



ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ НЕУПОРЯДОЧЕННОСТЬЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ВРЕМЕННЫХ ПАТТЕРНОВ В ЦЕПОЧКАХ ХАОТИЧЕСКИХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Л.Л. Рубчинский, М.М. Суцук

На примере цепочек, составленных из идентичных генераторов Чуа или идентичных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга с гармонической внешней силой, продемонстрировано, что при нелинейности связи возможно возникновение такой мультистабильности, при которой более нерегулярные в пространстве паттерны обладают более простым поведением во времени.

1. Сложные пространственно–временные паттерны в распределенных системах формируются в результате развития иерархии неустойчивостей при увеличении надкритичности. На начальном этапе их формирования иногда удается выделить два крайних случая, обычно реализующихся в разных системах (см., например, [1]). В одном из них увеличение надкритичности приводит к усложнению пространственной структуры без существенного усложнения временной динамики. В частности, такой сценарий наблюдается в подогреваемом снизу слое жидкости при больших числах Прандтля. В другом случае сложное временное поведение, в том числе и хаотическое, может возникнуть практически без изменения упорядоченной пространственной структуры, как, например, в цилиндрическом течении Куэтта.

При дальнейшем увеличении надкритичности изменения пространственной структуры и временного поведения становятся взаимосвязанными. Как правило, для данной системы наблюдается прямая взаимосвязь – усложнение пространственной структуры ведет к усложнению временного поведения. Это выглядит вполне естественно с учетом зависимости размерности хаоса от числа коллективных возбуждений при больших значениях надкритичности [2]. В связи с этим возникает вопрос, а возможна ли ситуация, когда реализуется обратная взаимосвязь, когда в одной и той же системе более нерегулярным пространственным структурам соответствует более простое поведение во времени. В частности, могут ли в однородной системе при фиксированных значениях параметров сосуществовать два разных типа поведения: пространственно однородный режим, в котором возможна только хаотическая временная динамика, и пространственно неоднородные режимы (в том числе и пространственный беспорядок), в которых возможна регулярная временная динамика.

В настоящей работе приведены примеры сравнительно простых систем одномерных цепочек хаотических генераторов, для которых этот вопрос имеет положительный ответ, и на этих примерах проанализирован один из возможных

механизмов реализации обратной взаимосвязи между степенью неупорядоченности пространственных и временных паттернов. Мы исследуем обратную взаимосвязь паттернов (ОВП, Anomalous Relationship between spatial and temporal Patterns of behavior, ARP), обусловленную наличием мультистабильности (может быть, корректнее говорить – мультивариантности) режимов поведения отдельных элементов системы, и нами будут рассмотрены цепочки, составленные из идентичных генераторов Чуа [3–5] или идентичных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга с внешней силой.

2. Генератор Чуа описывается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x - h(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y. \end{aligned} \tag{1}$$

Для аппроксимации нелинейности схемы используется гладкая функция

$$h(x) = c_1 x^3 - 2c_0 x / (1 + c_0^2 x^2). \tag{2}$$

Бифуркации в такой форме схемы Чуа при интересующих нас значениях параметров исследовались в [6].

Цепочка таких элементов формируется с помощью нелинейной резистивной связи $D(\xi) = d \cdot \text{th}(\xi/\sigma)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \alpha(y_i - x_i - h(x_i)) + D(x_{i-1} - x_i) + D(x_{i+1} - x_i), \\ \dot{y}_i &= x_i - y_i + z_i, \\ \dot{z}_i &= -\beta y_i, \end{aligned} \tag{3}$$

где $i=1, \dots, N$; граничными условиями служат соотношения $(x_0, y_0, z_0) = (x_1, y_1, z_1)$ и $(x_N, y_N, z_N) = (x_{N+1}, y_{N+1}, z_{N+1})$ – цепочка со свободными концами.

В определенной области параметров (для определенности в дальнейшем $\alpha=6.32$, $\beta=10$, $c_0=0.65$, $c_1=0.05$, $d=0.2$, $\sigma=10^{-5}$) в системе имеется два пространственно однородных решения $(x_i, y_i, z_i)^{1,2} = \pm(x, y, z)$ с хаотической динамикой, совпадающей с динамикой индивидуального элемента (рис. 1), поскольку в этом

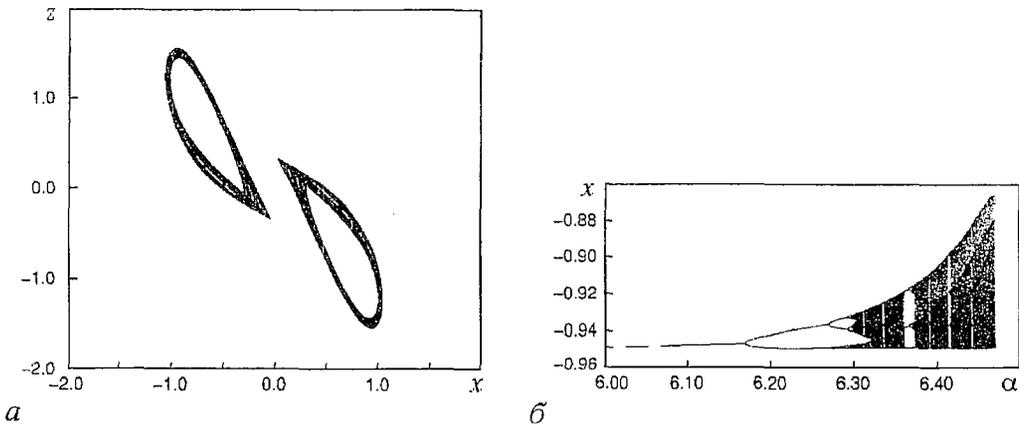


Рис. 1. Динамика изолированного элемента (1): а – странные аттракторы системы; б – каскад удвоений периода в (1), по вертикальной оси отложена x -координата пересечения траектории с плоскостью $y=0$

случае $D \equiv 0$. Эти два режима хаотической синхронизации являются устойчивыми по отношению к малым возмущениям и каждый из них обладает конечной, достаточно большой областью притяжения (по поводу хаотической синхронизации в цепочках генераторов Чуа см., например, [7,8]). Поскольку других нетривиальных однородных режимов в системе нет, то такая хаотическая синхронизация реализуется для большинства случаев, когда начальные значения всех переменных локализованы либо во втором, либо в четвертом квадранте.

Если же распределить начальные условия для различных элементов случайным образом во втором и четвертом квадрантах подобно тому, как на рис. 2,а, то в результате реализуется режим, качественно отличающийся от описанного выше. Пространственное распределение переменных станет неоднородным, а временное поведение элементов цепочки становится регулярным и генераторы Чуа генерируют периодические колебания (рис. 2). Недалеко отстоящие друг от друга генераторы в этом режиме часто оказываются взаимно синхронизованными. Далеко расположенные генераторы не синхронизованы (по крайней мере они не синхронизовались на временах проведения численного эксперимента, составлявших несколько тысяч единиц времени). Для иллюстрации на рис. 3 приведены фигуры Лиссажу для некоторых элементов. При других неоднородных начальных условиях опять устанавливается регулярный во времени режим с другой пространственной структурой. При соответствующем подборе начальных условий могут реализовываться и локально неоднородные режимы, в которых часть осцилляторов ведет себя хаотически, а часть – регулярно.

Полная система связанных осцилляторов Чуа обладает высокой степенью мультистабильности, но при случайном выборе начальных условий в рассматриваемом случае преимущественно реализуются регулярные во времени режимы.

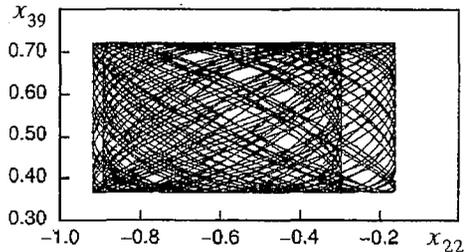
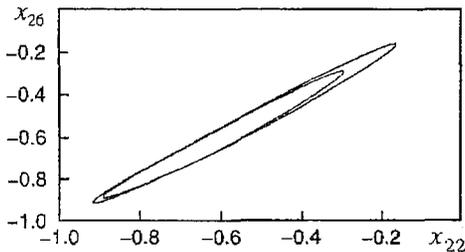


Рис. 3. Фигуры Лиссажу для нескольких элементов цепочки генераторов Чуа в неоднородном регулярном режиме

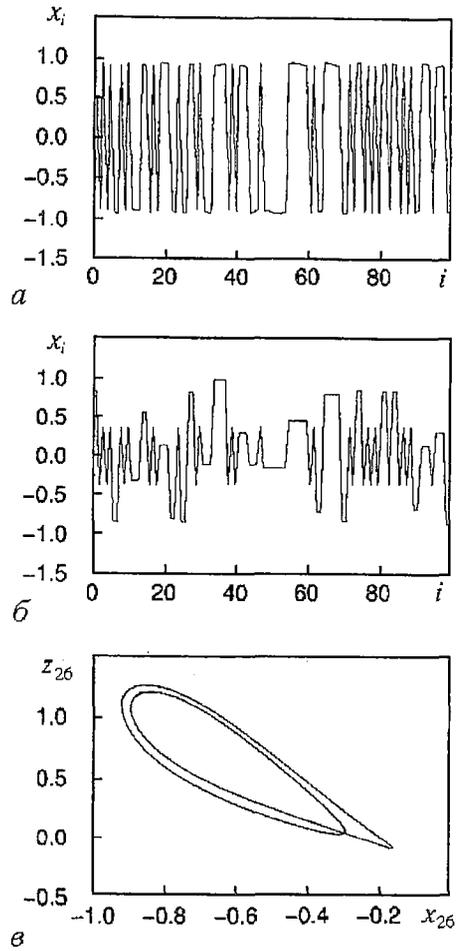


Рис. 2. Регулярный неоднородный режим в цепочке генераторов Чуа (3): а – начальные условия (для ясности рисунка изображены только x_i); б – пространственное распределение x_i в фиксированный момент времени в установленном режиме; в – проекция аттрактора (3) на плоскость (x_{26}, z_{26})

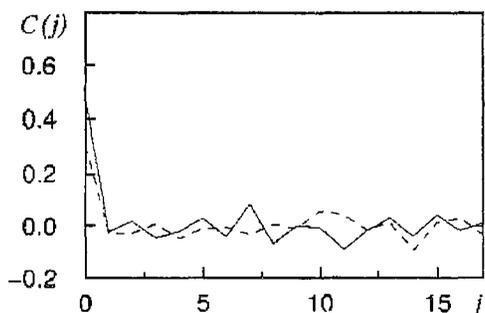


Рис. 4. Автокорреляционная функция пространственного распределения рис. 2, б (сплошная линия) и автокорреляционная функция последовательности чисел, сгенерированной генератором случайных чисел (штриховая линия)

Автокорреляционная функция пространственного распределения на рис. 2, б

$$C(j) = \langle (x_i - \langle x \rangle)(x_{i+j} - \langle x \rangle) \rangle,$$

где $\langle \rangle$ обозначает усреднение по массиву элементов, представлена на рис. 4 в сравнении с автокорреляционной функцией последовательности случайных чисел, полученных с помощью генератора случайных чисел нашего компьютера. Отсутствие корреляций между удаленными элементами указывает на наличие сравнительно беспорядочного пространственного паттерна.

3. Выше речь шла о цепочке, образованной с помощью диссипативных связей между элементами. Эффект ОВП может наблюдаться и в случае реактивной связи. Для примера рассмотрим цепочку осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга

$$\ddot{x}_i - \mu(1-x_i^2)\dot{x}_i - \alpha x_i + \beta x_i^3 = f \cos \omega t + \tilde{D}(x_{i-1}-x_i) + \tilde{D}(x_{i+1}-x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

со свободными концами и функцией связи

$$\tilde{D}(\xi) = \begin{cases} a(\xi+a_1)/(a_0-a_1) & \xi < -a_0, \\ a\xi/a_0 & -a_0 \leq \xi \leq a_0, \\ a(\xi-a_1)/(a_0-a_1) & \xi > a_0, \end{cases}$$

где $\xi = x_{i+1} - x_i$, представляющей собой реактивное соединение с кусочно-линейной характеристикой. В качестве параметров связи в численных экспериментах с цепочкой из $N=100$ элементов мы полагали $a=0.2$, $a_0=5 \cdot 10^{-5}$, $a_1=0.7$.

Мы ограничимся рассмотрением случая $\mu=0.1$, $\alpha=\beta=0.5$, для которого динамика осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга была изучена достаточно подробно в зависимости от f и ω [9]. В частности, при $f=0.18$, $\omega=0.5$ система ведет себя хаотически [9] (рис. 5, а). При этих значениях параметров в изолированной системе нет мультистабильности, однако оказывается, что в цепочке связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга при одних и тех же параметрах возможны не только движения, охватывающие обе потенциальные ямы, но и движения, локализованные в каждой из потенциальных ям. Это и приводит к

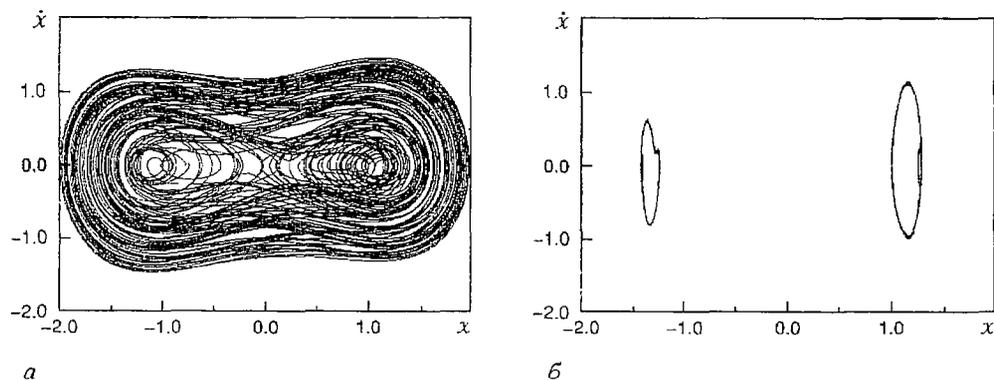


Рис. 5. а – фазовый портрет изолированного осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга с внешней силой; б – орбиты 22-го (слева) и 23-го (справа) элементов цепочки связанных осцилляторов в одних координатных осях

эффекту ОВП, когда пространственно однородное решение может быть только хаотическим во времени, а пространственно неоднородное может стать регулярным во времени.

Это проиллюстрировано рис. 5 и 6. При задании однородных начальных условий формируется хаотический во времени и однородный в пространстве устойчивый режим ($x_i(t)=x_j(t)$, $\dot{x}_i(t)=\dot{x}_j(t)$) в любой момент времени для любых i, j). Величина связи в этом режиме равна нулю и динамика каждого осциллятора совпадает с динамикой изолированного осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга (рис. 5, а). Задание неоднородных начальных условий (x_i такие же, например, как на рис. 2, а; y_i – в окрестности нуля) приводит к регуляризации движения – реализуется режим с нетривиальной пространственной структурой (см. рис. 6) и периодическим поведением во времени (динамика двух осцилляторов изображена на рис. 5, б).

Интересно отметить, что в отличие от случая с цепочкой генераторов Чуа, где удаленные друг от друга элементы хотя и обладали простой динамикой, но не были синхронизованы, в этом случае возможна их взаимная синхронизация (рис. 7). Причина такого различия требует специального рассмотрения, и здесь мы только отметим, что оно может быть вызвано качественным различием связей – диссипативных в первом случае и реактивных во втором.

4. Для иллюстрации возможного механизма ОВП рассмотрим вырожденный случай ОВП в цепочке генераторов Чуа, в которой каждый нечетный и четный элемент цепочки находится в своем парциальном фазовом пространстве в окрестности странных аттракторов системы SA_- и SA_+ (во втором и четвертом квадрантах (x, z) -плоскости – см. рис. 1, а), соответственно. Такой режим также реализуется при приведенных выше значениях параметров. Заметим, что если мы наложим периодические граничные условия на цепочку из нечетного числа элементов, мы будем иметь решение, эквивалентное соответствующему решению в системе двух связанных осцилляторов (хотя результаты относительно их устойчивости, разумеется, могут отличаться). Следовательно, можно один из возможных механизмов ОВП проиллюстрировать на примере двух связанных генераторов. Численное моделирование двух связанных генераторов (1) показало, что для SA_- начальных условий в одном из них и SA_+ – в другом, в определенном интервале d достигается регуляризация динамики. Влияние генератора на его соседа в асимптотике $(x_1 - x_2) \gg \sigma$ эквивалентно появлению постоянного члена величины d в правой части уравнения для \dot{x} в (1). Это, как можно заключить из результатов [6], должно приводить к перемещению системы в пространстве параметров из области хаотического поведения в область каскада удвоения периода. В зависимости от величины d можно получить 1, 2, ..., n -периодические

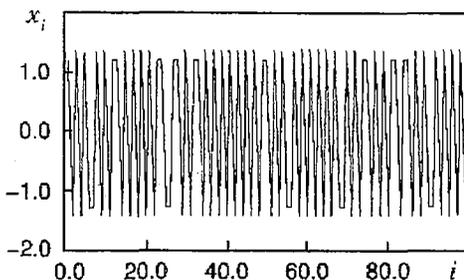


Рис. 6. Регулярный неоднородный режим в цепочке связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга (4): мгновенный снимок пространственного распределения x_i

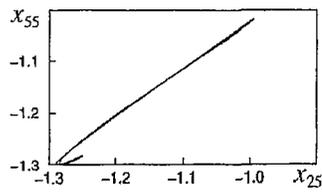
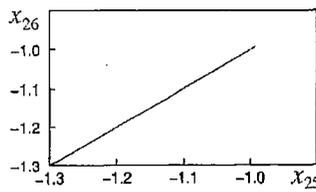
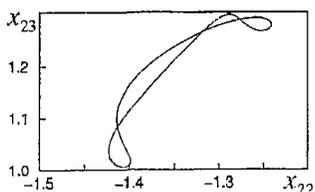


Рис. 7. Фигуры Лиссажу для нескольких элементов цепочки связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга в неоднородном регулярном режиме

движения (для малых d динамика будет хаотической). Аналогичная ситуация наблюдалась и в (3). Предложенный механизм ОВП может реализовываться в достаточно широком классе мультистабильных систем с хаотическим поведением.

5. В заключение сделаем два замечания. Во первых, в системах с ОВП задание неоднородных начальных условий (в частности, пространственного беспорядка) фактически приводит к регуляризации временной динамики. Такая регуляризация напоминает эффект, названный *taming spatiotemporal chaos with disorder* [10,11], в котором регуляризация изначально хаотической динамики цепочки осцилляторов достигается посредством неоднородного в пространстве разброса параметров осцилляторов цепочки. Очевидно, в этом случае система становится неоднородной. В отличие от этого, в описываемом нами случае сама система остается однородной, а пространственная неоднородность, которая и является первопричиной регуляризации динамики, формируется самосогласованным образом при соответствующем выборе начальных условий.

Второе замечание касается ограничения нашего рассмотрения предельной ситуацией, когда режимы хаотической синхронизации являются устойчивыми. Устойчивость достигается выбором большой крутизны функции связи D при нулевом аргументе. При уменьшении крутизны D синхронизация разрушается в первую очередь по отношению к длинноволновым возмущениям, так что пространственная упорядоченность сохраняется на достаточно больших расстояниях, динамика остается хаотической и, возможно, даже усложняется. Наряду с этим режимом, как и прежде, могут устойчиво существовать сильно неупорядоченные в пространстве режимы с более простой динамикой. Таким образом, качественное утверждение о наличии ОВП в рассматриваемых системах в отсутствие устойчивой хаотической синхронизации остается в силе, однако его конкретизация требует введения специальных количественных характеристик пространственно-временных паттернов, чему будет посвящено отдельное сообщение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 97-02-17526) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект 96-15-96593). Авторы признательны организаторам и участникам конференции Хаос-98 за интересные дискуссии.

Библиографический список

1. Рабинович М.И., Суцук М.М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // УФН. 1990. Т. 160, № 1. С.1.
2. Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Развитие хаоса в ансамблях динамических структур // ЖЭТФ. 1985. Т.89. С.92.
3. Чуа Л.О. Генезис схемы Чуа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, № 3-4. С. 4.
4. Chua's circuit: a paradigm for chaos. Singapore / Ed. Madan R.N. World Scientific. 1993.
5. Shilnikov L.P. Chua's Circuit: Rigorous results and future problems // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1994. Vol. 4, № 3. P. 489.
6. Кузнецов А.С. Динамика модифицированного осциллятора Чуа // Вестник ННГУ. Нелинейная динамика – Синхронизация и хаос. III. 1998.
7. Belykh V.N., Verichev N.N., Kocarev L., Chua L.O. On chaotic synchronization in a linear array of Chua's circuits // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2. P. 633.
8. Perez-Villar V., Munuzuri A.P., Munuzuri V., Chua L.O. Chaotic synchronization of a one-dimensional array of nonlinear active systems // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 4. P. 1067.
9. Venkatesan A., Lakshmanan M. Bifurcation and chaos in the double-well Duffing-Van der Pol oscillator: Numerical and analytical studies // Phys. Rev. E. 1997. Vol.56, № 6. P.6321.

10. Braiman Y., Lindner J.F., Ditto W.L. Taming spatiotemporal chaos with disorder // Nature. 1995. Vol. 378. P. 465.

11. Lindner J.F., Prusha B.S., Clay K.E. Optimal disorders for taming spatiotemporal chaos // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 231. P. 164.

*Институт прикладной физики РАН
Нижний Новгород*

Поступила в редакцию 29.12.98

DIRECT AND REVERSE RELATIONSHIP BETWEEN DISORDERED SPATIAL AND TEMPORAL PATTERNS IN ARRAYS OF CHAOTIC OSCILLATORS

L.L. Rubchinsky, M.M. Sushchik

An example of an array of identical Chua's circuits or identical Van der Pol – Duffing oscillators with external harmonic force is considered. It is established that, under nonlinear coupling, there occurs multistability at which the patterns that are more irregular in space possess simpler behaviour in time.



Рубчинский Леонид Львович – родился в 1974 году в Нижнем Новгороде. Окончил с отличием Нижегородский государственный университет (1995 бакалавр, 1997 магистр) и Калифорнийский университет, Сан Диего (1997 MS). В настоящее время аспирант Института прикладной физики РАН. Стипендиат Президента России и фонда Сороса. Область научных интересов – пространственно-временной хаос и структуры, синхронизация, нейронные сети, нелинейные динамические системы в биологии. Опубликовал ряд работ по вышеуказанным направлениям.

E-mail: leo@hale.appl.sci-nnov.ru