



МЕХАНИЗМЫ РАЗРУШЕНИЯ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ КУБИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В.В. Астахов, А.В. Шабунин, В.С. Анищенко

Исследуются бифуркационные механизмы разрушения режима синхронного хаоса. В работе приведены результаты численного эксперимента по изучению синхронизации хаоса в системе симметрично связанных кубических отображений. Показано, что разрушение режима синхронизации хаоса обуславливается бифуркациями основного семейства седловых периодических орбит, встроженных в хаотический аттрактор.

Введение

Вопросы хаотической синхронизации находятся в центре внимания многих исследователей. В последние годы появились работы, в которых изучаются характерные бифуркации, в результате которых разрушается режим синхронных колебаний [1–8]. Представляется, что сценарий выхода из режима синхронизации должен быть тесно связан с бифуркационным механизмом, приводящим к формированию хаотического аттрактора, соответствующего синхронному режиму. Одним из таких механизмов, реализующихся для большого числа систем, является каскад бифуркаций удвоения периода. Хаотический аттрактор, возникший на базе каскада субгармонических бифуркаций, содержит счетное множество седловых предельных циклов, формирующих «скелет» данного аттрактора. В работах по исследованию синхронизации в связанных логистических отображениях [7,8] было обнаружено, что десинхронизация хаоса в них обуславливается бифуркациями основного семейства седловых периодических орбит, на базе которых хаотический аттрактор был сформирован. Рассмотрение других динамических систем со сходным сценарием перехода к хаосу позволяет проследить общность выявленных закономерностей, а также различия, определяемые динамикой конкретной системы.

В случае режима полной хаотической синхронизации аттрактор, соответствующий синхронным колебаниям в системе двух связанных идентичных осцилляторов, располагается в симметричном подпространстве ($x_1=x_2$) полного фазового пространства системы, где x_1 и x_2 – векторы идентичных динамических переменных взаимодействующих подсистем. Если хаотическое множество является притягивающим в нормальном к симметричному подпространству направлении, то есть в том случае, когда старший ляпуновский показатель в этом направлении отрицателен, синхронные хаотические колебания будут наблюдаться в

эксперименте. При смене знака данного показателя на положительный, хаотический аттрактор перестает быть притягивающим в нормальном направлении и превращается в «хаотическое седло». Синхронные колебания теряют устойчивость и в эксперименте не наблюдаются. Возможен, однако, случай, когда знак старшего «нормального» показателя Ляпунова, усредненного по хаотическому аттрактору, отрицателен, а знак соответствующего показателя по одному или нескольким предельным циклам, встроенным в аттрактор, положителен. В этом случае синхронный режим остается устойчивым, но перестает быть грубым. Ничтожно малый шум или расстройка по параметрам может привести к «пузырению» аттрактора (bubbling attractor). Временная реализация, соответствующая разности колебаний в подсистемах x_1-x_2 , представляет собой перемежающийся процесс, когда изображающая точка длительное время движется в окрестности симметричного подпространства («ламинарная фаза») и время от времени хаотически отбрасывается в сторону от него («турбулентные всплески»). Пузырение аттрактора есть первый шаг на пути десинхронизации хаоса. Затем, при изменении управляющих параметров, все большее число встроенных предельных циклов могут терять устойчивость в нормальном к симметричному подпространству направлении, что усиливает явление пузырения и может привести к тому, что и усредненный по аттрактору нормальный ляпуновский показатель станет положительным. Данное явление называется «бифуркацией прорыва» (blowout bifurcation) [2]. За пузырением аттрактора может следовать явление «изрешечивания» бассейна притяжения хаотического аттрактора, когда в его сколь угодно малой окрестности появляются области, относящиеся к бассейну притяжения другого аттрактора. Наличие малого шума или расстройки по параметрам приведет к тому, что изображающая точка перейдет со временем на другой аттрактор. Процесс потери синхронизации в связанных логистических отображениях подробно описан в [9,7,8].

В настоящей работе проводится бифуркационный анализ системы связанных дискретных отображений и анализируется совокупность наблюдаемых явлений, сопровождающих эти бифуркации. В качестве исследуемой модели используется система двух идентичных связанных кубических отображений. Полученные результаты сравниваются с соответствующими результатами для других систем.

1. Исследуемая система

Рассмотрим связанные кубические отображения вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (a-1)x_n - ax_n^3 + \gamma[(a-1)y_n - ay_n^3 - (a-1)x_n + ax_n^3], \\ y_{n+1} &= (a-1)y_n - ay_n^3 + \gamma[(a-1)x_n - ax_n^3 - (a-1)y_n + ay_n^3], \end{aligned} \quad (1)$$

где a – параметр неравновесности парциальной системы, γ – коэффициент связи.

Одинокое кубическое отображение

$$x_{n+1} = (a-1)x_n - ax_n^3, \quad (2)$$

обладает симметрией относительно преобразования координат

$$I: x \leftrightarrow -x,$$

поэтому все его предельные множества либо самосимметричны относительно этого преобразования, либо имеют симметричные себе множества.

При любых значениях параметра a в системе существует неподвижная точка $x=0$ кратности 1. При $a < 2$ эта точка устойчива; при $a = 2$ ее мультипликатор $\mu = a - 1$ становится равным по модулю единице, в результате чего точка становится неустойчивой, и в ее окрестности рождается пара устойчивых неподвижных точек кратности 1, симметричных друг другу,

$$C_1: x = [(a-2)/a]^{1/2} \text{ и } C_2: x = -[(a-2)/a]^{1/2}.$$

С увеличением параметра a на базе каждой из точек C_1 и C_2 наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся при $a=3.3$ возникновением хаотических аттракторов. При $a=3.6$ они объединяются в один аттрактор.

Система связанных отображений наследует свойство симметрии одиночного отображения по отношению к преобразованию

$$I: x \leftrightarrow -x, \quad y \leftrightarrow -y,$$

а также вследствие симметричной связи и идентичности подсистем обладает симметрией по отношению к преобразованию

$$R: x \leftrightarrow y.$$

Поскольку I и R коммутируют друг с другом, их комбинация также является преобразованием симметрии для системы (1)

$$I \circ R: x \leftrightarrow -y, \quad y \leftrightarrow -x.$$

Следствием симметрии системы относительно преобразования R является возможность существования в ней синфазных синхронных колебаний, удовлетворяющих условию $x=y$. Следствием симметрии системы относительно преобразования $I \circ R$ является возможность существования в ней противофазных синхронных колебаний, удовлетворяющих условию $x=-y$.

2. Результаты бифуркационного анализа и численного эксперимента

В системе связанных отображений при изменении управляющего параметра a переход к хаосу происходит через каскад бифуркаций удвоения периода. В результате около точек $1C_1^0$ и $1C_2^0$ формируются хаотические аттракторы, соответствующие синхронному хаосу, которые располагаются в подпространстве $x=y$. На рис. 1 построены линии, соответствующие бифуркациям в симметричном подпространстве: $l_{01}, l_{02}, l_{03}, l_{04}$ — линия бифуркации удвоения периода для периодических орбит $C^0, 2C^0, 4C^0, 8C^0$, соответственно, в результате которых данные орбиты становятся седловыми и в их окрестности появляются устойчивые периодические орбиты удвоенного периода, также располагающиеся в симметричном подпространстве $x=y$. Для каждой из указанных бифуркаций старший мультипликатор орбиты становится равным -1 , а соответствующий ему собственный вектор матрицы линеаризации направлен тангенциально к симметричному подпространству. В непосредственной окрестности линии l_{04} происходит переход к синхронным хаотическим колебаниям. В закритической области, до линии l_{05} в симметричном подпространстве существуют многоленточные хаотические аттракторы $2^N A^0$, для которых наблюдаются бифуркации слияния лент. Выше линии l_{05} существует одноленточный хаотический аттрактор A^0 . На линии l_{06} происходит объединение хаотических множеств, сформированных на базе циклов C_1^0 и C_2^0 с образованием объединенного синхронного хаотического аттрактора. Расположение периодических орбит $C^0, 2C^0$ и $4C^0$ представлено на рис. 2 для значения параметров $a=3.65, \gamma=0.15$. Симметричное подпространство обозначено на этом рисунке штриховой линией. Рассмотрим теперь бифуркации, которые ведут к возникновению новых предельных множеств, располагающихся вне симметричного подпространства. На линии l_1 (см. рис. 1) седловая точка C^0 претерпевает бифуркацию удвоения периода по второму мультипликатору. Данный мультипликатор становится равным -1 , причем соответствующий ему собственный вектор направлен перпендикулярно к симметричному подпространству $x=y$. В результате неподвижная точка теряет

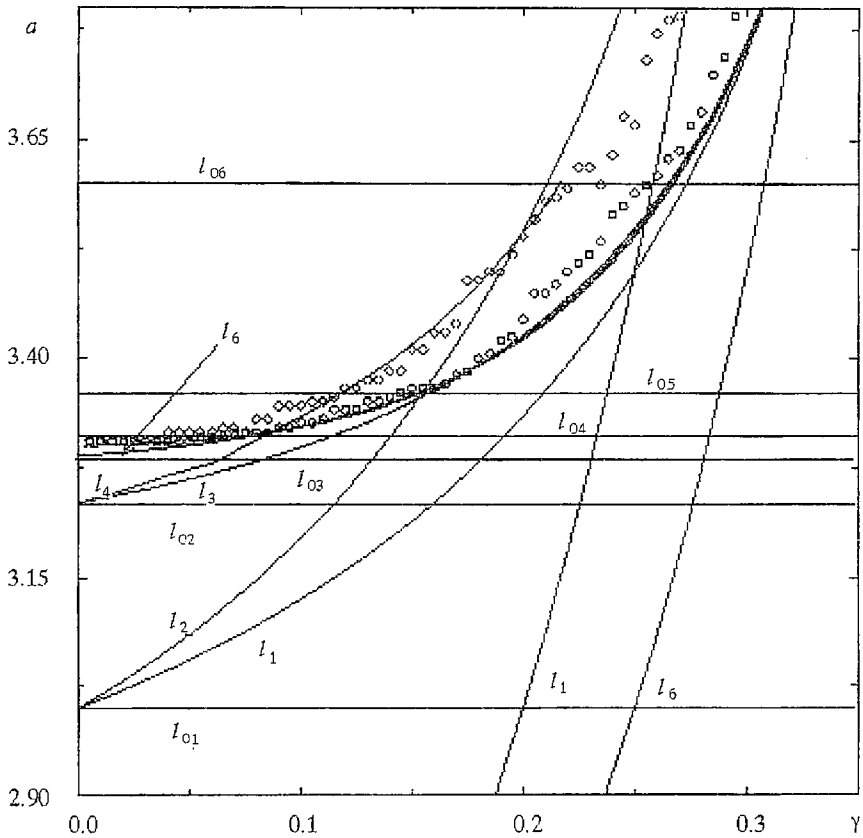


Рис. 1. Бифуркационные линии периодических орбит, а также экспериментально определенная граница области негрубой (o) и грубой (diamond) синхронизации хаоса на плоскости параметров γ - a

устойчивость по направлению, трансверсальному к симметричному подпространству, и становится репеллером, а около нее образуется седловая орбита удвоенного периода $2C^1$, располагающаяся вне симметричного подпространства (см. рис.2). На линии l_2 ее старший мультипликатор входит в единичную окружность через значение $+1$, в результате чего эта орбита становится устойчивой.

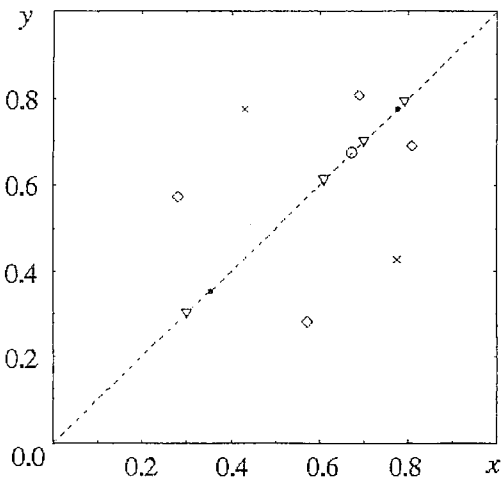


Рис. 2. Расположение периодических орбит, участвующих в разрушении синхронизации хаоса: C^0 (o), $2C^0$ (•), $4C^0$ (▽), $2C^1$ (*), $4C^2$ (diamond)

На линии l_3 бифуркация удвоения периода происходит для седловой орбиты $2C^0$. Второй мультипликатор орбиты становится равным -1 , в результате седло становится репеллером, а в его окрестности появляется седловая орбита $4C^2$ периода 4 (см. рис. 2), которая на линии l_4 становится устойчивой. На линиях l_4 и l_5 вторые бифуркации удвоения периода имеют место для орбит $4C^0$ и $8C^0$ с образованием около них седел $8C^4$ и $16C^8$, соответственно.

На линии l_6 неподвижная точка C^0 , расположенная в начале координат ($x=0, y=0$), теряет устойчивость (значения мультипликатора $+1$). В результате в

ее окрестности рождается пара неподвижных точек, C_1^- и C_2^- , симметричных друг другу относительно преобразования $x \leftrightarrow -y$, располагающихся в симметричном подпространстве $x = -y$. На линии l_7 данные неподвижные точки становятся устойчивыми.

Каждая бифуркация удвоения седловых периодических орбит $2^N C^0$, сопровождающаяся превращением их в репеллер, означает, что в хаотическом аттракторе A^0 появились точки локальной трансверсальной неустойчивости, траектории из которых при определенных возмущениях будут покидать симметричное подпространство. Для ряда систем было показано [2, 6, 7], что наличие таких «дефектов» в аттракторе приводит к явлению пузырения аттрактора. В этом случае режим синхронных колебаний становится негрубым. Добавление в систему сколь угодно малого шума, или неидентичность подсистем приводят к явлению перемежаемости, когда движение в симметричном подпространстве прерывается хаотическими выбросами изображающей точки в сторону от него.

Негрубость синхронного хаоса приводит к тому, что граница области синхронизации системы со сколь угодно малым шумом оказывается существенно сдвинутой на плоскости параметров относительно границы области синхронизации идеальной системы. В нашей работе проведены численные исследования по определению границы области синхронизации хаоса. В численном эксперименте синхронными полагались колебания, для которых временные реализации подсистем равны с точностью до ε во время всего интервала наблюдений:

$$\max |x_n - y_n| < \varepsilon, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N_{\text{набл.}}$$

Мы выбирали значение $\varepsilon = 0.0001$, $N_{\text{набл.}} = 2000000$ итераций. На рис. 1 кружочками обозначены границы области синхронизации. Правее нее в системе наблюдаются устойчивые синхронные хаотические колебания. Ниже линии l_{05} – это многоленточные хаотические аттракторы $2^N A^0$, между линиями l_{05} и l_{06} – одноленточный хаотический аттрактор A^0 , выше линии l_{06} – объединенный аттрактор, возникший в результате объединения множеств, образованных на базе точек C_1^0 и C_2^0 . Добавление в систему малого шумового воздействия интенсивностью порядка 0.00001 не приводит к десинхронизации (с точки зрения указанного выше экспериментального критерия).

Левее данной границы и правее границы, обозначенной на рис.1 квадратами, располагается область негрубого синхронного хаоса. При полном отсутствии шума наблюдается режим синхронного хаоса. Переходный процесс к этому режиму имеет вид перемежаемости, и его длительность чувствительным образом зависит от начальных условий. Добавление в систему сколь угодно малого шума (в эксперименте использовался шум интенсивностью приблизительно 10^{-5}) разрушает синхронный режим. В системе наблюдается так называемый пузыряющийся аттрактор (bubbling attractor). На рис. 3 представлен фазовый портрет хаотического аттрактора в системе без шума и с малым шумом, показана временная реализация, соответствующая пузыряющемуся аттрактору.

В области левее границы, обозначенной на рис.1 квадратами, синхронные колебания в системе не наблюдаются. Происходит переход на один из устойчивых режимов, существующих в системе при данных значениях параметра. Ниже точки пересечения линий l_2 и l_4 , то есть в том случае, когда при уменьшении связи первой становится устойчивой несинфазная орбита $2C^1$, происходит переход системы на этот режим. Выше точки пересечения и до линии l_{06} при потере синхронизации происходит переход на орбиту $4C^2$. Выше линии l_{06} , то есть в случае объединенного хаоса, потеря устойчивости синхронным режимом приводит к переходу на неподвижную точку C^- , расположенную в другом симметричном подпространстве $x = -y$.

Вблизи линии l_{03} наблюдается явление изрешеченности бассейна притяжения хаотического аттрактора A^0 . Оно заключается в том, что в непосредственной близости от самого аттрактора, в его область притяжения вклиниваются области

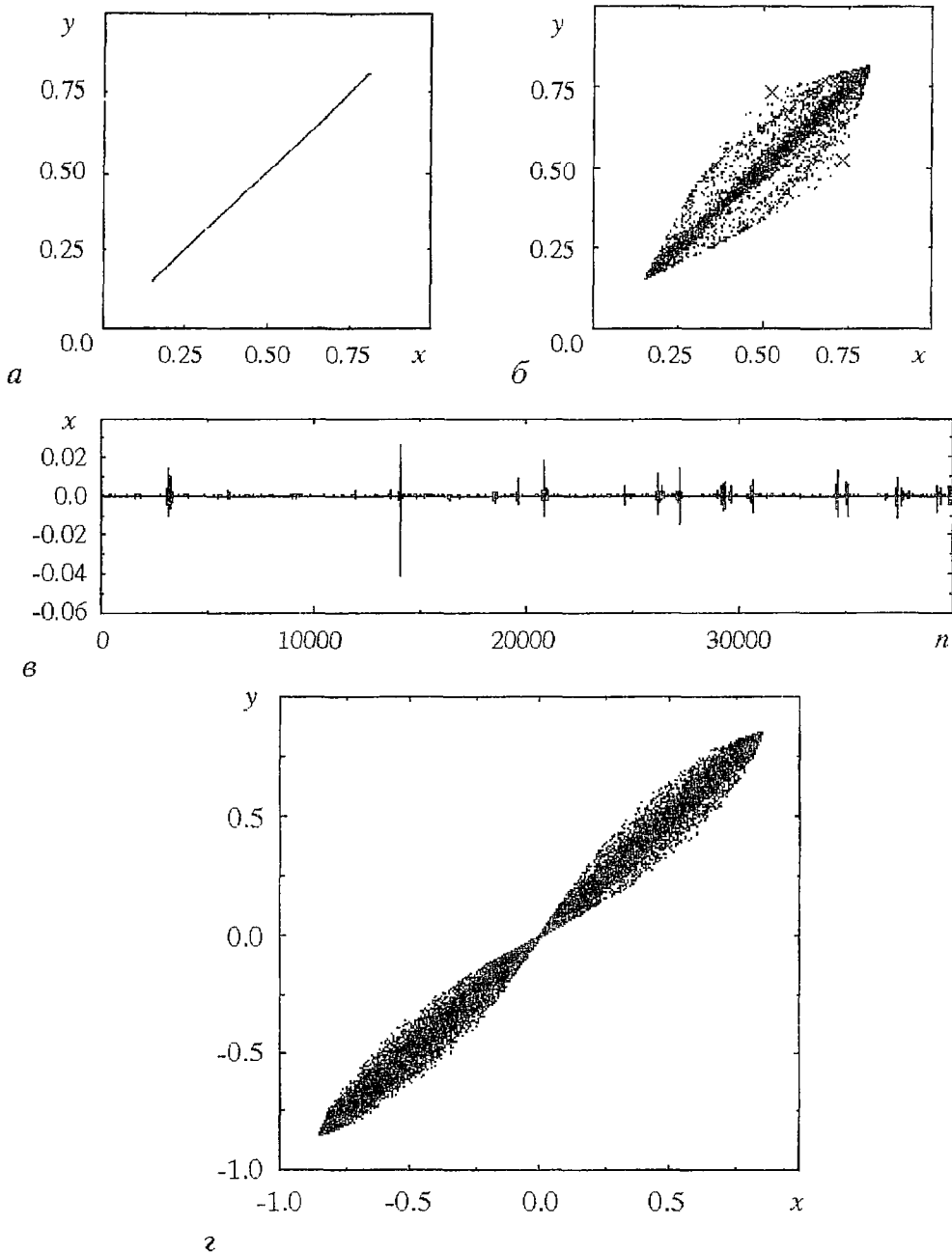


Рис. 3. Фазовый портрет хаотических колебаний в отсутствие шума (а), при наличии малого шума (б); временная реализация, соответствующая пузырящемуся аттрактору (в); фазовый портрет пузырящегося аттрактора в случае объединенного хаоса (г)

из бассейнов притяжения других аттракторов. На рис. 4 представлена область притяжения аттрактора A^0 , содержащая область притяжения периодической орбиты $2C^1$ (отмечена черным цветом). При добавлении в систему малого шума изображающая точка при любом выборе начальных условий из окрестности A^0 рано или поздно покидает окрестность симметричного подпространства и уходит на $2C^1$. Однако в этом случае вместо явления изрешеченности бассейна притяжения аттрактора A^0 наблюдается чувствительная зависимость длительности переходного процесса на аттрактор $2C^1$ от выбора начальных условий.

Естественно, что полученная картина областей полной синхронизации носит

грубый характер. В область существования хаотического аттрактора на плоскости параметров вклиниваются окна периодичности и области существования аттракторов, образованных на основе этих периодических режимов. Границы зон синхронизации для таких режимов будут существенно иными. В нашей работе мы намеренно не приводим данные результаты и ограничиваемся построением области полной синхронизации только для хаотических аттракторов, построенных на базе основного семейства циклов $2^N C^0$.

Сопоставление экспериментальных наблюдений и бифуркационных линий циклов, формирующих скелет аттрактора, позволяет проследить механизм разрушения хаотической синхронизации. В отличие от описанных в литературе случаев (см. например [6,7]), бифуркация седловой точки C^0 , в результате которой она становится репеллером, не приводит сразу к появлению в системе пузырящегося аттрактора. Пузырящееся поведение возникает при меньших значениях коэффициента связи после того, как соответствующие бифуркации удвоения периода претерпели остальные седловые орбиты из аттрактора A^0 : $2C^0$, $4C^0$, $8C^0$,.... В области объединенного хаоса, выше линии l_{06} наличие в аттракторе репеллера $C^{00}(0,0)$ также не вызывает в системе пузырящегося поведения. Оно появляется здесь также после бифуркаций остальных орбит. Таким образом, хотя внутри хаотического аттрактора появляются «дефектные точки», из которых траектории могут выбрасываться в сторону от симметричного подпространства, в эксперименте за конечное, хотя и продолжительное время наблюдения ($\sim 10^7$ итераций), подобные всплески не наблюдаются. Пузырящееся поведение появляется в системе уже после того, когда другие рассмотренные в работе орбиты $2^N C^0$ потеряли устойчивость в нормальном к симметричному подпространству направлении. Размеры образованного при введении шума малой интенсивности пузырящегося аттрактора определяются расположением точек седловой орбиты $2C^1$, которые расположены на его границе (на рис. 3, б точки орбиты $2C^1$ обозначены знаком \times). Это свидетельствует о том, что орбита $2C^1$ и ее многообразия играют существенную роль в формировании пузырящегося аттрактора. Дальнейшее уменьшение связи усиливает пузырение аттрактора, что проявляется в учащении всплесков $x_n - y_n$ и увеличении их «амплитуды». Последнее объясняется отходом, при уменьшении связи, точек орбиты $2C^1$ от симметричного подпространства. Учащение выбросов, по-видимому, связано с увеличением числа «дефектных точек» в аттракторе A^0 , что означает превращение в репеллеры все большего числа встроенных седловых орбит и уширение «кловов», опирающихся на эти орбиты, по которым траектория покидает симметричное подпространство. На рис. 5 построена зависимость «толщины» хаотического аттрактора (то есть

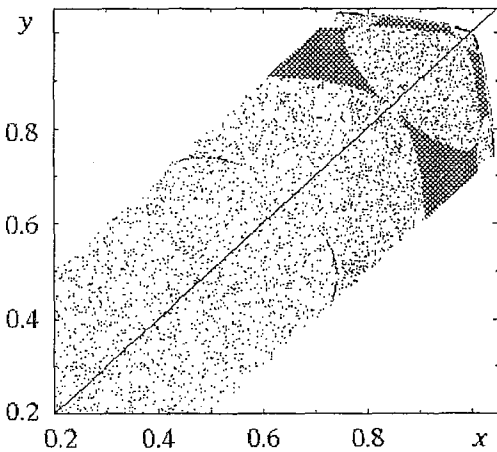


Рис. 4. Бассейны притяжения хаотического аттрактора, соответствующего синхронным колебаниям (белый цвет) и периодической орбиты $2C^1$ (черный цвет); $a=3.5$, $\gamma=0.17$

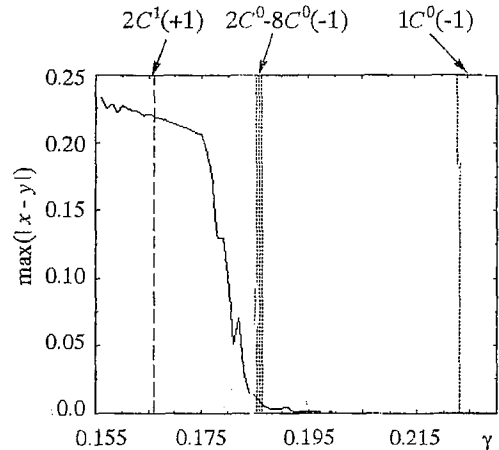


Рис. 5. Зависимость «толщины» хаотического аттрактора ($\max|x_n - y_n|$) от значения коэффициента связи; $a=3.4$

$\max(|x_n - y_n|)$ от коэффициента связи при значении параметра $a=3.4$. Колебания системы исследовались на очень длительном временном интервале ($\sim 10^7$ итераций). Из рисунка видно, что самое начало «пузырения» аттрактора возникает еще до бифуркаций седловых орбит $2C^0-8C^0$, однако данные бифуркации резко усиливают это явление.

Заключение

В работе рассмотрен бифуркационный механизм, лежащий в основе разрушения режима грубой синхронизации в системе связанных кубических отображений. Как и для других связанных систем с удвоениями периода, выход из режима синхронизации сопровождается пузырением аттрактора, а затем изрепечиванием его бассейна притяжения. Исследования системы связанных логистических отображений [7,8], а также настоящая работа свидетельствуют о том, что основную роль в разрушении синхронных колебаний играют бифуркации основного семейства седловых циклов, встроенных в хаотический аттрактор, то есть тех циклов, на основе которых данный аттрактор был сформирован. В дальнейшем разрушении режима синхронизации (изрепечивание бассейна притяжения) существенную роль играют бифуркации циклов, не содержащихся в хаотическом аттракторе, но появившихся в результате бифуркаций циклов основного семейства $2^N C^0$. В то же время, в отличие от других подобных систем, экспериментально наблюдаемый выход из режима синхронизации происходит при меньших значениях параметра связи, чем первая из бифуркаций седловых циклов аттрактора. Таким образом, существует некоторая «задержка» по параметру связи между бифуркациями, обуславливающими десинхронизацию в системе, и непосредственно наблюдаемыми явлениями. Причины, вызывающие такую задержку, требуют дальнейшего рассмотрения.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 98-02-16531).

Библиографический список

1. *Pikovsky A.S., Grassberger P.* Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors // *J. Phys. A: Math.* 1991. Vol. 24. P. 4587.
2. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* Bubbling of attractors and synchronisation of chaotic oscillators // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 193. P. 126.
3. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* From attractors to chaotic saddle: a tale of transverse instability // *Nonlinearity.* 1996. Vol. 9. P. 703.
4. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Venkataramani S.C.* Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77, № 1. P. 55.
5. *Pikovsky A., Osipov G., Rosenblum M., Zaks M., Kurths J.* Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 79, 1997.
6. *Sushchik M.M., Rulkov N.F., Abarbanel H.D.I.* Robustness and stability of synchronized chaos: an illustrative model // *IEEE Transactions on circuits and systems.* 1997. Vol. 44, № 10. P. 866.
7. *Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V.* Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79, № 6. P. 1014.
8. *Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V.* Effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58, № 5. P. 5620.
9. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, № 10-12. С. 1079.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 4.03.99
после переработки 17.05.99

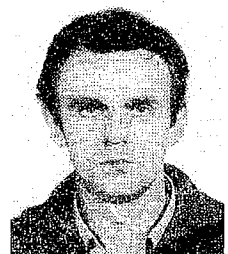
MECHANISMS OF CHAOTIC SYNCHRONIZATION LOSS IN THE SYSTEM OF COUPLED CUBIC MAPS

V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, V.S. Anishchenko

Bifurcational mechanisms of chaotic synchronization loss are investigated in the paper. We demonstrate numerical experiments results of investigation of chaos synchronization in the system of the symmetrically coupled cubic maps. We show that loss of the chaotic synchronization is conditioned by bifurcations of the main family of saddle periodic orbits embedded in the chaotic attractor.



Астахов Владимир Владимирович окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил кандидатскую (1983) и докторскую диссертацию (1999). Работает доцентом кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 50 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



Шабунин Алексей Владимирович родился в Саратове (1966). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности радиофизика (1990). Защитил кандидатскую диссертацию (1998) по синхронизации и управлению хаосом в связанных колебательных системах. Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос. Автор 18 опубликованных работ.



Анищенко Вадим Семенович защитил диссертацию на степень кандидата физико–математических наук (1970) и докторскую диссертацию «Механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы» (1986). С 1979 и по настоящее время работает в области исследований динамического хаоса. С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики Саратовского университета. Автор более 200 научных работ, среди которых 7 монографий и 3 учебника по статистической радиофизике. Читает общие курсы лекций по статистической радиофизике, теории колебаний и теории информации и ряд спецкурсов, из которых наиболее важные: устойчивость и бифуркации динамических систем, детерминированный хаос, специальные проблемы нелинейной динамики. Под его руководством успешно защищены 15 кандидатских и 2 докторских диссертации. В настоящее время готовят свои работы два докторанта кафедры радиофизики, у которых он является научным консультантом. Соросовский профессор (1994). Заслуженный деятель науки РФ (1995). Член редколлегии журналов «Прикладная нелинейная динамика» и «Discrete Dynamics in Nature and Society».