ситуации, когда воздействие силовое (не параметрическое) и гармоническое. Развиваемый подход модернизирует известный алгоритм глобальной реконструкции (раздел 1) путем учета априорной информации о внешнем воздействии (раздел 2). В разделе 3 подход тестируется на нескольких примерах восстановления по временному ряду уравнений осцилляторов с потенциальными функциями различного вида; анализируется влияние шумов. Окончательно работоспособность используемых процедур демонстрируется на примере конструирования по экспериментальному временному ряду модели реальной RLC -цепи с кусочно-линейной емкостью ³ (раздел 4). Моделируемый объект представляет собой радиотехническую систему с большим числом активных и пассивных элементов с присущими им шумами и неустойчивостями.

1. Универсальная процедура построения модели по скалярному временному ряду

1.1. Алгоритм глобальной реконструкции дифференциальных уравнений.

Стандартный подход к построению дифференциальных уравнений по экспериментальным данным опирается на теорему Такенса [13] (см. Приложение) и заключается в следующем. Пусть данные о моделируемой системе представляют собой скалярный временной ряд значений наблюдаемой величины $\{v_i\}$, $i = 1, \dots, N_S$, где $v_i = v(y(t_0 + (i-1)\tau))$, y – неизвестный вектор состояния объекта, t_0 – момент начала наблюдения, N_S – количество точек скалярного временного ряда, τ – интервал дискретизации (должен быть достаточно малым, чтобы получить хорошее приближение гладкой реализации). Сначала по $\{v_i\}$ одним из методов численного дифференцирования ⁴ составляются временные ряды из D -мерных векторов состояния $\{x_i\}$ и их производных $\{dx(t_i)/dt\}$, $i = 1, \dots, N$, $N = N_S - D + 1$ – количество точек векторного временного ряда, $D \geq 2d + 1$, где d обычно оценивается с помощью вычисления корреляционной размерности d_c . В последнее

³ Выбор объекта обусловлен: 1) низкочастотностью схемы, что позволяет использовать в эксперименте доступные аналого-цифровые преобразователи; 2) наличием для нее дедуктивной модели, полученной из уравнений Кирхгофа.

⁴ Так как численное дифференцирование усиливает роль шумовой составляющей, то при моделировании по зашумленным данным наблюдаемую $v(t)$ обычно подвергают фильтрации – сглаживают.

время при реконструкции стали использовать меньшее значение D , например, просто дополняя d_c до целого числа. Так, в [4,5] при восстановлении уравнений 3-мерной системы оказался удовлетворительным выбор $D = 3$. Модель ищется в виде

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2, \\ dx_2/dt &= x_3, \\ &\dots \\ dx_D/dt &= f(x_1, x_2, \dots, x_D), \end{aligned} \tag{1}$$

где функция f является полиномом некоторой степени K от D переменных (согласно теореме Вейерштрасса, полиномом достаточно высокой степени можно сколь угодно точно приблизить гладкую функцию)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_D) &= \sum_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^K a_{l_1, l_2, \dots, l_D} \prod_{j=1}^D x_j^{l_j}, \\ \sum_{j=1}^D l_j &\leq K. \end{aligned} \tag{2}$$

Значения коэффициентов a_{l_1, l_2, \dots, l_D} выбираются так, чтобы минимизировать величину среднеквадратичного отклонения точек ряда от аппроксимирующей функции $f(x)$ (метод наименьших квадратов). То обстоятельство, что коэффициенты входят в выражение (2) линейно, позволяет вычислить их значения путем решения системы линейных алгебраических уравнений. Меняя K и D , можно получить набор моделей.

1.2. Оценка качества модели. С помощью описанного подхода или других способов можно получить множество моделей. Но какая из них лучше? Ответ зависит от целей моделирования. Для целей прогноза естественной количественной характеристикой качества модели является ε – нормированная среднеквадратичная ошибка аппроксимации временного ряда производных

$$\varepsilon = \left(\frac{(1/N) \sum_{i=1}^N [dx_D(t_i)/dt - f(x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_D(t_i))]^2}{(1/N) \sum_{i=1}^N [dx_D(t_i)/dt - (1/N) \sum_{i=1}^N dx_D(t_i)/dt]^2} \right)^{1/2} \tag{3}$$

Так, $\varepsilon = 1$ при аппроксимации полиномом нулевого порядка: $f(x) = \text{const}$ (среднее значение). При увеличении порядка полинома и размерности системы величина погрешности уменьшается, но при слишком больших значениях D и K этот эффект незначителен. Кроме того, возрастает количество коэффициентов модели и сложность истолкования их физического смысла. Целесообразно прекратить увеличение D и K , если скорость уменьшения ε становится достаточно малой (это можно оценить визуально по графику зависимости $\varepsilon(D, K)$).

В случаях, когда сложность модели мешает достижению целей моделирования, используют критерий, согласно которому лучшей является модель, имеющая наименьшее значение величины I : $I = \log_2 \varepsilon + M(D, K)$, где $M(D, K)$ – количество коэффициентов модели (в случае полинома $M(D, K) = (D+K)! / (D! \cdot K!)$). Эта величина названа в [1] энтропией модели. Первое слагаемое учитывает погрешность аппроксимации, а второе – сложность модели. Этим критерием удобно пользоваться, так как минимум на графике выявить легче, чем медленность изменения, но наш опыт показывает, что при моделировании реальных систем и некоторых эталонных математических объектов (раздел 3) энтропия модели зачастую имеет минимум при $K = 0$ и не помогает выявить

оптимальную модель. Для многих целей моделирования главным критерием, по всей видимости, остается качественное соответствие поведения объекта и модели (качественное совпадение видов временных реализаций, фазовых портретов и структуры бифуркационных множеств в пространстве параметров).

2. Восстановление уравнений неавтономного нелинейного осциллятора

2.1. Постановка задачи. Воспользуемся универсальной процедурой (п.1.1) и реконструируем с ее помощью модельные уравнения по скалярному временному ряду, полученному численным интегрированием уравнения нелинейного осциллятора с гармоническим силовым внешним воздействием

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= y_2, \\ dy_2/dt &= -g_0(y_1, y_2)y_2 - f_0(y_1) + A_0 \cos(2\pi t/T_0), \end{aligned} \tag{4}$$

где функция g_0 описывает нелинейное затухание, f_0 – производная потенциала, A_0 и T_0 – амплитуда и период внешнего воздействия. Система (4) выступает в роли моделируемого объекта, в качестве наблюдаемой используем первую координату вектора состояния $v(y) = y_1$. Многочисленные компьютерные эксперименты, проведенные при различных видах функций g_0 и f_0 в (4) и значениях K в (2), показывают, что получающиеся с помощью универсальной процедуры трехмерные ($D = 3$) модели, как правило, глобально неустойчивы (фазовые траектории уходят на бесконечность). Фундаментальной причиной неэффективности модели (1) является то обстоятельство, что невозможно переписать уравнение (4) в виде (1) со стационарным полем скоростей. Эту трудность можно преодолеть, увеличив размерность модели с постоянными коэффициентами до $D = 4$, но при этом значительно увеличивается количество коэффициентов. Интервал времени до начала существенной расходимости (предсказательную способность модели) можно увеличить также и за счет увеличения K , но это приведет к увеличению числа коэффициентов модели, дополнительными трудностям с определением их физического смысла и необозримости структуры ее пространства параметров.

Качественного совершенствования модели можно добиться, отказавшись от постоянства коэффициентов – введя в правую часть мультипликативно или аддитивно явную зависимость от времени. Мы ограничимся рассмотрением второго варианта – аддитивного (силового) воздействия и воспользуемся априорной информацией о наличии гармонического внешнего воздействия. Не задаваясь пока вопросом об источнике информации и о процедуре выявления параметров воздействия из данных, будем строить модель в виде

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2, \\ dx_2/dt &= f(x_1, x_2) + A \cos(2\pi t/T) + B \sin(2\pi t/T), \end{aligned} \tag{5}$$

где функция f – полином (2), а последние два слагаемых связаны с наличием и видом воздействия (T – предполагаемое значение периода воздействия). Специфической чертой модели вида (5) является то, что она содержит явные функции времени. Параметры A , B и коэффициенты функции f легко вычисляются (как указывалось в п.1.1, решением линейной системы уравнений), если определено значение периода воздействия T . Вычислить же T проблематично, поскольку этот параметр нелинейно входит в правую часть уравнений (5). Поэтому величина T либо должна быть известна заранее, либо следует указать процедуру ее определения по экспериментальным данным. Однако следует обратить внимание на допустимую погрешность задания величины T . Остановимся на этом подробнее.

2.2. Ограничение на длину временного ряда. Погрешность задания периода $\Delta T = T - T_0$, где T_0 – неизвестное реальное значение, при очень большой длине

временного ряда неизбежно ведет к «набегу фазы» и плохому описанию воздействия соответствующими слагаемыми в (5). Нормированная среднеквадратичная погрешность аппроксимации функции $A\cos(2\pi t/T_0)$ функцией $A\cos(2\pi t/T)$ дается формулой

$$\varepsilon_T = \left(\frac{(1/T_H) \int_{t_0}^{t_0+T_H} [\cos(2\pi t/T) - \cos(2\pi t/T_0)]^2 dt}{(1/T_H) \int_{t_0}^{t_0+T_H} \cos^2(2\pi t/T) dt} \right)^{1/2}, \quad (6)$$

где T_H – время наблюдения. График этой зависимости приведен на рис. 1. Погрешность мала лишь на ограниченном интервале времени, а затем она возрастает и колеблется около величины $\varepsilon_T \approx 1.4$. Поэтому необходимо наложить ограничение на длину временного ряда в зависимости от величины относительной погрешности $\Delta T/T_0$.

Чтобы оценить, на каком промежутке времени аппроксимация внешнего воздействия достаточно точна, проинтегрируем (6) и разложим в ряд Тейлора по степеням $\Delta T/T_0$ (то есть считаем $\Delta T/T_0 < 1$). Предполагая затем, что $T_H/T_0 \gg 1$, получим искомую оценку

$$\varepsilon_T = 2\pi/3^{1/2} (\Delta T/T_0) (T_H/T_0). \quad (7)$$

Величина ε_T зависит только от отношений $\Delta T/T_0$ и T_H/T_0 , то есть ограничение накладываемое не на количество точек временного ряда, а на количество охватываемых периодов воздействия. Из (7) следует, что если требуется приблизить внешнее воздействие с погрешностью, не превышающей ε_0 , то нужно использовать временной ряд, содержащий не более $T_H/T_0 \approx 0.28\varepsilon_0(T_0/\Delta T)$ периодов воздействия (например, не более 28 периодов, если $\varepsilon_0 = 0.01$, и погрешность задания периода равна 0.0001). Следовательно, слишком длинная временная реализация становится помехой для восстановления по ней модели в виде (5)! Хорошего результата можно достичь, разбив эту реализацию на короткие ряды и усреднив полученные при анализе каждого из этих рядов значения коэффициентов. Соотношение (7) и ограничение на длину временного ряда используются нами во всех примерах, приведенных далее.

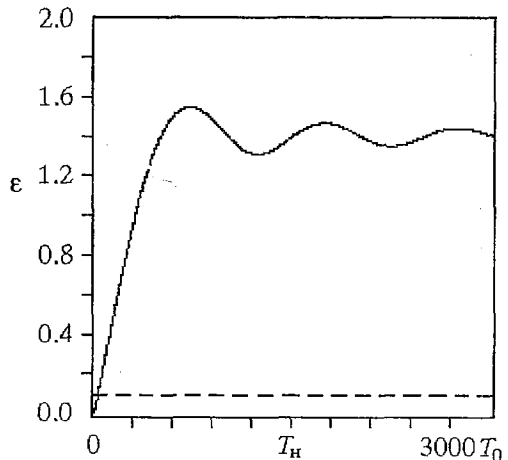


Рис. 1. График зависимости нормированной погрешности аппроксимации косинуса от времени наблюдения при $\Delta T/T_0 = 10^{-3}$ (пунктиром показан уровень $\varepsilon_0 = 0.1$)

2.3. Специальная процедура для реконструкции уравнений осциллятора под действием внешней гармонической силы. Опираясь на представленные результаты, можно предложить последовательность действий для конструирования эмпирической модели неавтономной системы. Каждый этап нашего алгоритма мы будем иллюстрировать на конкретном примере – восстановлении модельных уравнений по хаотическому временному ряду значений координаты y_1 осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= y_2, \\ dy_2/dt &= 0.01(1-y_1^2)y_2 - y_1 - y_1^3 + 120\cos t. \end{aligned} \quad (8)$$

В данном случае $g_0(y_1, y_2) = -0.01(1 - y_1^2)$, $f_0(y_1) = y_1 + y_1^3$, $A_0 = 120$, $T_0 = 2\pi$. Временной ряд был получен интегрированием уравнения (8) методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом 0.01 и содержал 10000 точек.

Алгоритм построения модели состоит из следующих 3 этапов.

1. Получить значение периода внешнего воздействия с достаточно малой относительной погрешностью⁵.

В некоторых случаях хорошую оценку можно получить как среднее расстояние между максимумами временной реализации (см. раздел 3). Для рассматриваемого примера (8) это значение оказалось равным 6.038, что существенно отличается от истинного $T_0 \approx 6.283185$. Будем считать, что нам известно приблизительное значение $T = 6.25$ (погрешность 1%).

2. Выяснить, можно ли описать наблюдаемый процесс уравнением вида (5); более точно определить период воздействия.

Фиксируем достаточно большое значение K и будем менять пробное значение периода T с некоторым шагом в окрестности сделанной оценки величины периода ($T = 6.25$), каждый раз восстанавливая уравнения и получая различные модели.

Для рассматриваемого примера достаточно выбрать $K = 3$. Временной ряд содержит примерно 16 периодов воздействия, поэтому, если мы хотим получить погрешность аппроксимации не больше $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, то, как следует из (7), шаг ΔT не должен превышать примерно 0.0001. Критерием того, что исследуемый объект можно описать уравнением неавтономного осциллятора, является наличие глубокого минимума на графике зависимости погрешности аппроксимации от T . График зависимости $\lg \varepsilon$ от T для иллюстрирующего примера представлен на рис. 2; по нему легко определяется искомое значение периода воздействия: $T \approx 6.2832$ (точка минимума близка к реальному значению $T_0 = 2\pi \approx 6.283185$).

3. Определить оптимальное значение порядка полинома K и вычислить соответствующие значения коэффициентов модели.

Строим модели в виде (5), увеличивая значение K от 0 до 10–20. На графике зависимости $\lg \varepsilon$ от K (рис. 3) видно, что погрешность перестает существенно уменьшаться при $K > 3$ (это значение K является и точкой минимума энтропии модели). Таким образом, оптимальная модель имеет вид (5) с $T = 6.2832$ и $K = 3$.

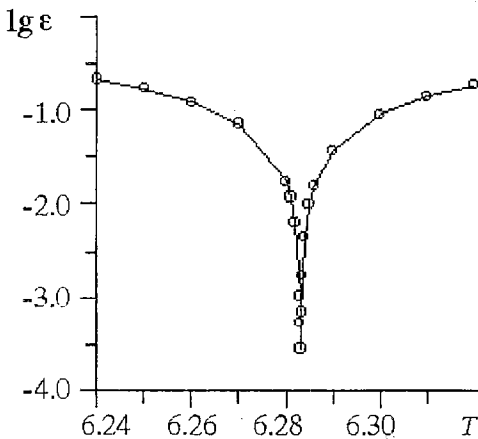


Рис. 2. График зависимости логарифма погрешности аппроксимации ε от пробного значения периода воздействия T при $K = 3$ для осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга (8)

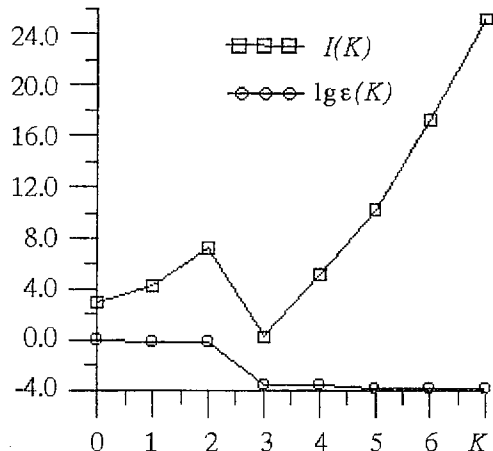


Рис. 3. График зависимости $\lg \varepsilon$ модели (5) и ее энтропии I от порядка полинома K для осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга (8)

⁵ В принципе, этот пункт можно опустить и перебирать все возможные диапазоны значений T .

Коэффициенты вычисляются методом наименьших квадратов, как в универсальной процедуре. Так как уравнение Ван дер Поля – Дуффинга и само имеет вид (5), то можно сравнить коэффициенты в правых частях уравнений исходной системы и полученной модели (табл. 1). Видно, что все коэффициенты вычислены с очень малой погрешностью (0.01%). Таким образом, уравнения восстановлены весьма успешно.

Таблица 1

Коэффициенты уравнений исходных систем и восстановленных уравнений вида (5)

Члены уравнений*	Осциллятор Ван дер Поля – Дуффинга		Осциллятор Дуффинга	
	объект	модель	объект	модель
1	–	–0.003121	–	0.000764
x_1	–1.0	–1.009530	–1.0	–0.998591
x_2	0.01	0.009844	–0.1	–0.099933
x_1^2	–	–0.000142	–	–0.000126
$x_1 x_2$	–	–0.000000	–	–0.000012
x_2^2	–	0.000018	–	–0.000005
x_1^3	–1.0	–0.999076	–1.0	–1.000310
$x_1^2 x_2$	–0.01	–0.009992	–	–0.000015
$x_1 x_2^2$	–	–0.000056	–	–0.000057
x_2^3	–	0.000000	–	–0.000001
$\cos t$	120.0	119.9712	35.0	34.99586

* Для удобства в левом столбце таблиц 1–4 для переменных, входящих в уравнения как объектов, так и моделей, используется обозначение x_i

2.4. Реконструкция уравнений строго диссипативного осциллятора. В ряде случаев модельные уравнения можно привести к более компактному виду. Например, если некоторые коэффициенты в модели (5) очень малы, то можно исключить из функции f соответствующие слагаемые (2) и построить новую модель с меньшим количеством коэффициентов. Для иллюстрации упростим объект (8), убрав нелинейность из силы трения. Получившаяся система строго диссипативна, то есть в ней не могут развиваться автоколебания (осциллятор Дуффинга «с жесткой пружиной»):

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= y_2, \\ dy_2/dt &= -0.1y_2 - y_1 - y_1^3 + 35\cos t. \end{aligned} \quad (9)$$

В данном случае $g_0(y_1, y_2) = 0.1$, $f_0(y_1) = y_1 + y_1^3$, $A_0 = 35$, $T_0 = 2\pi$. Временной ряд был получен интегрированием уравнения (9) методом Рунге – Кутты 4-го порядка с шагом 0.01 и содержал 10000 точек (примерно 16 периодов воздействия).

Следуя описанной специальной процедуре, с тем же начальным значением T , что и в п. 2.3, получаем, что оптимальная модель будет иметь вид (5) с $T=6.2832$ и

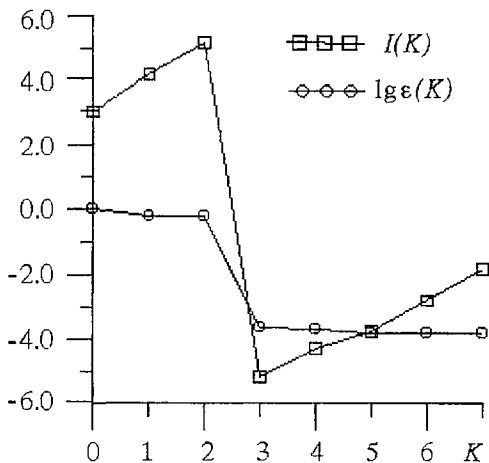


Рис. 4. График зависимости I и энтропии I модели (10) от K для осциллятора Дуффинга (9)

$K = 3$ (рис. 4) с коэффициентами, приведенными в табл. 1 (последние два столбца). Все коэффициенты определены с погрешностью, не превышающей 0.1%. Однако многие коэффициенты практически равны нулю, значительны лишь амплитуда воздействия и коэффициенты при x_2 и различных степенях x_1 . Поэтому есть возможность, выбросив малые коэффициенты, повторить поиск модели в более компактной форме строго диссипативного осциллятора

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2, \\ dx_2/dt &= -\gamma x_2 - f(x_1) + A \cos(2\pi t/T) + B \sin(2\pi t/T), \end{aligned} \quad (10)$$

где $f(x_1)$ – полином степени K . Это позволяет при том же количестве коэффициентов использовать полином более высокого порядка и увеличить предсказательную способность модели. В табл. 2 приведены восстановленные значения коэффициентов. В целом они ближе к своим истинным значениям (по сравнению с табл. 1). Относительная погрешность не превышает 0.01% (уменьшилась в 10 раз).

Таблица 2

Коэффициенты уравнений Дуффинга (9) и восстановленных уравнений вида (10)

Члены уравнений	Объект (9)	Оптимальная модель (10)	Модель (10) без учета (7)
1	–	0.00160	0.03421
x_1	–1.0	–0.99979	8.37783
x_2	–0.1	–0.10001	0.05849
x_1^2	–	0.00003	0.01302
x_1^3	–1.0	–1.00048	–1.18254
$\cos t$	35.0	34.99646	7.07569

3. Примеры

Протестируем предложенную процедуру на примерах реконструкции уравнений по временным реализациям, генерируемым реальными и эталонными математическими объектами. В качестве таковых были выбраны уравнения нелинейных осцилляторов [14] и радиотехническая RLC -цепь с кусочно-линейной емкостью (схема с переключаемыми конденсаторами [15]). Этот выбор

продиктован принадлежностью объектов к рассматриваемому классу, а также их разнообразием и достаточной сложностью.

3.1. Нелинейные осцилляторы. В качестве тестовых математических объектов были выбраны осциллятор Тода (11), модифицированный осциллятор Тода (12), осциллятор Морзе (13) и мягкий симметричный осциллятор (14) (первое уравнение для всех примеров одинаково и записано лишь один раз – верхняя строка)

$$dy_1/dt = y_2,$$

$$dy_2/dt = -0.01y_2 - [1 - \exp(-y_1)] + 1.0\cos t, \quad (11)$$

$$dy_2/dt = -0.001y_2 - [1 + y_1 - \exp(-y_1)] + 5.0\cos t, \quad (12)$$

$$dy_2/dt = -0.5y_2 - [\exp(-y_1) - \exp(-2y_1)] + 1.0\cos t, \quad (13)$$

$$dy_2/dt = -0.001y_2 - y_1/(1+y_1^2)^{1/3} + 0.5\cos t. \quad (14)$$

Первое слагаемое в правой части каждого из уравнений (11) – (14) в механических системах описывает затухание (вязкое трение), коэффициент затухания γ (см. уравнение (10)) равен соответственно 0.01, 0.001, 0.5 и 0.001. Слагаемые, объединенные квадратными скобками, соответствуют функции $f_0(y_1)$ (производная потенциала); последнее слагаемое – внешнее воздействие с периодом $T_0 = 2\pi$ и амплитудой A_0 , равной соответственно 1.0, 5.0, 1.0 и 0.5.

Рассматриваемые осцилляторы имеют различный вид потенциальных функций (симметричный и несимметричный), демонстрируют различные типы зависимости периода собственных колебаний от полной энергии («жесткая» и «мягкая» пружина) и описывают множество реальных систем и процессов [14]. Исходные временные ряды представляли собой временные реализации координаты x_1 (для переходных процессов к периодическим режимам) длиной около 16 периодов воздействия, полученные интегрированием указанных уравнений методом Рунге–Кутты 4–го порядка с шагом 0.01 (содержали 10^4 точек). Далее к ним применялась изложенная в п.2.3 процедура; результаты представлены на рис. 5. Во всех случаях, кроме (12), начальное приближение для периода воздействия (этап 1 процедуры) удавалось получить с погрешностью 0.1–1% через оценку среднего расстояния между максимумами временной реализации. Во всех случаях график $\lg e(T)$ для модели в виде (5) имеет глубокий минимум при $T \approx 6.2832 \approx 2\pi$ (и тот же качественный вид, что и на рис. 2), а значения $\lg e(T)$ для моделей (5) и (10) одинакового порядка отличаются слабо, поэтому уравнения восстанавливались в виде (10). В первой колонке на рис. 5 приведены графики зависимости $\lg e$ и I от K для таких моделей, оптимальные значения параметра K определяются визуально по графику $\lg e(K)$ и равны соответственно 10, 11, 10 и 17. Отметим, что в первых трех случаях при указанных значениях K имеется и минимум энтропии модели I , то есть эта величина помогает определить хорошую модель; но критерий минимума энтропии не работает в последнем случае, где минимум $I(K)$ приходится на $K = 0$, как и в случае экспериментальной системы (см. раздел 4).

При увеличении K от нуля до 10–20 коэффициенты модели сходятся с различной скоростью к своим оптимальным значениям. Табл. 3 позволяет сравнить соответствующие значения коэффициентов исходных систем и восстановленных при оптимальных значениях K моделей ($T = 6.2832$): коэффициент затухания γ (коэффициент при x_2) и амплитуду воздействия (при $\cos t$) – непосредственно, а коэффициенты функции $f(x_1)$ сравниваются с коэффициентами разложения функции $f_0(x_1)$ в ряд Тейлора. Все значимые для аппроксимации коэффициенты (первые десять строк) восстановлены с высокой точностью. Во второй колонке рис. 5 представлены графики функций $f_0(x_1)$ и $f(x_1)$. В той области,

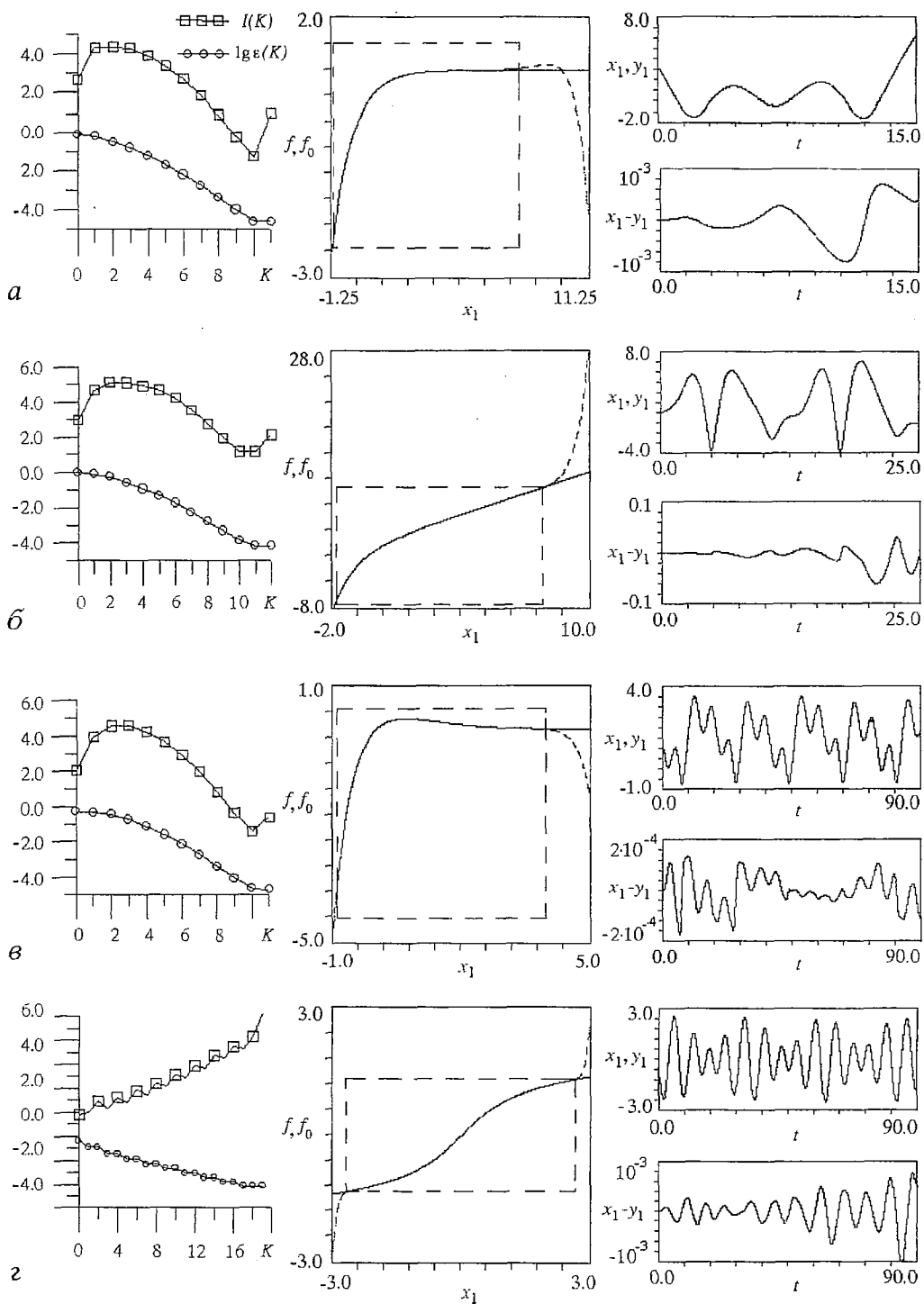


Рис. 5. Результаты моделирования по временным реализациям неавтономных осцилляторов: *a* – осциллятор Тода (11), *б* – модифицированный осциллятор Тода (12), *в* – осциллятор Морзе (13), *z* – мягкий симметричный осциллятор (14). Первая колонка: графики зависимости $I(K)$ и $\lg \epsilon(K)$ для моделей (10); вторая колонка: графики исходных возвращающих сил $f_0(x_1)$ – сплошные линии, и восстановленных $f(x_1)$ – штриховые; третья колонка: временные реализации объектов и моделей (практически совпадают) и разностные временные реализации объектов и моделей при одинаковых начальных условиях

Таблица 3

Коэффициенты исходных уравнений (11)–(14)* и
восстановленных уравнений вида (10)

Члены уравнения	Осциллятор Тода (11)		Модифицированный осциллятор Тода (12)		Осциллятор Морзе (13)		Мягкий симметричный осцил. (14)	
	Объект	Модель (K = 10)	Объект	Модель (K = 11)	Объект	Модель (K = 10)	Объект	Модель (K = 17)
x_2	-0.01	-0.01000	-0.001	-0.00100	-0.5	-0.49999	-0.001	-0.00100
$\cos t$	1.0	0.99998	5.0	4.99978	1.0	0.99998	0.5	0.49999
1	0.0	0.00006	0.0	0.00059	0.0	0.00004	0.0	$1.3 \cdot 10^{-6}$
x_1	-1.0	-1.00005	-2.0	-1.99981	-1.0	-1.00006	-1.0	-0.99882
x_1^2	0.5	0.49980	0.5	0.49865	1.5	1.49957	0.0	-0.00006
x_1^3	-0.16667	-0.16653	-0.16667	-0.16658	-1.16667	-1.16616	0.333330	0.32012
x_1^4	0.04167	0.04179	0.04167	0.04225	0.625	0.62626	0.0	0.00027
x_1^5	-0.00833	-0.00844	-0.00833	-0.00847	-0.25833	-0.26034	-0.22222	-0.17335
x_1^6	0.00139	0.00139	0.00139	0.00133	0.0875	0.08726	0.0	-0.00045
x_1^7	-0.00020	-0.00018	-0.00020	-0.00018	-0.02520	-0.02295	0.17284	0.07953
x_1^8	$2.48 \cdot 10^{-5}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$2.48 \cdot 10^{-5}$	$2.61 \cdot 10^{-5}$	0.00632	0.00433	0.0	0.00034
x_1^9	$-2.76 \cdot 10^{-6}$	$-8.66 \cdot 10^{-7}$	$-2.76 \cdot 10^{-6}$	$-3.59 \cdot 10^{-6}$	-0.00141	-0.00050	-0.14403	0.02598
x_1^{10}	$2.76 \cdot 10^{-7}$	$2.09 \cdot 10^{-8}$	$2.76 \cdot 10^{-7}$	$3.12 \cdot 10^{-7}$	0.00028	0.00003	0.0	-0.00013

Для уравнений (11)–(14) приведены коэффициенты разложения возвращающей силы в ряд Тейлора по степеням x_1 .

где происходит наблюдаемое движение (выделена пунктиром), имеет место очень хорошее совпадение. Прогностические возможности моделей проиллюстрированы в третьей колонке рис. 5, где показаны временные реализации объектов и моделей (в таком масштабе они практически совпадают) и (ниже) разностные сигналы объектов и моделей при одинаковых начальных условиях (на промежутке времени 5–10 периодов воздействия прогноз весьма точен).

3.2. Реконструкция уравнений осцилляторов при наличии шума.

Проверим работоспособность представленной процедуры при наличии шума на примере реконструкции уравнений по временной реализации осциллятора Тода из п.3.1 с добавленным к ней аддитивным шумом измерений. Исследуемый временной ряд – это значения величины $\{w_i\}$, где $w_i = v_i + \xi_i$, v_i – результаты численного интегрирования уравнения (11), ξ_i – независимые случайные величины, распределенные (одинаково) по нормальному закону с нулевым средним. Рассматривались

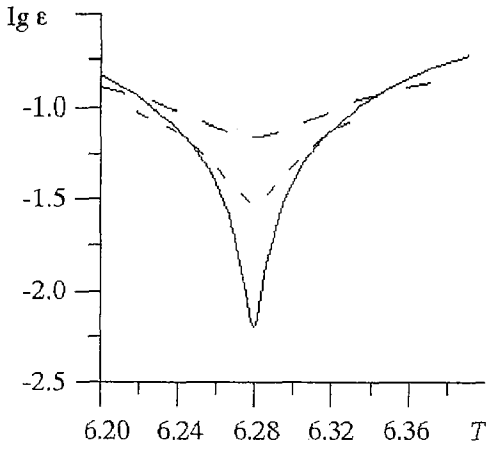
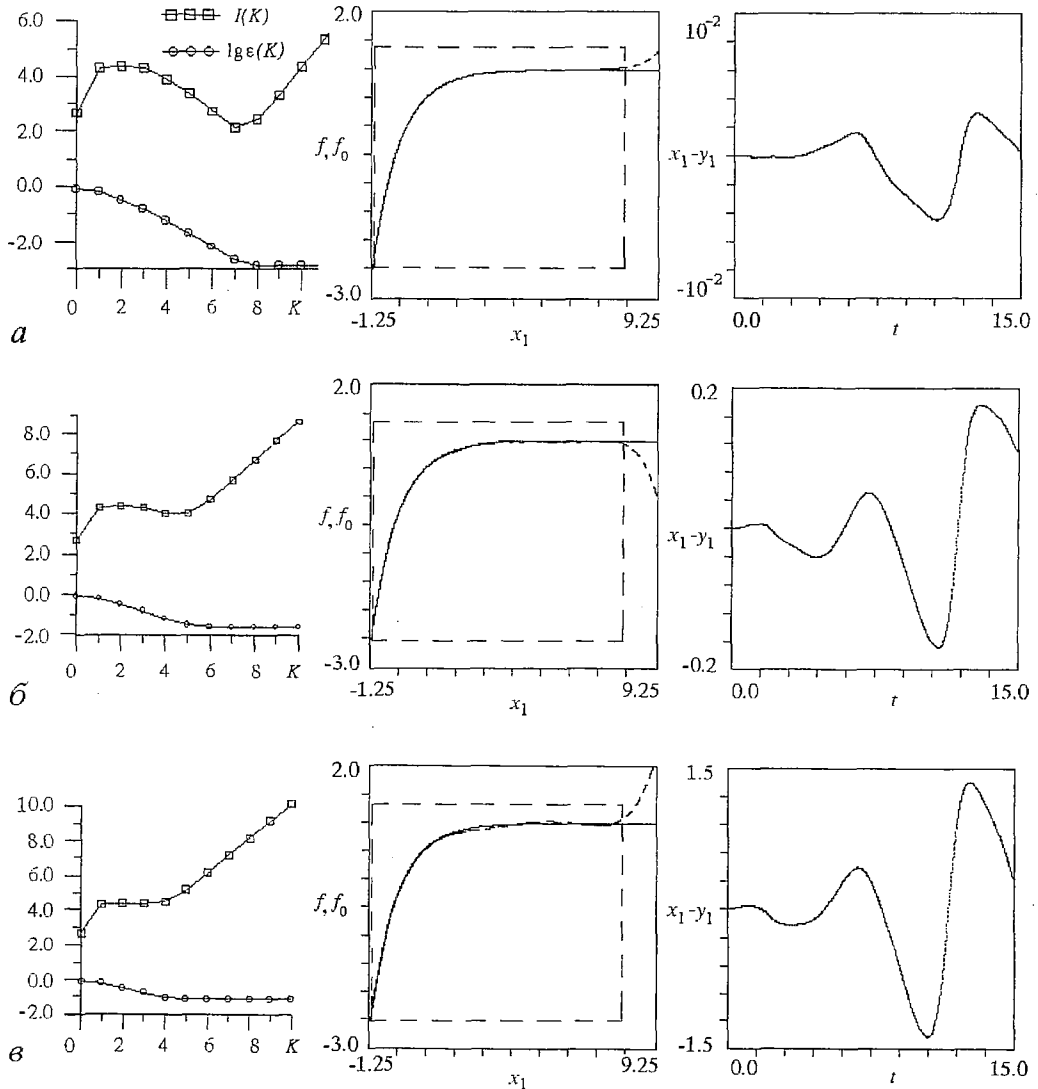


Рис. 6. График зависимости логарифма погрешности аппроксимации от T (пробного значения периода воздействия) при различных уровнях шума (сверху вниз – 10^{-6} , 10^{-10} и 10^{-14}) при $K = 5$ для осциллятора Тода

Рис. 7. Результаты моделирования по временной реализации неавтономного осциллятора Тода при различных уровнях измерительного шума. Отношение мощности шума к мощности сигнала равно 10^{-14} (а), 10^{-10} (б), 10^{-6} (в). Первая колонка: графики зависимости $I(K)$ и $\lg \varepsilon(K)$ для моделей (10). Вторая: графики исходных возвращающих сил $f_0(x_1)$ – сплошные линии, и восстановленных $f(x_1)$ – штриховые. Пунктиром показана область, в которой они практически совпадают. Третья колонка: разностные временные реализации объектов и моделей при одинаковых начальных условиях



различные уровни шума: отношение $\langle \xi^2 \rangle / \langle v^2 \rangle$ составляло 10^{-14} , 10^{-10} и 10^{-6} .

Основная трудность здесь состоит в том, чтобы достаточно точно вычислить значения первой и (особенно) второй производных. Мы использовали подход, изложенный в [6], включающий специфическую процедуру выделения главных компонентов и отбрасывания мелкомасштабных изменений (сглаживание). Для вычисления двух производных наблюдаемой временной реализации в данный момент времени используется достаточно много соседних точек скалярного временного ряда (по сути, используется специфическая процедура фильтрации). Для указанных уровней шума удовлетворительно вычислить значения производных удалось с использованием соответственно 7, 13 и 55 соседних точек, тогда как при отсутствии шума достаточно было 3-х точек.

Наличие шума приводит к следующим эффектам. Во-первых, минимум на графике зависимости $\lg \epsilon(T)$ (этап 2 процедуры) при том же масштабе по T оказывается тем более пологим, чем выше уровень шума (рис. 6). Теперь величина погрешности ϵ ограничена снизу достаточно большой величиной ϵ_0 , определяемой уровнем шума (равна 0.001, 0.02 и 0.05, соответственно). Из (7) при $T_H/T_0 > 16$ следует, что значение периода при наличии шума невозможно определить с погрешностью, меньшей $0.22\epsilon_0$. Во-вторых, оптимальное значение порядка полинома K уменьшается при увеличении уровня шума. Оно равно соответственно 8, 6 и 5 (рис. 7, первая колонка). Это понятно – шум мешает точной аппроксимации, поэтому использование полинома высокого порядка не дает эффекта. В связи с этим при большом уровне шума оказывается неработоспособным критерий минимума энтропии модели (рис. 7, в, первая колонка). Увеличение интенсивности шума приводит к тому, что значения коэффициентов восстанавливаются с большей погрешностью (табл. 4).

Графики исходных и восстановленных при оптимальном значении K возвращающих сил для различных уровней шума приведены на рис. 7 во второй колонке. В третьей колонке представлены временные реализации разности

Таблица 4

Коэффициенты уравнения осциллятора Тода (11) и восстановленных модельных уравнений (10)

Члены ур-ний	Объект (11)	Модель (10) при различных уровнях шума		
		10^{-14}	10^{-10}	10^{-6}
x_2	-0.01	-0.00999	-0.00943	-0.00864
$\cos t$	1.0	0.99992	1.00429	0.98691
1	0.0	0.00031	-0.01168	0.00057
x_1	-1.0	-0.99790	-1.00070	-1.06503
x_1^2	0.5	0.49915	0.53057	0.55203
x_1^3	-0.16667	-0.16917	-0.17735	-0.14639
x_1^4	0.04167	0.04300	0.03479	0.01835
x_1^5	-0.00833	-0.00801	-0.00353	-0.00086
x_1^6	0.00139	0.00098	0.00014	-
x_1^7	-0.00020	-0.00007	-	-
x_1^8	$2.48 \cdot 10^{-5}$	$0.21 \cdot 10^{-5}$	-	-

координат y_1 (объекта) и x_1 (модели), сама реализация y_1 приведена на рис. 5, а (третья колонка). При увеличении уровня шума уменьшается точность количественного прогноза и соответственно время предсказуемости. Но даже для уровня шума 10^{-6} модель дает достаточно точный прогноз (погрешность не выше 5%) на время около 11 периодов воздействия (900 отсчетов), что является очень хорошим результатом. Кроме того, модели демонстрируют качественно схожее с исходным объектом поведение.

4. Реконструкция динамической модели реальной неавтономной системы

Схема реального объекта – RLC -контур с переключаемыми конденсаторами, находящегося под гармоническим внешним воздействием амплитуды U_0 и частоты ω_0 , представлена на рис. 8. Здесь K – электронный ключ: микросхема, содержащая десятки транзисторов и других пассивных элементов, которая питается от специального источника постоянного напряжения. При малых значениях напряжения U на емкости C_1 происходят линейные колебания в контуре RLC_1 (сопротивление ключа очень велико), когда напряжение U достигает порогового значения $U_{пор}$, сопротивление ключа резко падает, он замыкает цепь и подключает емкость C_2 . Обратное переключение происходит при понижении U относительно $U_{пор}$, так как ключ обладает гистерезисом. Существенно также наличие определенного уровня шума.

Модель этой системы, полученная на основе законов Кирхгофа, имеет вид (4) с кусочно-линейной возвращающей силой. В безразмерных переменных $t' = t/(LC_1)^{1/2}$ – безразмерное время, $x_1' = q/C_2 U_{пор}$ – безразмерный суммарный заряд на емкостях C_1 и C_2 , это модельное уравнение (при $U_{пор} < 0$) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} dx_1'/dt' &= x_2', \\ dx_2'/dt' &= -\gamma x_2' - f_0'(x_1') + A_0 \cos(\omega' t'), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\gamma = R(C_1/L)^{1/2}$, $A_0 = C_1 U_0 / (C_2 |U_{пор}|)$, $\omega' = \omega_0 (LC_1)^{1/2}$,

$$f_0(x_1') = \begin{cases} x_1' - 1, & x_1' > -(1 + C_1/C_2), \\ C_1 x_1' / (C_1 + C_2), & x_1' < -(1 + C_1/C_2). \end{cases}$$

Измеренные временные ряды содержали значения величины, пропорциональной силе тока через резистор R , измеренные с интервалом $\tau = 4$ мкс с относительной погрешностью $\sim 2^{-12}$ при значениях параметров $C_1 = 0.1$ мкФ, $C_2 = 4.4$ мкФ, $L = 0.02$ Гн, $R = 10$ Ом, $U_{пор} = -0.2$ В, $T_0 \approx 84.02\tau$ (то есть $\gamma \approx 0.02$, $\omega' \approx 1.02$, $C_1/(C_1 + C_2) \approx 1/45$) и при различных значениях амплитуды воздействия. Дополнительный интерес, который вызывает этот пример (по сравнению с

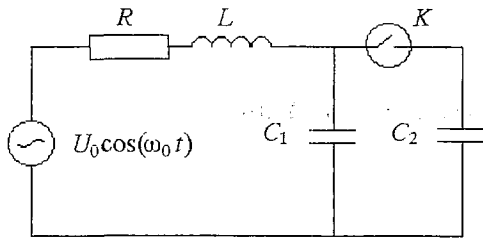


Рис. 8. Экспериментальная система – контур с переключаемыми конденсаторами

численными), обусловлен тем, что, во-первых, зависимость возвращающей силы от x_1' не является столь гладкой, во-вторых, даже уравнение (15) является лишь приближенной моделью системы (поскольку оно не учитывает, например, слабой нелинейности индуктивности, гистерезиса, связанного с переключением ключа K , наличия шума и т.д.), в-третьих, значения переменной измерены с указанной достаточно высокой погрешностью.

На рис. 9 представлены результаты моделирования по временной реализации хаотического режима ($U_0 = 2.344$ В). Временная реализация предварительно была подвергнута численному интегрированию (так как в роли координаты x_1 выступает заряд на емкостях, а измеренная сила тока – это его производная); таким образом, используемый для построения модели временной ряд содержал значения величины, пропорциональной заряду.

Графики представлены в соответствии с этапами применяемой процедуры: начальное приближение для T удается получить как среднее расстояние между максимумами временной реализации ($T \approx 84.21\tau$); график зависимости $\lg \epsilon(T)$ для модели (5) 5-го порядка имеет глубокий минимум при $T = 84.02\tau$ (рис. 9, а); значения $\lg \epsilon$ для моделей 5-го порядка в виде (5) и (10) равны соответственно -1.27 и -1.25 , поэтому модель строится в виде строго диссипативного осциллятора

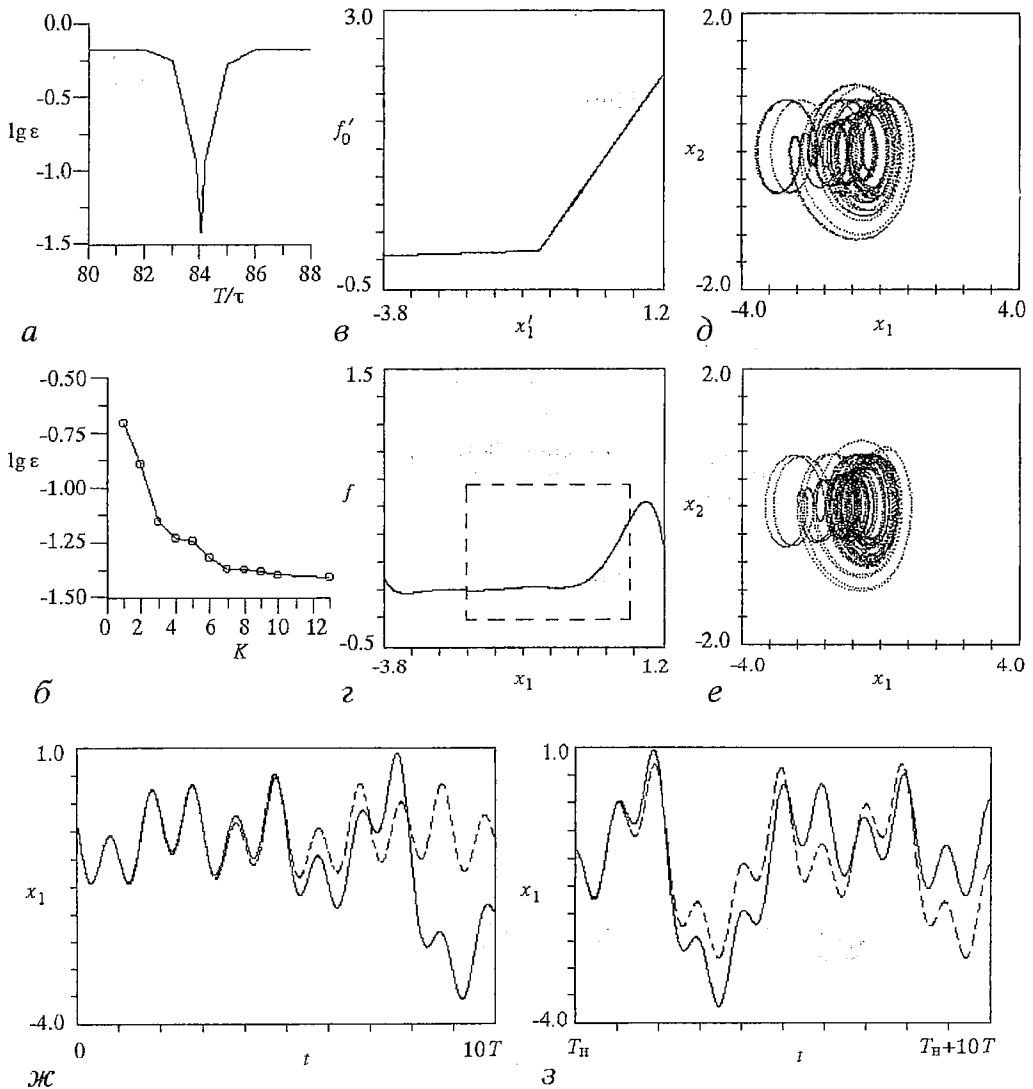


Рис. 9. Результаты моделирования по экспериментальному временному ряду: а, б – графики зависимости $\lg \epsilon$ от T и от K , соответственно; в, г – возвращающие силы модели (15) и восстановленной оптимальной модели (10); д, е – фазовые портреты исходной системы и модели (10); ж, з – временные реализации объекта (сплошная линия) и модели (штриховая линия) при одинаковых начальных условиях на примерах временного ряда, по которому производилось конструирование уравнений (ж), и его продолжения – «чистый прогноз» (з)

– на рис. 9, б представлен график зависимости $\lg \varepsilon$ от K , визуально определенное оптимальное значение $K = 7$. Рис. 9, в, г позволяют сравнить возвращающие силы в уравнении (15) и в восстановленной модели (10) 7-го порядка. Графики качественно схожи⁶, кроме того, наклоны линейных участков графика восстановленной функции равны соответственно 0.014 и 0.604, их отношение составляет примерно $1/45$.

Коэффициент затухания в восстановленных уравнениях равен примерно 0.09, это в 4.5 раза больше, чем коэффициент затухания в модели (15). Это может быть связано с уменьшением добротности при переключении емкости, что не заложено в (15). Кроме того, реальные потери в контуре определяются не только сопротивлением R , но и ключом. Фазовые портреты исходной системы и модели качественно совпадают (рис. 9, д, е).

Прогностические возможности модели иллюстрирует рис. 9, ж, з, где показаны временные реализации объекта и модели при одинаковых начальных условиях. На рис. 9, ж использован временной ряд, по которому производилась подгонка уравнений. Для удобства восприятия показан не весь ряд, а только его участок длиной в 10 периодов воздействия. На рис. 9, з использовано продолжение этого временного ряда – с момента времени T_H (более $100T$) до T_H+10T (это «чистый прогноз»). Время предсказания мы оценивали как среднее время, за которое временные реализации объекта и модели из одинаковых начальных условий расходятся более, чем на 5% размаха колебаний. Оно составляет примерно $5.1T$ (430 отсчетов) в первом случае – рис. 9, ж, и $2.5T$ (210 отсчетов) во втором – рис. 9, з.

Отметим, что при восстановлении модели по временной реализации, полученной при измененном в некоторое количество раз значении амплитуды воздействия U_0 , аналог амплитуды воздействия в модели меняется в то же количество раз, а остальные параметры остаются практически неизменными; это убедительно показывает, что модель имеет параметры, соответствующие параметрам исходной системы, и дает возможность численного исследования устройства пространства параметров моделируемой системы.

Заключение

В статье предложена процедура, которая по скалярному временному ряду значений наблюдаемой величины, характеризующей поведение автоколебательной или строго диссипативной системы, позволяет:

- проверить, может ли объект быть описан уравнением нелинейного осциллятора, находящегося под действием внешней гармонической силы;
- с фиксированной относительной погрешностью определить период воздействия;
- получить модельные уравнения.

Показано, что необходимо ввести ограничение на длину временного ряда. Конструирование модели целесообразно вести по его относительно коротким участкам, в то время как для оценки периода воздействия может пригодиться вся временная реализация. Для иллюстрации важности этого ограничения в последнем столбце табл. 2 приведены результаты моделирования без его учета. Модель строилась по очень длинной реализации осциллятора Дуффинга, содержащей приблизительно 80 периодов воздействия, при пробном $T = 6.25$ (погрешность в

⁶ Масштабы по оси ординат различаются, так как обрабатываемый временной ряд содержит величины, пропорциональные, а не в точности равные безразмерному заряду x_1' ; кроме того, графики несколько сдвинуты друг относительно друга, так как элементы временного ряда определены с точностью до аддитивной постоянной при интегрировании. Однако указанные количественные различия несущественны, так как моделируется именно измеренный ряд x_1 , а не истинные значения заряда x_1' .

значении периода ~ 0.01). Предсказываемая в (7) погрешность аппроксимации косинуса в этом случае примерно равна 0.2, то есть достаточно велика. Как видно из таблицы, вычисленные значения коэффициентов далеки от истинных – результат свидетельствует о том, что такой прямолинейный учет внешнего воздействия бесполезен.

Представлены соображения, позволяющие в ряде случаев свести модельные уравнения к более компактному виду (строго диссипативного осциллятора). Главными критериями качества модели выступают качественное соответствие поведения объекта и модели и наличие физического смысла ее параметров. Применение алгоритма на нескольких численных примерах и реальной радиотехнической схеме показывает его эффективность: параметры восстановленных моделей имеют прямые аналоги в эксперименте (численном и натурном), а модели демонстрируют качественно схожее с исходным объектом поведение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 96–02–16755.

Приложение

Пусть имеется динамическая систем

$$dy/dt = F_0(y), \quad (\text{П.1})$$

где $y(t) \in \mathbf{R}^d$ – ее вектор состояния, и задана функция вектора состояния $v = v(y(t))$ – наблюдаемая. Пусть фазовая траектория $y(t)$ принадлежит некоторому аттрактору, и пусть размерность компактного многообразия \mathbf{M} , содержащего аттрактор, равна d_M . Рассмотрим векторы $x(t) \in \mathbf{R}^D$:

$$x_i = \left\{ \begin{array}{l} v(t_i) \\ dv(t_i)/dt \\ \dots \\ d^{D-1}v(t_i)/dt^{D-1} \end{array} \right\}. \quad (\text{П.2})$$

Формула (П.2) определяет функцию $\phi_0: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{R}^D$, однозначно отображающую многообразие \mathbf{M} на некоторое многообразие пространства \mathbf{R}^D ($x = \phi_0(y)$). Теорема Такенса [13] утверждает, что если функции $v(y)$ и $F_0(y)$ достаточно гладкие ($2d_M+1$ раз непрерывно дифференцируемые) и $D=2d_M+1$, то отображение ϕ_0 является, в общем случае, непрерывно дифференцируемым и взаимно однозначным (то есть существует гладкая обратная функция ϕ_0^{-1}).

Следовательно, уравнение (П.1) для движения на \mathbf{M} можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2, \\ dx_2/dt &= x_3, \\ &\dots \\ dx_D/dt &= f_0(x_1, x_2, \dots, x_D), \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

где функция $f_0(x)$ выражается через $F_0(y)$, $\phi_0^{-1}(x)$ и ее первую производную.

Библиографический список

1. Crutchfield J.P., McNamara B.S. Equations of motion from a data series // Complex Systems. 1987. Vol. 1. P. 417.

2. *Cremers J., Hubler A.* Construction of differential equations from experimental data // *Z.Naturforschung A.* 1987. Vol.42. P.797.
3. *Breeden J.L., Hubler A.* Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol.42, № 10. P.5817.
4. *Gouesbet G., Maquet J.* Construction of phenomenological models from numerical scalar time series // *Physica D.* 1992 Vol.5 8. P.202.
5. *Gouesbet G., Letellier C.* Global vector-field approximation by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets // *Phys.Rev. E.* 1994. Vol.49. P. 4955.
6. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г.* Восстановление структуры динамической системы по временным рядам // *Радиотехника и электроника.* 1994. Т. 39, В.2. С. 269.
7. *Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Применение статистических методов при решении задачи глобальной реконструкции // *Письма в ЖТФ.* 1997. Т. 23. № 8. С. 7.
8. *Kadtke J.* Classification of highly noisy signals using global dynamical models // *Phys.Lett. A.* 1995. Vol. 203. P. 196.
9. *Kadtke J., Kremliovsky M.* Estimating statistics for detecting determinism using global dynamical models // *Phys.Lett. A.* 1997. Vol. 229. P. 97.
10. *Anishchenko V.S., Pavlov A.N.* Global reconstruction in application to multi-channel communication // *Phys.Rev. E.* 1998. Vol.57, № 2. P. 2455.
11. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev.Lett.* 1987. Vol.59. P. 845.
12. *Casdagli M.* Nonlinear prediction of chaotic time series // *Physica D.* 1989. Vol. 35. P. 335.
13. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics / Eds. D.Rang and L.S.Young.* Warwick, 1980. Vol. 898 (Springer, Berlin). P. 366.
14. *Scheffczyk G., Parlitz U., Kurz T., Knop W., Lauterborn W.* Comparison of bifurcation structures of driven dissipative nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol.43, № 12. P.6495.
15. *Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Сложная динамика возбуждаемого осциллятора с кусочно-линейной характеристикой // *Письма в ЖТФ.* 1994. Т. 20, №. 19. С. 75.

Саратовский государственный
университет
Высший колледж прикладных наук
Саратовский филиал ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 14.01.99
после переработки 19.02.99

RECONSTRUCTING EQUATIONS OF A NONAUTONOMOUS NONLINEAR OSCILLATOR FROM A TIME SERIES: MODELS, EXPERIMENT

B.P. Bezruchko, Ye.P. Seleznev, D.A. Smirnov

We present a procedure for constructing model differential equations of an oscillatory harmonically driven system from a scalars time series. The procedure uses a global reconstruction technique, and a priori information about the character of influence is taken into account. The procedure is tested using several well-known systems – nonlinear oscillators with different kinds of friction forces and potential functions. We demonstrate its effectiveness by applying it to several examples, including the dynamical systems with added noise and the real radioengineering system – nonlinear *RLC*-circuit with switched capacitors.



Безруко Борис Петрович – родился в 1946 году, окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1969). Профессор кафедры электроники и волновых процессов СГУ; ведущий научный сотрудник (по совместительству) Саратовского филиала института радиотехники и электроники РАН; доктор физико–математических наук. Область научных интересов – экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических и электронных системах, математическое моделирование по экспериментальной наблюдаемой. Имеет около 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



Селезнев Евгений Петрович – родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (1990). Старший научный сотрудник Саратовского филиала института радиотехники и электроники РАН. Автор и соавтор 40 научных работ. Область научных интересов – экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических системах.



Смирнов Дмитрий Алексеевич – родился в Ершове Саратовской области (1977). Студент 5–го курса Высшего колледжа прикладных наук СГУ, специализация – физика нелинейных динамических систем. Соросовский студент (1996 – 1999). Автор и соавтор 10 научных публикаций. Область научных интересов: конструирование динамических моделей по временным рядам.