Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв.вузов «ПНД», т.7, № 4, 1999 УДК 621.37:537.867:530.182

КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ ПОСТОЯННОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Ю.А. Брюханов

Исследована динамика рекурсивных цепей первого порядка без учета эффектов квантования с двумя видами нелинейности сумматора: с насыщением и с переполнением. Определены границы линейного режима. Для нелинейности с переполнением установлена связь между периодом паразитных колебаний, параметром цепи и величиной внешнего воздействия. Найден диапазон начальных условий возникновения паразитных колебаний.

Цифровые цепи первого порядка используются в современных системах передачи информации для последетекторной обработки сигналов. На их базе реализуются фильтры нижних и верхних частот [1]. В качестве носителя информации часто используется прямоугольный импульс. Поэтому практически важными являются ранее не рассматриваемые вопросы исследования колебательных режимов при постоянном внешнем воздействии с учетом реально существующей нелинейной характеристики сумматора.

Колебания в такой цепи описываются разностным уравнением

$$x(n+1) = f\,[ax(n)+A],$$

где функция f – характеристика сумматора, a – параметр цепи, A – величина внешнего воздействия. Введем $y(n)=x(n+1)$. Разностному уравнению соответствует функция последования

$$y = f\,[ax+A].$$

Линейный режим

В цепи первого порядка состояние равновесия (то есть установившийся сигнал на ее выходе) на фазовой плоскости (x,y) находится как ордината (абсцисса) точки пересечения биссектрисы $y=x$ и функции последования [2]. В линейном режиме эти координаты выражаются зависимостью

$$X = Y = A/(1-a).$$

Полагая $|X|\le 1$, $|Y|\le 1$ (что характерно для использования арифметики с фиксированной запятой и чисел, выравненных слева [3]), и учитывая условие

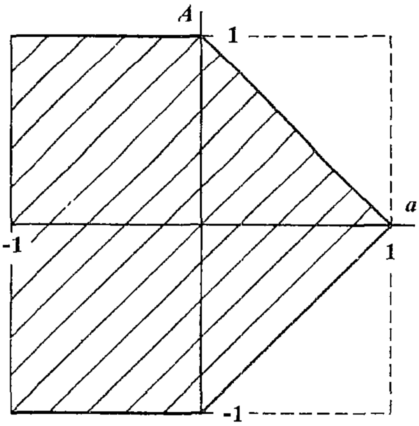

Рис. 1. Область линейного режима

устойчивости линейной цепи $|a|<1$, получим границы линейного режима

$$|A| \le 1-a.$$

Поскольку $|A|\le 1$, то линейный режим существует в заштрихованной области на рис. 1. При использовании цепи в качестве фильтра нижних частот ($a>0$) область линейного режима составляет лишь половину всей области допустимых значений a, A.

Определим длительность переходных процессов при включении и выключении постоянного воздействия. В линейном режиме колебания описываются уравнением

$$x(n+1) = ax(n) + A, \tag{1}$$

решением которого является функция

$$x(n) = [x(0) - A/(1-a)]a^n + A/(1-a).$$

Задавая критерий окончания переходного режима при включении воздействия в виде [4]

$$|x(N_1)-X| = 0.1|X|,$$

определим длительность процесса включения при $x(0)=0$ как ближайшее сверху целое число к величине

$$N_1 \approx -2.3/\ln|a|.$$

При выключении воздействия в цепи устанавливается линейный режим. В качестве критерия окончания переходного режима выбирается условие

$$|x(N_2)| = 0.1|X|.$$

Длительность процесса выключения равна ближайшему сверху целому числу к величине $N_2=N_1$.

Сумматор с насыщением

Характеристика сумматора с насыщением описывается функцией [5]

$$f(\varphi) = \begin{cases} \varphi, & |\varphi| < 1, \\ \mathrm{sign}\varphi, & |\varphi| \ge 1. \end{cases}$$

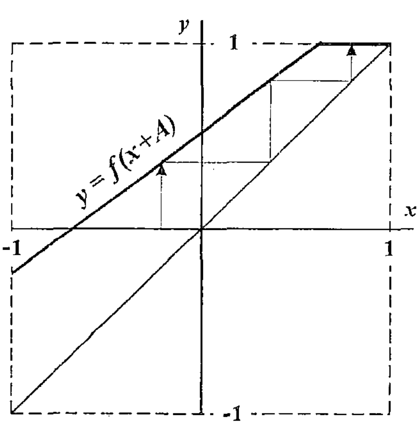

Рис. 2. Диаграмма Кенигса – Ламерея для отображения с нелинейностью с насыщением

Здесь и ниже полагается $a>0$. Пример диаграммы Кенигса – Ламерея в нелинейном режиме при $A>0$ показан на рис. 2. После включения воздействия в цепи существует линейный режим до достижения $|y|=1$. Длительность этого режима находится из решения уравнения (1) для $|x(n+1)|=|y(n)|=1$ и при $x(0)=0$ является ближайшим снизу целым числом к величине

$$N_3 = \ln[1 - (\mathrm{sign}A)/X]/\ln a - 1,$$

а полная длительность переходного процесса на две единицы больше.

Сумматор с переполнением

При использовании арифметики с фиксированной запятой, выравненных слева чисел, представлении отрицательных чисел в дополнительном коде характеристика сумматора выражается зависимостью

$$f(\varphi) = (\varphi + 1)\mathrm{mod}2 - 1.$$

Диаграмма Кенигса – Ламерея для такого вида отображения показана на рис. 3. Заметим, что длительность линейного режима при $x(0)=0$ и здесь равна N_3. Принципиальным отличием от предыдущего случая является допустимость возникновения паразитных периодических колебаний. Установим связь между периодом T таких колебаний, параметром a и величиной внешнего воздействия A.

Возникающий периодический процесс описывается линейным разностным уравнением

$$x(n+1) = ax(n) + A + x_1(n). \qquad (2)$$

При этом функция $x_1(n)$ удовлетворяет уравнению

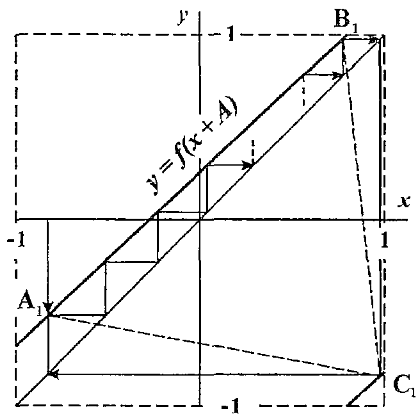

Рис. 3. Диаграмма Кенигса – Ламерея для отображения с нелинейностью и с переполнением

$$x_1(n+T) = x_1(n)$$

с начальными условиями $x_1(0)=x_1(1)=...=x_1(T-2)=0$, $x_1(T-1)=-2$. Выполнив z–преобразование обеих частей этого уравнения, получим изображение $X_1(z)$, оригиналом которого является функция

$$x_1(n) = -\Sigma_{i=0}^{T-1} X_i z_i^n, \qquad (3)$$

где $X_i=2/\Pi_{r=0, r\neq i}^{T-1} (z_i-z_r)$, $z_i=\exp(j2\pi i/T)$, $j=(-1)^{1/2}$.

Подставив (3) в уравнение (2) и решив его, получим

$$x(n) = [x(0) - A/(1-a) + \Sigma_{i=0}^{T-1} X_i/(z_i - 1)]a^n + A/(1-a) - \Sigma_{i=0}^{T-1} X_i z_i^n/(z_i - a).$$

Поскольку $a<1$, в установившемся режиме имеем

$$x^*(n) = \lim_{n\to\infty} x(n) = A/(1-a) - \Sigma_{i=0}^{T-1} X_i z_i^n/(z_i - a).$$

Полученное выражение позволяет определить область параметров a, A, соответствующую конкретному значению периода T. При $A>0$ нижняя граница этой области находится из соотношения

$$x^*(0) \geq -1, \qquad (4)$$

а верхняя граница – из соотношения

$$x^*(T-1) < 1. \qquad (5)$$

Возможен и другой подход к описанию установившегося режима с периодом колебаний T. Из рис. 3 видно, что в таком режиме траектория на фазовой плоскости имеет вид инвариантного треугольника $A_1B_1C_1$. При этом должно выполняться равенство

$$x^*(T) = x^*(0),$$

где $x^*(T)=ax^*(T-1)+A-2$, $x^*(T-1)=a^{T-1}x^*(0)+A\sum_{i=0}^{T-2} a^i$. Отсюда получаем

$$x^*(0) = [A\sum_{i=0}^{T-1} a^i-2]/(1-a^T),$$

$$x^*(T-1) = [A\sum_{i=0}^{T-1} a^i-2a^{T-1}]/(1-a^T).$$

Это позволяет преобразовать условия (4), (5) к виду

$$A \ge (1+a^T)/\sum_{i=0}^{T-1} a^i, \quad A < (1-a^T+2a^{T-1})/\sum_{i=0}^{T-1} a^i,$$

соответственно. На рис. 4 показаны области параметров a, A для $T\in\{2, 3, 4, 5\}$.

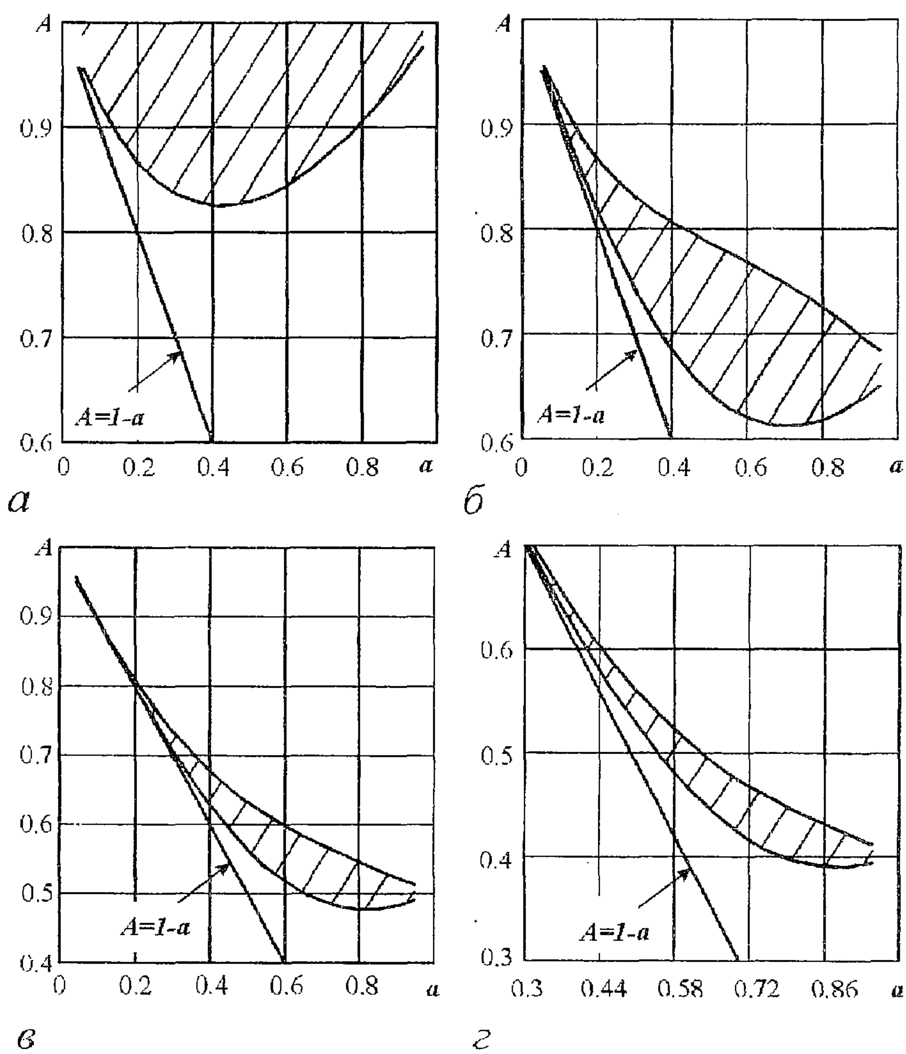

Рис. 4. Области существования паразитных периодических колебаний: *а* – T=2, *б* – T=3, *в* – T=4, *г* – T=5

Соотношения (4), (5) позволяют определить и диапазон начальных условий $x^*(0)$, когда возможны колебания с периодом T. Эти условия выражаются зависимостью

$$-1 \leq x^*(0) < \left(1 - A\sum_{i=0}^{T-2} a^i\right)/a^{T-1}.$$

Заключение

Исследованы колебания в рекурсивных цифровых цепях первого порядка с нелинейностью насыщения и с переполнением при постоянном внешнем воздействии. Определены области существования линейного и нелинейного режимов. Получены выражения для расчета длительности переходных процессов при включении и выключении воздействия в линейном и нелинейном с насыщением режимах.

Показано, что в цепях с нелинейностью переполнения могут существовать паразитные колебания с произвольным периодом. Определены области существования таких колебаний и диапазон начальных условий. Результаты могут быть использованы при создании систем передачи информации с цифровой обработкой сигналов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99–02–17939).

Библиографический список

1. *Брюханов Ю.А.* Частотные свойства цифровых цепей первого порядка // РЭ. 1996. № 11. С. 37.

2. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.

3. *Каппелини В. Константинидис А.Дж., Эмилиани П.* Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.

4. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1988.

5. *Брюханов Ю.А.* Переходные процессы в рекурсивной цифровой системе второго порядка с нелинейностью насыщения// Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т.6, № 2. С. 28.

Ярославский государственный университет

Поступила в редакцию 6.04.99
после переработки 9.06.99

OSCILLATIONS IN FIRST–ORDER NON–LINEAR RECURSIVE DIGITAL CIRCUITS UNDER CONSTANT EXTERNAL INFLUENCE

Yu.A. Bryuhanov

Dynamics of first–order recursive circuits without quantization effects is investigated. Filter adder has characteristic of two types: saturation and overflow. Linear regime boundaries are determined. Relation of magnitude of external influence, parasitic oscillations period and circuit parameter is determined. Range of initial conditions of parasitic oscillation origin is retrieved.

Брюханов Юрий Александрович – родился в 1941 году в Красноярске, окончил Красноярский политехнический институт (1967) и аспирантуру Воронежского государственного университета (1970). С 1971 года работает в Ярославском государственном университете, в настоящее время заведует кафедрой динамики электронных систем. Защитил кандидатскую диссертацию (1971) и докторскую диссертацию (1989) в области применения теории колебаний в задачах радиофизики и электроники. Область научных интересов – нелинейная динамика электронных систем дискретного времени. Автор монографии «Управление динамическим режимом колебательных систем» и более 180 статей. Заслуженный деятель науки РФ.

В Издательстве ГосУНЦ «Колледж» вышли в свет учебно-методические пособия для студентов физических факультетов

Бугаевский М.Ю., Пономаренко В.И. Исследование поведения цепи Чуа. 29 с. Цена 10 р.

Короновский А.А., Безручко Б.П., Храмов А.Е. Тесты по физике на каждую неделю. Механика. 60 с. Цена 15 руб.

Безручко Б.П., Прохоров Н.Д., Селезнев Е.П. Нелинейный электрический маятник. 32 с. Цена 10 руб.

Беспятов А.Б., Пономаренко В.И. Сложная динамика схемы на переключаемых конденсаторах. 26 с. Цена 10 руб.

Короновский А.А., Пономаренко В.И. Модель генератора с туннельным диодом. 18 с. Цена 10 руб.

Заинтересованный читатель может получить пособие наложенным платежом. Цены учитывают почтовые расходы.

Заказы направляйте по адресу:

410601, Саратов, Главпочтамт, а/я 3150, Лёвиной Н.Н.

или по электронной почте

E–mail: and@cas.ssu.runnet.ru