



## ФАЗОВАЯ синхронизация, бистабильность и хаос в системе связанных генераторов Ван дер Поля – Дуффинга

*А. К. Козлов, М. М. Суцук, Я. И. Мольков, А. С. Кузнецов*

На основе анализа численных решений для системы двух генераторов Ван дер Поля – Дуффинга с нелинейной связью установлено наличие хаотических переключений (происходящих через нерегулярные интервалы времени) между двумя автоколебательными режимами, отличающимися друг от друга почти постоянными во времени значениями разности фаз колебаний взаимодействующих подсистем. Выполненный анализ включает в себя исследование бифуркаций периодических движений, соответствующих режимам синхронизации двух подсистем, построение границ областей устойчивости режимов синхронизации и установление сценариев перехода к хаосу.

### Введение

Для описания качественных изменений поведения даже сравнительно сложных систем вблизи критических значений управляющих параметров во многих случаях используются модели малой размерности. Это выглядит вполне естественно с учетом теоремы о центральном многообразии и представлений о типичности, лежащих в основе синергетического подхода к моделированию коллективных эффектов в больших системах [1,2]. Существенно, что не только простые, но и сложно устроенные режимы в больших системах и переходы между ними зачастую могут адекватно описываться маломерными моделями. Поэтому детали их динамики привлекают сейчас внимание не только теоретиков, традиционно рассматривающих маломерные модели как испытательный полигон для строгих математических методов, но также исследователей, заинтересованных в решении прикладных задач. Именно прикладные аспекты играют существенную роль в выборе направлений исследований в тех случаях, когда даже маломерные модели оказываются слишком сложными для исчерпывающего анализа. В частности, они в значительной степени стимулировали исследования режимов, для которых определяющей переменной (параметром порядка) является разность фаз между взаимодействующими подсистемами. В последнее время особый интерес к таким исследованиям связан с изучением динамических механизмов координации ритмических движений и процессов в живых организмах, в частности, проявляющихся в психофизиологических опытах с человеком [3–8]. Так, более десяти лет назад была предложена и впоследствии развита модель Хакена – Келсо – Бунца, представляющая собой два автогенератора с нелинейным взаимодей-

ствием между ними, которое имитирует комбинированное влияние возбуждающей и тормозной синаптических связей в нейронных ансамблях. Использование комбинированной связи позволило осуществить динамическое моделирование особенностей координации движения пальцев руки человека относительно периодического внешнего стимула [9], взаимной координации движения разных конечностей (в частности, руки и ноги) [10], координации различных групп мышц одной и той же ноги при инициировании локомоторных движений человека нерезонансным вибрационным воздействием на мышцы [11,12]. Наиболее эффективным, с точки зрения разнообразия порождаемых динамических режимов, влияние такой связи оказывается в случае взаимодействия генераторов с сильной собственной нелинейностью и зависимостью частоты колебаний от амплитуды [11]. Именно эти факторы обеспечивают наличие широкой области значений параметров связи, в которой наблюдаются хаотические (то есть через нерегулярные промежутки времени) переходы между двумя достаточно протяженными во времени режимами с почти постоянными разностями фаз колебаний взаимодействующих автогенераторов. Как было недавно установлено [11], они качественно совпадают с наблюдаемыми произвольными переходами между шагательными движениями «вперед» и «назад» в экспериментах по инициированию локомоторных движений человека вибрационным воздействием на мышцы [12]. Исследованию режима таких переходов, именуемых в дальнейшем «переключениями», и приводящих к ним бифуркаций уделяется основное внимание в настоящей работе. Изучение роли комбинированной связи представляет интерес также и для многих других приложений, в частности, для моделирования феноменов динамического кодирования, запоминания и распознавания информации [13,14].

### Основные уравнения

Рассматриваемая здесь динамическая система состоит из двух идентичных генераторов Ван дер Поля – Дуффинга, связанных между собой нелинейной связью,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + F(x_1, x_2), \\ \dot{y}_1 &= \lambda(1-x_1^2)y_1 - \varepsilon x_1^3 - x_1, \\ \dot{x}_2 &= y_2 + F(x_2, x_1), \\ \dot{y}_2 &= \lambda(1-x_2^2)y_2 - \varepsilon x_2^3 - x_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Функция связи  $F(x_1, x_2)$ , как и в модели, представленной в [11], аппроксимирована кубической зависимостью

$$F(x_1, x_2) = \gamma(x_1 - x_2)[\alpha - (x_1 - x_2)^2] \quad (2)$$

и приближенно учитывает общие тенденции влияния синаптических связей, которые наиболее четко проявляются в следующих предельных случаях. При  $\alpha \gg 1$  (здесь и далее  $\gamma, \varepsilon, \lambda > 0$ ) линейное слагаемое в выражении (2) обеспечивает установление противофазных колебаний  $x_1$  и  $x_2$ , что имитирует действие тормозной связи. При  $\alpha < 0$  или  $0 < \alpha \ll 1$  устанавливаются соответственно синфазные или близкие к синфазным периодические колебания, что воспроизводит влияние возбуждающих связей (см., например, [15]). При конечных значениях  $\alpha > 0$  кубическая нелинейность связи обеспечивает конкуренцию этих двух противоположных тенденций, которая и приводит к мультистабильности синхронизации и к перемежающейся смене режимов с почти постоянным сдвигом фаз на достаточно длинных интервалах времени.

Отмеченные выше тенденции становятся очевидными в квазигармоническом

приближении при  $\gamma, \epsilon, \lambda \sim \mu \ll 1$ , когда переменные  $x, y$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_j(t) &= a_j(t) \exp(i\varphi_j(t) + it) + \text{к. с.}, \\ y_j(t) &= i(a_j(t) \exp(i\varphi_j(t) + it) - \text{к. с.}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $a_j$  и  $\varphi_j$  — медленно меняющиеся во времени амплитуды и фазы колебаний связанных генераторов, которые в первом приближении по малому параметру  $\mu$  удовлетворяют укороченным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= a_1(1 - a_1^2) - \Gamma(a_1, a_2, \varphi)(a_1 - a_2 \cos \varphi), \\ \dot{a}_2 &= a_2(1 - a_2^2) - \Gamma(a_1, a_2, \varphi)(a_2 - a_1 \cos \varphi), \\ \dot{\varphi} &\equiv \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = C(a_2^2 - a_1^2) - \Gamma(a_1, a_2, \varphi)(a_1/a_2 + a_2/a_1) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\Gamma(a_1, a_2, \varphi) = \gamma'(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \varphi - \alpha')$ ,  $a_1a_2 \neq 0$ , и введены новое время  $t' = t\lambda/2$  и параметры  $C = -3\epsilon/\lambda$ ,  $\alpha' = \alpha/3$ ,  $\gamma' = 3\gamma/\lambda$ . В системе (4) тривиальное состояние равновесия  $a_j = 0$  неустойчиво, а нетривиальные  $a_j = a_j^*$ ,  $\varphi = \varphi^* = \varphi_1^* - \varphi_2^*$ , обозначаемые в дальнейшем  $S(a_1^*, a_2^*, \varphi^*)$ , соответствуют периодическим решениям исходной системы (1), то есть синхронизации колебаний двух подсистем с постоянной разностью фаз  $\varphi = \varphi^*$  между ними. При  $\alpha' < 0$  система (4) имеет устойчивое состояние равновесия  $S_0 = S(1, 1, 0)$  и седловое  $S_\pi = S(a^\pi, a^\pi, \pi)$ , которые соответствуют синфазным и противофазным колебаниям в исходной системе (1). При смене знака  $\alpha'$  состояние равновесия  $S_0$  становится седловым и от него рождаются два несимметричные ( $\varphi^* = \pm\psi$ ,  $\psi \neq 0, \pi$ ) устойчивые состояния равновесия  $S_{+\psi} = S(1, 1, \psi)$  и  $S_{-\psi} = S(1, 1, -\psi)$ . При  $\alpha^* = 4$  состояния равновесия  $S_{+\psi}$  и  $S_{-\psi}$  сливаются с состоянием равновесия  $S_\pi$ , которое при  $\alpha' > 4$  становится устойчивым, как показано на рис. 1. Таким образом, даже в случае идентичных генераторов без частотной расстройки при малых надкритических значениях  $\alpha' > 0$  нелинейность связи приводит после потери устойчивости режима синфазной синхронизации к

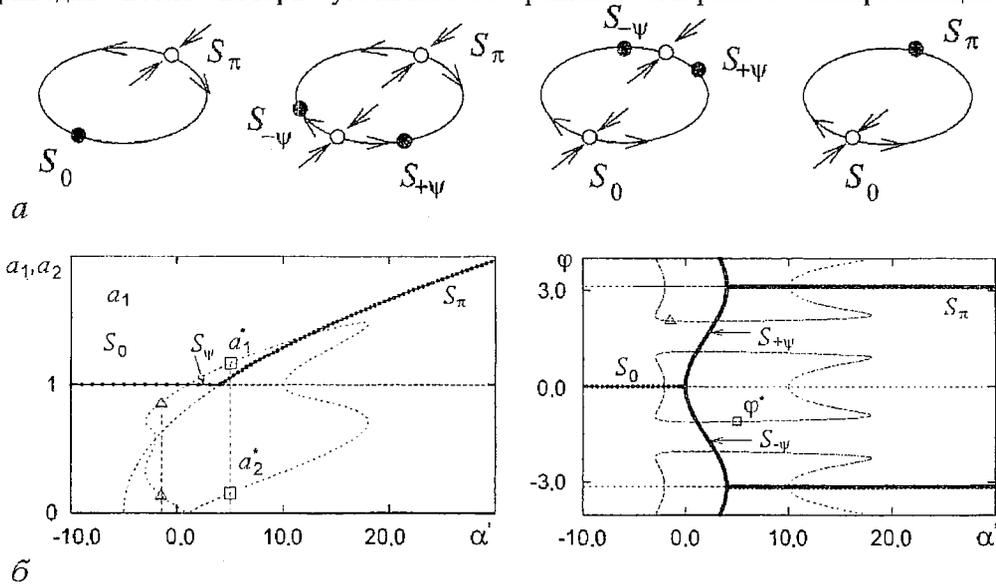


Рис. 1. *a* — последовательность бифуркаций в укороченной системе при изменении параметра  $\alpha'$ ; *b* — зависимости амплитуд  $a_1, a_2$  и фазы  $\varphi$  периодических решений от  $\alpha'$  (черные точки — устойчивые ветви, пунктир — неустойчивые). При прохождении одной из амплитуд седлового решения через ноль происходит изменение фазы на  $\pi$ . Для иллюстрации этого на рисунке указаны значения  $a_1^*, a_2^*, \varphi^*$  одного из седловых решений для двух значений  $\alpha'$ : 5.0 (квадраты), -1.5 (треугольники)

появлению режимов несимметричных колебаний с постоянным сдвигом фаз между подсистемами.

### Бифуркации в исходной системе нелинейно взаимодействующих генераторов Ван дер Поля – Дуффинга

Конкретный анализ бифуркаций в настоящей работе проведен при фиксированных значениях параметров  $\lambda=0.5, \epsilon=1$ .

При малых значениях  $\gamma$ , то есть при слабой связи, исходная система (1) демонстрирует хорошее соответствие укороченной системе уравнений (4). А именно, с ростом  $\alpha$  периодическое решение  $\Gamma_0$ , соответствующее тождественной синхронизации подсистем, теряет устойчивость при  $\alpha=0$  и становится седловым; от него рождаются два устойчивых периодических решения  $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$ , различающиеся в основном почти постоянным сдвигом фаз между реализациями  $x_1(t), x_2(t)$ , как видно из

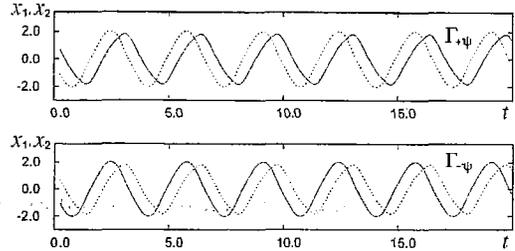


Рис. 2. Временные реализации, соответствующие периодическим решениям  $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$ :  $x_1(t)$  – сплошные линии,  $x_2(t)$  – пунктир

рис. 2. Эволюцию периодических решений  $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$  с изменением  $\alpha$  при различных значениях  $\gamma$  иллюстрируют бифуркационные диаграммы на рис. 3. На диаграмме построены ветви  $X_1(\alpha)$ , где  $X_1$  – максимальные значения  $x_1(t)$  на периоде колебаний для различных решений. Отметим, что (как и для укороченной системы (4)) наряду с решениями  $\Gamma_0, \Gamma_\pi, \Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$  в фазовом пространстве системы (1) существуют

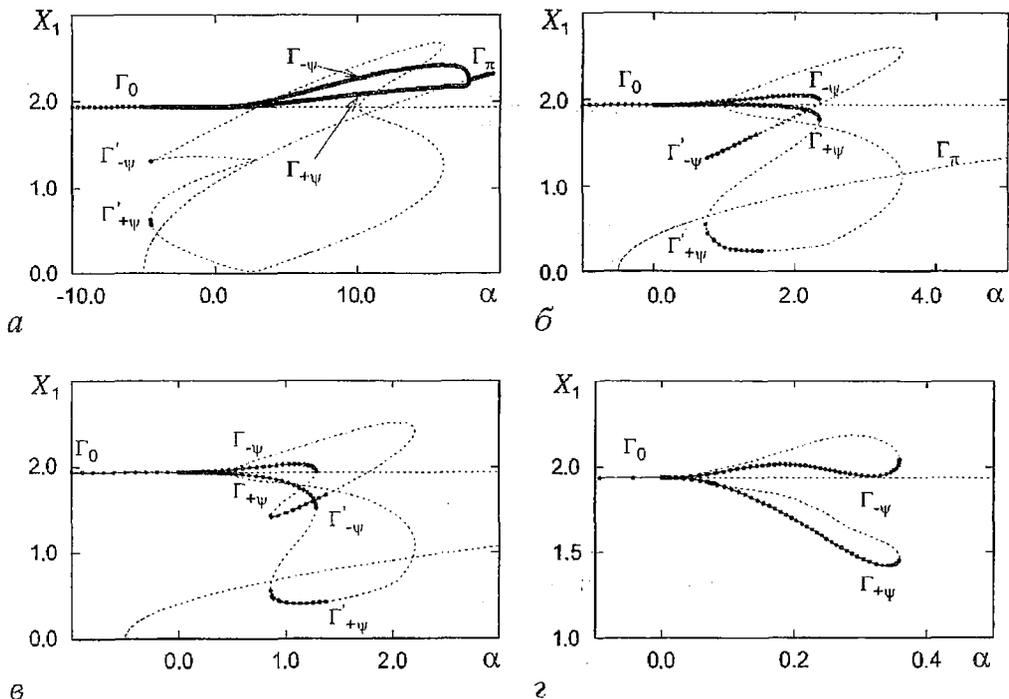


Рис. 3. Бифуркации периодических решений в системе (1) для различных значений  $\gamma$ : а – 0.05, б – 0.5, в – 1.0, г – 10.0 (жирными черными точками обозначены устойчивые ветви, пунктиром – неустойчивые)

несимметричные седловые решения. Кроме того, появляются устойчивые несимметричные решения  $\Gamma_{+\psi'}$  и  $\Gamma_{-\psi'}$ .

Как видно из рис. 3, а, при малых значениях  $\gamma$  с ростом  $\alpha$  периодические решения  $\Gamma_{+\psi}$ ,  $\Gamma_{-\psi}$  исчезают, сливаясь с седловым периодическим решением  $\Gamma_{\pi}$ , которое становится устойчивым (мультипликатор периодического решения  $\Gamma_{\pi}$  пересекает единичную окружность через +1). Этой бифуркации на двухпараметрической диаграмме, приведенной на рис. 4, соответствует отрезок кривой  $l_0$ . Бифуркационный сценарий, предсказанный по укороченным уравнениям (4), реализуется в исходной системе (1) только при слабой связи  $\gamma \ll 1$  (ср. рис. 1, б и рис. 3, а). В этом случае нелинейная связь существенно меньше собственной нелинейности генераторов  $\gamma \ll \lambda \sim 1$ . Увеличение связи  $\gamma$  приводит к качественному изменению бифуркационной диаграммы – теперь с ростом  $\alpha$  периодические решения  $\Gamma_{+\psi}$ ,  $\Gamma_{-\psi}$  или  $\Gamma_{+\psi'}$ ,  $\Gamma_{-\psi'}$  могут терять устойчивость, не достигая решения  $\Gamma_{\pi}$ . При этом в системе могут наблюдаться хаотические колебания.

В точке А на рис. 4 при значениях  $\gamma$  чуть больше, чем  $\gamma=0.05$ , для которого приведен рис. 3, а, происходит слияние периодических решений  $\Gamma_{\pi}$ ,  $\Gamma_{+\psi}$ ,  $\Gamma_{-\psi}$  и попарно двух седловых. Из точки А выходят две ветви  $l_0$ ,  $l_0'$  бифуркационной границы, отвечающей мультипликатору +1 периодического решения  $\Gamma_{\pi}$ , а также кривая  $m_0$ , соответствующая бифуркации слияния устойчивых периодических решений  $\Gamma_{+\psi}$ ,  $\Gamma_{-\psi}$  с седловыми решениями. Точка В является точкой пересечения кривой  $l_0'$  с линией  $r_0$ , соответствующей появлению у решения  $\Gamma_{\pi}$  пары комплексно-сопряженных мультипликаторов  $\exp(\pm i\sigma)$ . В точке В у решения  $\Gamma_{\pi}$  два мультипликатора переходят через +1. Кривая  $l_1$  аналогична кривой  $l_0'$ , а точка С – точке В.

При достаточно больших значениях  $\alpha$ , лежащих над кривой  $n_0$ , в фазовом пространстве системы появляются две пары (с учетом инвариантности относительно замены  $x_1 \leftrightarrow x_2$ ,  $y_1 \leftrightarrow y_2$ ) состояний равновесия:  $O_1$  ( $O'_1$ ) и  $O_2$  ( $O'_2$ ). Одна из них,  $O_1$  ( $O'_1$ ), устойчива в области на рис. 4, расположенной между кривыми  $h_1$  и  $h_2$ , являющимися соответственно опасной и безопасной границами устойчивости.

При достаточно сильной связи, то есть с ростом  $\alpha$  внутри области устойчивости состояний равновесия, автоколебания в системе связанных генераторов Ван дер Поля – Дуффинга прекращаются.

Область  $\Omega_{\pi}$  существования устойчивого периодического решения  $\Gamma_{\pi}$  ограничена на рис. 4 линиями  $l_0$ ,  $l_0'$ ,  $r_0$ ,  $l_1$ .

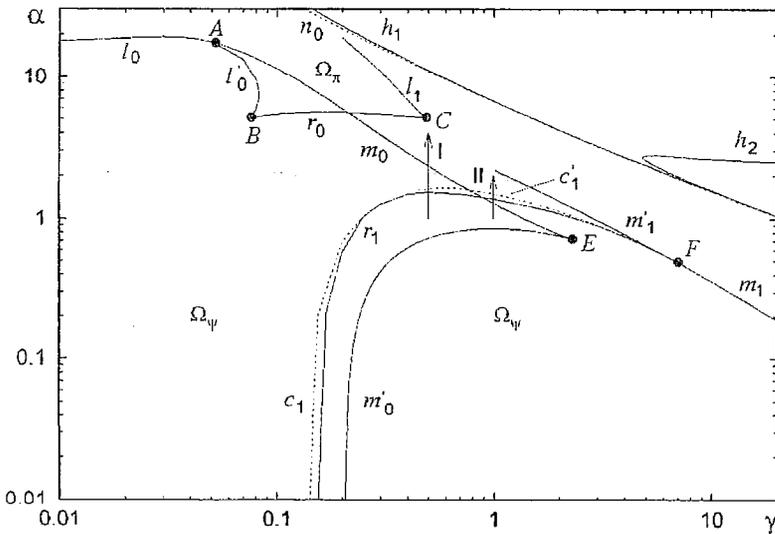


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров  $\gamma$ ,  $\alpha$

Устойчивые несимметричные периодические решения могут существовать при достаточно малых положительных значениях  $\alpha$  и с ростом  $\alpha$  исчезают. Область  $\Omega_\psi$  существования этих решений расположена ниже кривых  $l_0$  и  $m_0$ , описанных выше, или границы  $r_1$  (при  $\gamma \geq 1$ ), отвечающей рождению тора, и линии слияния устойчивых периодических решений с седловыми решениями —  $m_1$ . Устойчивые решения  $\Gamma_{+\psi'}$ ,  $\Gamma_{-\psi'}$  (см. также рис. 3) сосуществуют с решениями  $\Gamma_{+\psi}$ ,  $\Gamma_{-\psi}$  в области ниже кривых  $r_1$ ,  $m_0$  и выше  $m_0'$  в области сборки, берущей начало в точке  $E$ . Кривая рождения торов  $r_1$  примыкает к бифуркационной границе  $m_1$  в точке  $F$ , где у периодических решений  $\Gamma_{+\psi}$ ,  $\Gamma_{-\psi}$  два мультипликатора становятся равными +1.

Области  $\Omega_\pi$  и  $\Omega_\psi$  перекрываются между кривыми  $l_0'$ ,  $r_0$ ,  $m_0$ , где при варьировании параметра  $\alpha$  наблюдается гистерезис между устойчивыми решениями  $\Gamma_\pi$  и  $\Gamma_{+\psi}$ ,  $\Gamma_{-\psi}$ .

### Сценарии переходов к хаосу и хаотические режимы

Основным предметом настоящих исследований являются нерегулярные переключения, о которых речь шла во Введении. Их возникновение практически совпадает с переходами к хаосу в исследуемой системе по сценариям, которые реализуются при потере устойчивости периодических решений  $\Gamma_{+\psi}$ ,  $\Gamma_{-\psi}$  или  $\Gamma_{+\psi'}$ ,  $\Gamma_{-\psi'}$ . Если при этом состояние системы не оказывается в области притяжения другой траектории, то такие сценарии наблюдаются в численных экспериментах при пересечении границы  $m_0$  на участке между линиями  $r_0$  и  $r_1$  (сценарий I) и границы  $r_1$  на участке между линией  $m_0$  и точкой  $F$  (сценарий II). Относительно этих сценариев на основе численных экспериментов можно сделать следующие выводы.

*Сценарий I.* Однопараметрическая диаграмма состояний и отображения Пуанкаре, приведенные на рис. 5, отражают перестройки притягивающих

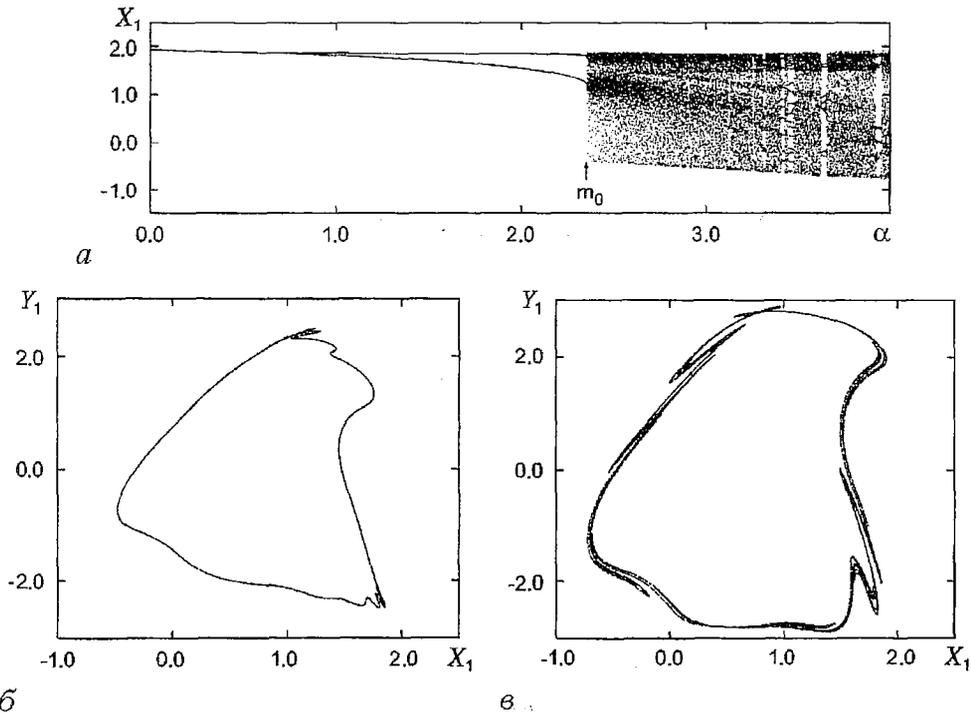


Рис. 5. Переход к хаосу через перемежаемость (сценарий I): а — диаграмма состояний при  $\gamma=0.5$  (стрелкой указано бифуркационное значение параметра  $\alpha$ , отвечающее границе  $m_0$  на рис. 4); траектории отображения Пуанкаре при  $\alpha=2.8$  (б) и  $\alpha=3.8$  (в)

множеств в системе (1) при  $\gamma=0.5$  и квазистатическом изменении параметра  $\alpha$ . По осям отложены величины  $X_1, Y_1$  – значения координат  $x_1, y_1$ , взятые на пересечении решения с гиперплоскостью  $\Pi: y_1+y_2=0$ . На рис. 5, а совмещены две диаграммы, относящиеся к решениям  $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$ . Устойчивым периодическим решениям соответствуют на диаграмме сплошные линии, хаотическим колебаниям – диффузное распределение точек. Из рис. 5, а видно, что хаотические колебания устанавливаются сразу после пересечения границы  $m_0$  и существуют в широком диапазоне значений  $\alpha$ . Структура притягивающего множества в окрестности границы  $m_0$ , сечение которого гиперплоскостью  $\Pi$  приведено на рис. 5, б, позволяет предположить, что хаотический аттрактор возникает при седло–узловой бифуркации периодических решений  $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$ , лежащих на поверхности негладкого тора [16]. Этот сценарий соответствует переходу к хаосу через перемежаемость типа I [17].

*Сценарий II.* При пересечении границы  $r_1$  между кривой  $m_0$  и точкой  $F$  с изменением параметра  $\alpha$  в направлении, указанном на рис. 4 стрелкой II, от периодических решений  $\Gamma_{+\psi'}, \Gamma_{-\psi'}$  или  $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$  рождаются устойчивые торы. Торы существуют в малой окрестности бифуркационной границы  $r_1$ . С увеличением  $\alpha$  торы разрушаются на границе  $c_1'$  в результате образования резонансных периодических решений и прохождения комплекса связанных с ними бифуркаций до образования притягивающей гомоклинической структуры [18]. Однопараметрическая диаграмма состояний и характерные траектории отображений Пуанкаре при  $\gamma=1.0$  приведены на рис. 6. Из рисунка видно, что с ростом  $\alpha$  первоначальная гомоклиническая структура разрушается и в результате образуется хаотический аттрактор с качественно такими же свойствами диаграммы состояний и отображения Пуанкаре, как и в предыдущем сценарии.

Хаотические аттракторы, возникающие в системе (1) в результате сценариев I и II симметричны относительно замены переменных  $x_1 \leftrightarrow x_2, y_1 \leftrightarrow y_2$  за счет симметрии самой системы. В отличие от [19], где были рассмотрены два генератора Ван дер Поля с неодинаковой нелинейной связью, в системе (1) нехаотические аттракторы, а предельные циклы претерпевали бифуркацию разрушения симметрии, и в рассмотренной области параметров мультистабильность на хаотических аттракторах не наблюдалась.

### Хаотические колебания с двумя метастабильными состояниями

Из рассмотрения сценариев I, II перехода к хаосу видно, что в системе двух генераторов Ван дер Поля – Дуффинга (1) с нелинейной связью при исчезновении несимметричных устойчивых периодических решений с различными фазовыми соотношениями между колебаниями парциальных подсистем возможно установление хаотических движений которые сохраняются в обширной области значений параметров связи. Хаотический аттрактор, определяющий эти колебания, формируется вблизи границ, отвечающих слиянию устойчивых периодических решений с седловыми решениями или образованию притягивающей гомоклинической структуры. В обоих случаях рождается предельное множество, траектории на котором относительно большое время проводят в окрестностях потерявших устойчивость (или исчезнувших) периодических решений  $\Gamma_{+\psi'}, \Gamma_{-\psi'}$  или  $\Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$ , отвечающих синхронным колебаниям парциальных подсистем с фазовыми сдвигами разного знака (рис. 7).

При вычислении разности фаз  $\varphi(t)=\varphi_2(t)-\varphi_1(t)$  колебаний  $x_1(t), x_2(t)$  использовалось определение мгновенной (гильбертовой) фазы [20], что в случае

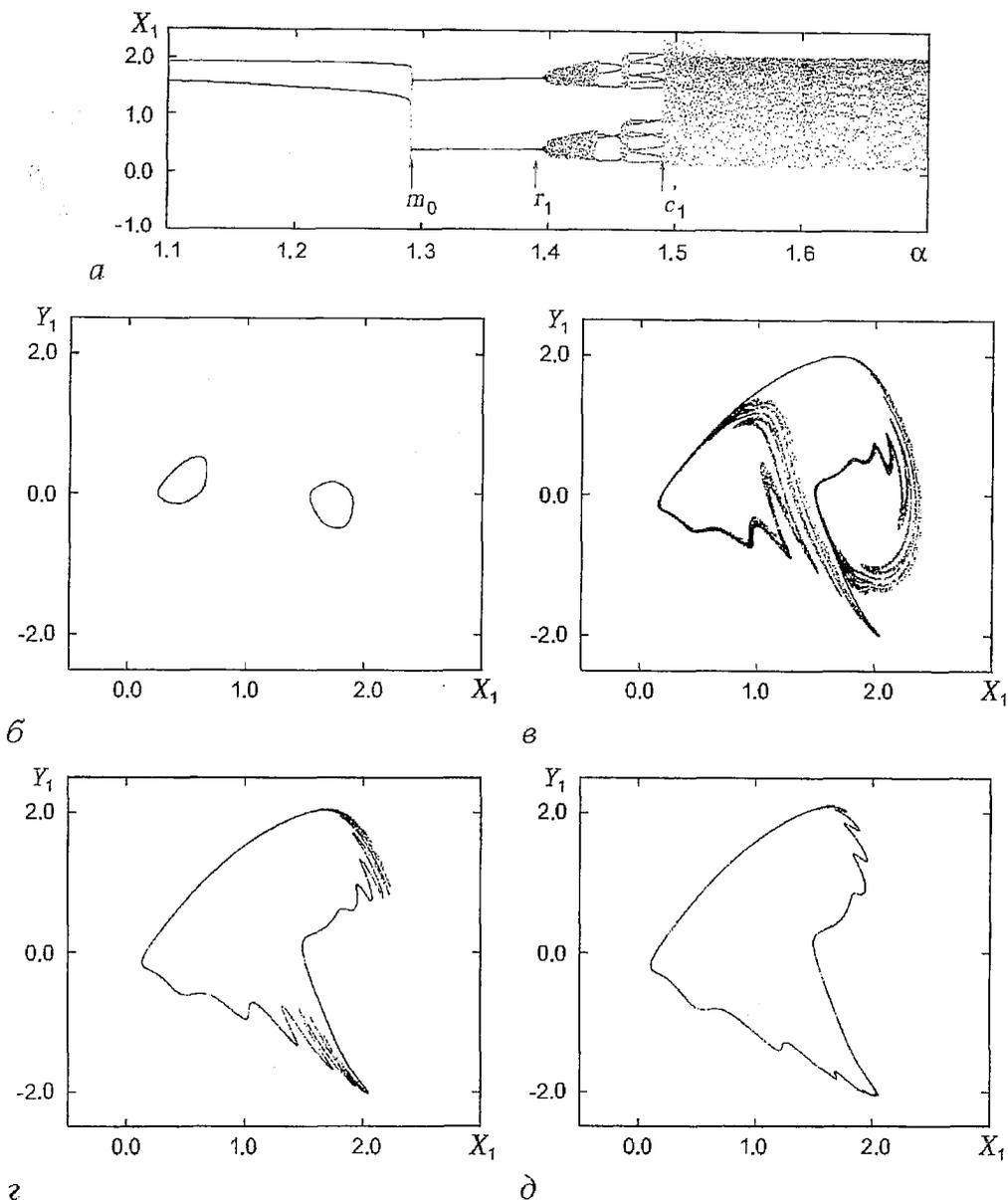


Рис. 6. Переход к хаосу через разрушение торов и образование притягивающей гомоклинической структуры (сценарий II): а – диаграмма состояний при  $\gamma=1.0$  (стрелками указаны значения параметра  $\alpha$ , соответствующие бифуркационным границам на рис. 4); траектории отображения Пуанкаре при различных  $\alpha$ : б – 1.42; в – 1.494; з – 1.525; д – 1.6

хаотических колебаний с узким спектром вполне корректно [21]. Наиболее выраженные «переключения» между двумя хорошо различимыми почти периодическими метастабильными состояниями свойственны описанному выше сценарию I. Типичные реализации, включая вычисленную разность фаз между колебаниями подсистем, соответствующие такому режиму, приведены на рис. 7. В сценарии II реализуется подобное поведение, однако нерегулярные переходы осуществляются между двумя разными, но сложно изменяющимися во времени колебаниями, которые, вообще говоря, не ассоциируются с взаимно синхронизованным поведением.

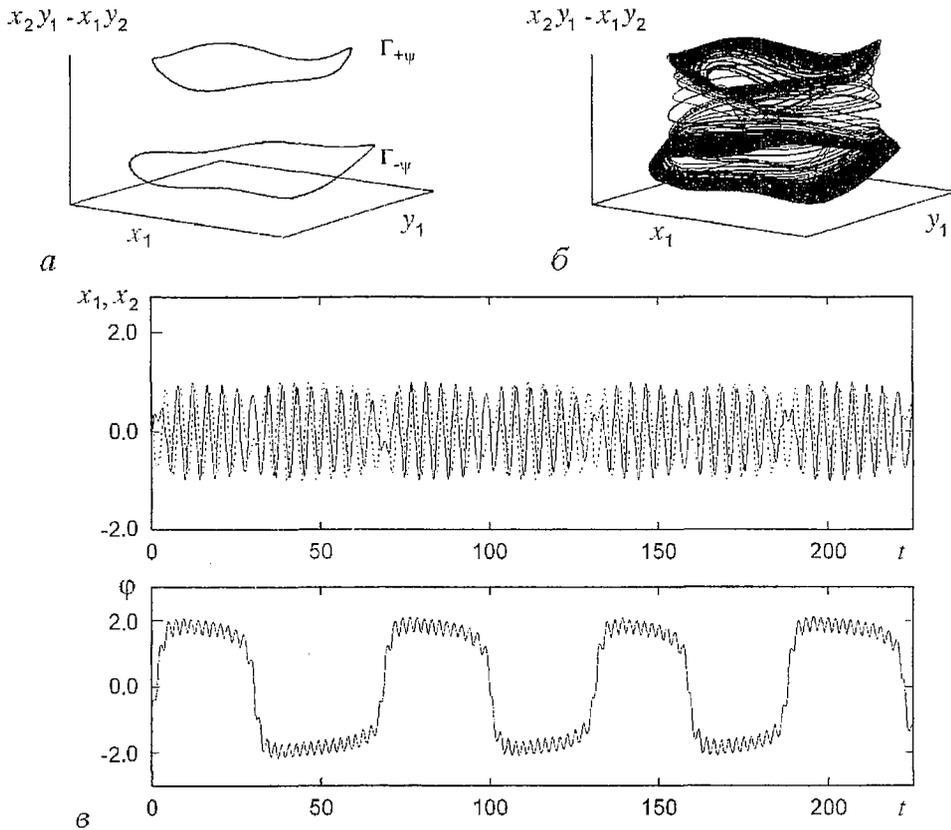


Рис. 7. Режим хаотических переключений между колебаниями с опережением и запаздыванием фазы: а – периодические решения  $\Gamma_0, \Gamma_{+\psi}, \Gamma_{-\psi}$  при докритических значениях параметров  $\gamma=0.5, \alpha=2.3$ ; б – хаотический аттрактор при  $\gamma=0.5, \alpha=2.5$ ; в – хаотические реализации  $x_1(t)$  (сплошная линия),  $x_2(t)$  (пунктир) и разность фаз между ними

### Синхронизация в ансамбле нелинейно связанных осцилляторов

Заметим, что хаотические колебания в рассматриваемой системе вызваны нелинейным взаимодействием осцилляторов, демонстрирующих периодическую собственную динамику. Взаимные связи формируют замкнутый круг и играют роль цепи управления, с помощью которой осцилляторы обмениваются информацией об их фазовых соотношениях. Разность фаз пары осцилляторов может обладать хаотическим поведением, что позволяет нам рассматривать данную систему как хаотический генератор. Возможность воспроизведения хаотического сигнала такого типа в принимающей системе, то есть хаотическая синхронизация, недостаточно изучена и может иметь практический интерес [19].

По аналогии с системами фазовой синхронизации мы предлагаем простую технологию для построения схемы синхронного отклика, аналогичной предложенной в [22, 23]. Для достижения синхронности колебаний в случае двух пар связанных осцилляторов (два в управляющей системе и два в управляемой) одна из двух связей в управляемой системе должна быть разомкнута и заменена воздействием от управляющей системы, как это показано на рис. 8. Следовательно, уравнения для управляющей  $(x_1, y_1, x_2, y_2)$  и управляемой  $(x_1', y_1', x_2', y_2')$  систем записываются в форме

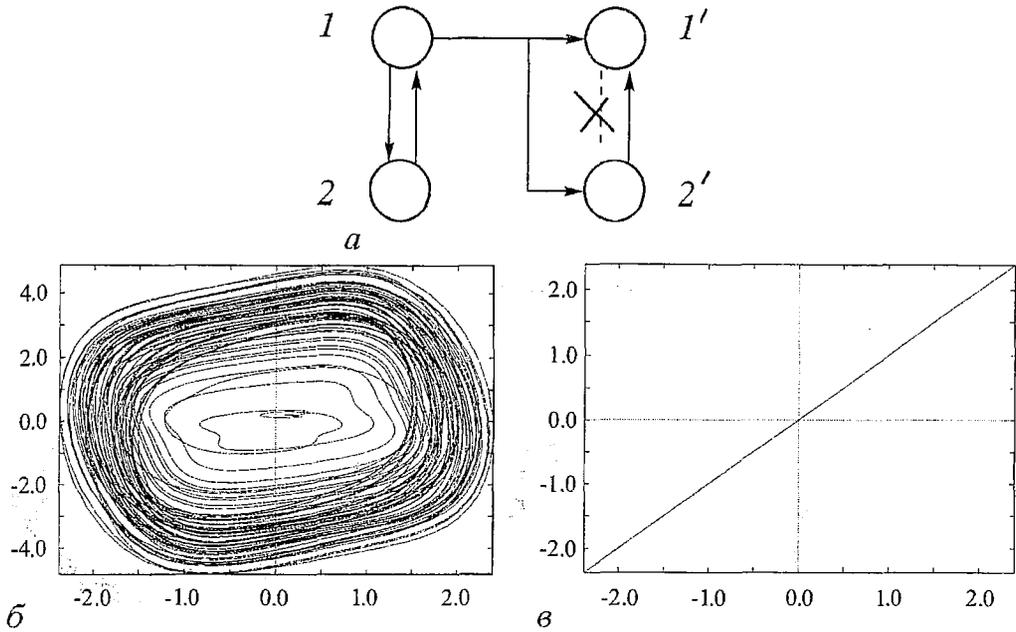
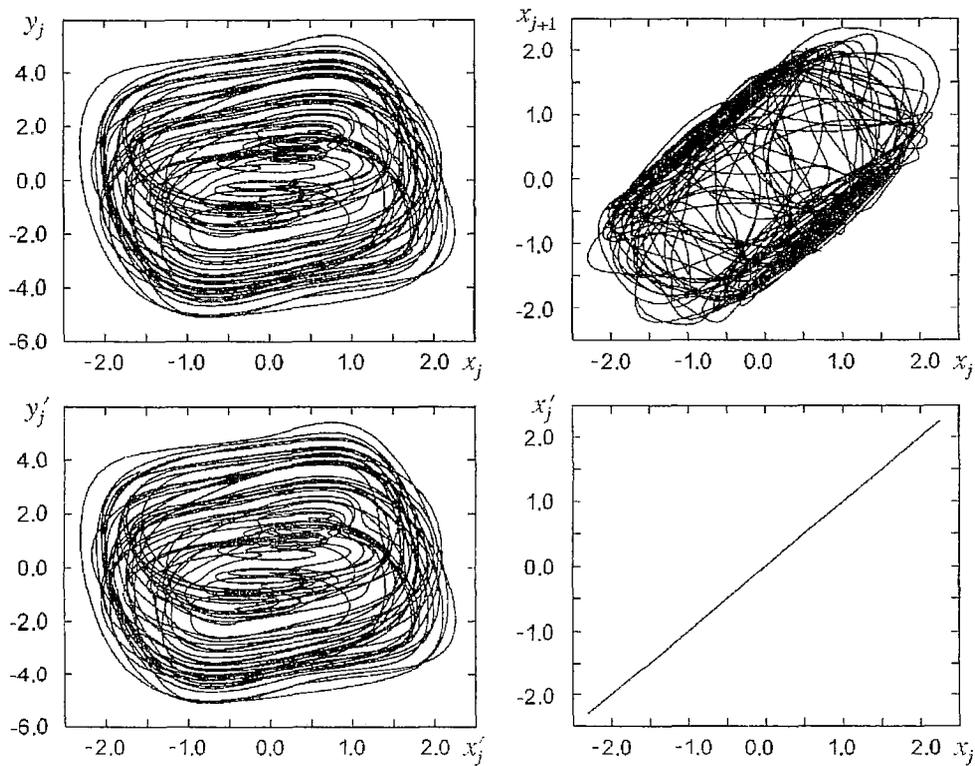
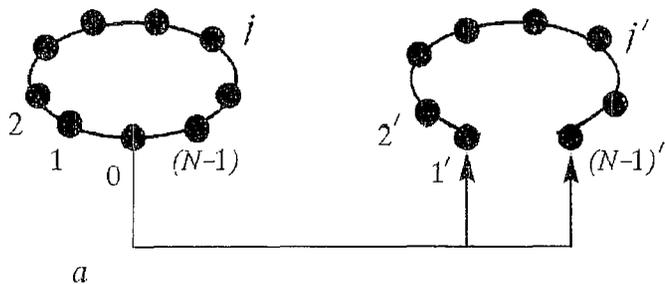


Рис. 8. Хаотическая синхронизация в системе двух связанных осцилляторов; *a* – схематическое представление управляющей и управляемой систем; *b* – проекция хаотической реализации на плоскость  $(x_2, y_2)$ ; *c* – проекция хаотической реализации на плоскость  $(x_2'(t), x_2(t))$  (фигура Лиссажу)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1 + \gamma(x_1 - x_2)[\alpha - (x_1 - x_2)^2], \\
 \dot{y}_1 &= \lambda(1 - x_1^2)y_1 - \epsilon x_1^3 - x_1, \\
 \dot{x}_2 &= y_2 + \gamma(x_2 - x_1)[\alpha - (x_2 - x_1)^2], \\
 \dot{y}_2 &= \lambda(1 - x_2^2)y_2 - \epsilon x_2^3 - x_2, \\
 \dot{x}_1' &= y_1' + \gamma(x_1 - x_2')[\alpha - (x_1 - x_2')^2], \\
 \dot{y}_1' &= \lambda(1 - x_1'^2)y_1' - \epsilon x_1'^3 - x_1', \\
 \dot{x}_2' &= y_2' + \gamma(x_2' - x_1)[\alpha - (x_2' - x_1)^2], \\
 \dot{y}_2' &= \lambda(1 - x_2'^2)y_2' - \epsilon x_2'^3 - x_2'.
 \end{aligned}$$

Из рис. 8, *b*, *c* очевидно, что рассматриваемая схема демонстрирует строгую синхронизацию управляющей и управляемой систем.

Доказано, что аналогичную конструкцию полезно использовать для синхронизации двух ансамблей связанных осцилляторов. Мы используем тот факт, что хаотические колебания наблюдаются только при достаточно сильных связях в уравнении (1). Это обеспечивает быстрые переходные процессы и необходимую грубость синхронных решений для схемы синхронного отклика. Последнее свойство позволяет нам реализовать схему хаотической синхронизации для больших ансамблей, состоящих из  $N$  нелинейно связанных осцилляторов в управляющей системе и  $N-1$  осцилляторов в управляемой, используя один единственный компонент решения управляющей системы (рис. 9). Колебания управляющей и управляемой систем в хаотическом режиме синхронизованы попарно:  $2 - 2', \dots, (N-2) - (N-2)'$ , тогда как колебания внутри каждого ансамбля остаются несинхронными.



б

Рис. 9. Хаотическая синхронизация в большом ансамбле осцилляторов с нелинейными локальными связями: а – схематическое представление системы; б – проекция хаотической реализации ( $N=11$ )

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 96-02-16559 и 97-02-17526), а также Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант 96-02-96593).

**Библиографический список**

1. Haken H. Advanced synergetics. 2nd edition. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1987.
2. Haken H. Information and Self-Organization. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1988.
3. Haken H., Kelso J.A.S., Bunz H. A theoretical model of phase transitions in human hand movements // Biol. Cybern. 1985. Vol. 51. P. 347.
4. Kelso J.A.S., Scholz J.P., Schönner G. Nonequilibrium phase transitions in coordinated biological motions: critical fluctuations // Phys. Lett. 1986. Vol. 118. P. 279.



## SIMMETRY BREAKING, MULTISTABILITY AND CHAOS IN THE SYSTEM OF TWO COUPLED IDENTICAL VAN DER POL – DUFFING OSCILLATORS

*A. K. Kozlov, M. M. Sushchik, Ya. I. Molkov, A. S. Kuznetsov*

The phase bistability occurring at synchronization of two identical Van der Pol – Duffing oscillators with cubic nonlinear coupling is considered. Two scenarios of the transition to chaos were revealed for finite values of the coupling nonlinearity. The chaos in the system is observed in a wide range of coupling parameters.



*Козлов Александр Константинович* – выпускник радиофизического факультета Нижегородского государственного университета (1989). Работал в НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ (с 1989 по 1998), а затем в Институте прикладной физики РАН (с 1995). Кандидат физико-математических наук. Область научных интересов: нелинейная динамика автоколебательных систем, явления синхронизации, управление хаотическими динамическими системами в приложении к нейробиологическим и медицинским задачам.



*Суицк Михаил Михайлович* – родился в г. Городня Черниговской обл. (1941), окончил радиофизический факультет Нижегородского Государственного Университета (1965). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1972). Заместитель директора Отделения нелинейной динамики и оптики Института прикладной физики РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика, синхронизация, когерентные структуры и модели нейродинамики.



*Мольков Ярослав Игоревич* – родился в Нижнем Новгороде (1974). Окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1996). По окончании поступил в аспирантуру Института прикладной физики РАН. Работает в том же институте в должности младшего научного сотрудника. Область научных интересов: нелинейная динамика.



*Кузнецов Алексей Сергеевич* – родился в 1973 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского в 1996 году. По окончании поступил в аспирантуру того же университета на кафедру теории колебаний. С 1995 года работает в Институте прикладной физики РАН, с 1998 года в должности младшего научного сотрудника. Опубликовал около 20 работ. Занимается исследованием нелинейной динамики ансамблей связанных активных элементов, в том числе в приложении к биологическим задачам.