НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ СОЛИТОНЫ

Изв.вузов «ПНД», т.7, № 2,3, 1999 УДК 534.222:539.3:532.5

ТОЧНОЕ СОЛИТОНОПОДОБНОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

А.И. Землянухин

Исследовано неинтегрируемое эволюционное уравнение пятого порядка, моделирующее волновой процесс в нелинейно-упругой диспергирующей среде с моментными напряжениями. Показано, что рассматриваемое уравнение имеет преобразование Бэклунда, позволяющее получить точное решение в виде уединенной волны.

Хорошо известно, что в деформируемых системах возможно распространение солитонов деформации [1]. Продольные волны, изученные наиболее полно, обычно анализируются на основе уравнений Кортевега де Вриза и модифицированного уравнения Кортевега де Вриза. Эти солитонные уравнения моделируют волновой процесс в упругих и нелинейно-упругих конструкциях, соответственно [2]. Совместный учет геометрической и физической нелинейностей приводит к эволюционному уравнению вида

$$U_t + c_1 U U_x - c_2 U^2 U_x + c_3 U_{xxx} = 0\ , \tag{1}$$

где c_1, c_2, c_3 – коэффициенты, характеризующие нелинейность и дисперсию системы, U – компонента продольной деформации.

Интегрируемые модели являются идеализированными. Стремление к большей адекватности при описании волновых явлений приводит к необходимости исследования неинтегрируемых уравнений, точные решения которых зачастую не известны. В данной работе анализируется нелинейное эволюционное уравнение пятого порядка, возникающее в динамических задачах механики деформируемого твердого тела. При анализе композиционных и конструктивно неоднородных материалов существенным может оказаться вклад моментных напряжений в волновой процесс. Это возможно, если жесткость включений значительно превосходит жесткость материала конструкции. В случае, когда модель системы основывается на гипотезах Кирхгофа [3], в уравнении (1) появляется дополнительный член с пятой производной

$$U_t + c_1 U U_x - c_2 U^2 U_x + c_3 U_{xxx} + c_4 U_{xxxxx} = 0\ , \tag{2}$$

где c_4 – коэффициент, учитывающий влияние моментных напряжений.

Если в уравнении (2) c_2=0, то получается уравнение Кавахары, описывающее течение жидкости под ледяным покровом, магнитоакустические волны в плазме и т.д. Это уравнение имеет точные решения в виде периодических и уединенных волн [4]. В литературе по нелинейным волнам уравнение (2) не упоминается.

Для решения уравнения (2) будем использовать «метод синлярного многообразия», предложенный в [5] и используемый в [4,6]. Данный метод связывает свойство Пенлеве дифференциального уравнения в частных производных [7] с возможностью представления решения в виде ряда в окрестности многообразия, на котором лежат все сингулярности рассматриваемого уравнения. В случае интегрируемых уравнений этот метод позволяет получать преобразования Бэклунда, пары Лакса и точные решения. Для неинтегрируемых уравнений в ряде случаев удается найти форму преобразования решений (нестандартное преобразование Бэклунда) и построить классы точных решений.

Метод сингулярного многообразия обладает рядом преимуществ по сравнению с прямыми методами построения солитонных решений (метод Хироты [7]). Основная проблема прямых методов состоит в отсутствии систематической процедуры вывода той или иной формы преобразования зависимой переменной, необходимой для приведения исходного уравнения к билинейной форме. Более того, даже в случае успеха, прямые методы не позволяют выявить физически важные классы точных решений, кроме солитонных.

Решение уравнения (2) представим в форме ряда [4–6]

$$U = \Sigma_0^{\infty} U_j F^{j-2}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим цепочку равенств:

$$U_0 = \pm\, 6(10c_4/c_2)^{1/2} F_x^2, \qquad (4)$$

$$U_1 = \mp 6(10c_4/c_2)^{1/2} F_{xx}, \qquad (5)$$

$$U_2 = \pm\, 2(10c_4/c_2)^{1/2} F_{xxx}/F_x \mp {}^3/_2(10c_4/c_2)^{1/2} F_{xx}^2/F_x^2 \pm c_3/(10c_2c_4)^{1/2} + c_1/(2c_2). \qquad (6)$$

Отметим, что U_2, согласно (3), удовлетворяет (2), то есть

$$U_{2t} + c_1U_2U_{2x} - c_2U_2^2U_{2x} + c_3U_{2xxx} + c_4U_{2xxxxx} = 0.$$

Полагая U_j=0 для $j\geq3$, получаем преобразование Бэклунда решений уравнения (2) в форме

$$U = \mp 6(10c_4/c_2)^{1/2}\,\partial^2/\partial x^2(\ln F) + U_2. \qquad (7)$$

Функция F должна удовлетворять переопределенной системе нелинейных уравнений, первые из которых имеют вид (остальные не приводим ввиду их громоздкости)

$$F_{xxxx}/F_x - 4F_{xxx}F_{xx}/F_x^2 + 3\,F_{xx}^3/F_x^3 = 0, \qquad (8)$$

$$F_t/F_x + {}^{135}/_2c_4F_{xx}^4/F_x^4 + 15c_4F_{xxx}F_{xx}^2/F_x^3 - 15c_4F_{xxxx}F_{xx}/F_x^2 + 21c_4F_{xxxxx}/F_x -$$

$$-90c_4F_{xxx}^2/F_x^2 + {}^1/_4c_1^2/c_2 - {}^1/_{10}c_3^2/c_4 = 0. \qquad (9)$$

Выбирая F в виде F=1+exp($k_1x-\omega_1t$), находим, что (8), (9) и остальные уравнения системы удовлетворяются тождественно, если зависимость ω_1 от k_1 имеет вид

$$\omega_1 = ({}^1/_4c_1^2/c_2 - {}^1/_{10}c_3^2/c_4)k_1 - {}^3/_2c_4k_1^5. \qquad (10)$$

С помощью (7) можно получить точное солитоноподобное решение уравнения (2). Для этого нужно подставить в (7) F=1+exp($k_1x-\omega_1t$) и положить U_2=0. Из (6) определяется

$$k_1^2 = \mp c_1/(10c_2c_4)^{1/2} - c_3/(5c_4), \qquad (11)$$

Выберем для определенности в (11) нижний знак. Тогда при выполнении соотношения (10) получается искомое точное решение в виде уединенной волны

$$U = (3k_1^2/2)(10c_4/c_2)^{1/2}\mathrm{sech}^2\xi, \quad \xi = (k_1x - \omega_1 t)/2. \qquad (12)$$

Ясно, что физически достоверному решению соответствует положительная правая часть равенства (11). Например, при $c_1=\ldots=c_4=1$, k_1 и ω_1 – положительны.

Заметим, что с учетом (11), соотношение (10), связывающее скорость волны с ее характерной шириной, принимает вид

$$\omega_1 = c_3k_1^3 + c_4k_1^5.$$

Последнее соотношение свидетельствует о том, что уединенная волна (12) распространяется быстрее линейных волн.

Преобразование (7) имеет стандартный вид для потенциала задачи рассеяния уравнения Кортевега – де Вриза [7]. С точки зрения группового анализа, правая часть (7) при $U_2=0$ представляет собой второй дифференциальный инвариант оператора растяжения $F\partial_F$, трансформирующий линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка в уравнение Риккати [8].

Пространственно–двумерный аналог уравнения (2) имеет вид

$$\partial/\partial x[U_t + c_1UU_x - c_2UU_x^2 + c_3U_{xxx} + c_4U_{xxxxx}] = c_5U_{yy}. \qquad (13)$$

Уравнение (13) также допускает преобразование решений вида (7) с функцией $F=1+\exp(k_1x+k_2y-\omega_1t)$. В этом случае k_1 определяется из выражения (11), а зависимость ω_1 от k_1 и k_2 имеет вид

$$\omega_1 = ({}^1/_4c_1^2/c_2 - {}^1/_{10}c_3^2/c_4)k_1 - {}^3/_2c_4k_1^5 - c_5k_2^2/k_1.$$

Точное солитоноподобное решение уравнения (13) имеет вид, совпадающий с (12):

$$U = (3k_1^2/2)(10c_4/c_2)^{1/2}\mathrm{sech}^2\eta, \quad \eta = (k_1x + k_2y - \omega_1t)/2.$$

Проведенный анализ показал, что уравнение (2), несмотря на неинтегрируемость, обладает преобразованием Бэклунда и точным решением в виде уединенной волны. Таким образом, в нелинейно–упругих диспергирующих средах с моментными напряжениями возможно образование и распространение локализованных возмущений.

Библиографический список

1. *Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К.* Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981.
2. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелининейная динамика. 1995. Т.3, № 1. С. 52.
3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
4. *Кудряшов Н.А.* Точные решения нелинейных волновых уравнений, встречающихся в механике // ПММ. 1990. Т. 54, вып.3. С. 450.
5. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painleve property for partial differential equations // J. Math. Phys. 1983. Vol. 24, № 3. P. 522.
6. *Kudryashov N., Zargaryan E.* Solitary waves in active–dissipative media // J. Phys. A. 1996. Vol. 29, № 4. P. 8067.
7. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

8. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

Саратовский государственный технический университет

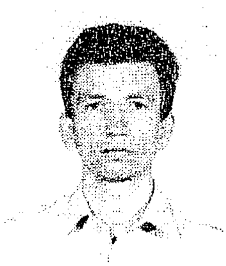
Поступила в редакцию 14.01.99
после переработки 26.03.99

EXACT SOLITON-LIKE SOLUTION OF THE FIFTH-ORDER NONLINEAR EVOLUTION EQUATION

A.I. Zemlyanukhin

Non-integrable fifth-order evolution equation, modelling wave process in nonlinear elastic dispersive media with moment stresses is investigated.

The Bäcklund transformation and exact soliton – like solution are obtained for this equation.



Землянухин Александр Исаевич – родился в 1967 году в Саратове. Окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета (1989) по специальности «механика». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1995). С 1996 года докторант СГТУ. Подготовил к защите диссертацию на тему: «Моделирование волновых процессов в цилиндрических оболочках и нелинейные эволюционные уравнения». Область научных интересов – нелинейная волновая динамика деформируемых систем, качественные методы исследования нелинейных уравнений в частных производных, групповой анализ дифференциальных уравнений. Имеет 25 публикаций и монографию «Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция» (СГТУ, 1999, совместно с Л.И. Могилевичем).