



## НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ МИНДЛИНА – ГЕРМАНА

*В.И. Ерофеев, Н.В. Клюева, Н.П. Семерикова*

Рассматривается нелинейная математическая модель, описывающая продольные колебания стержня с учетом сдвиговых деформаций и поперечных движений частиц срединной линии (нелинейное обобщение модели Миндлина – Германа). Изучаются особенности распространения нелинейных стационарных волн деформации: периодических волн и солитонов. Получены зависимости между основными параметрами таких волн – амплитудой волны, длиной волны, скоростью ее распространения и коэффициентом нелинейных искажений формы волны. Показано, что наряду с классическим поведением солитонов (волна большей амплитуды имеет меньшую ширину и распространяется с большей скоростью), может наблюдаться и их аномальное поведение (амплитуда волны уменьшается с ростом скорости).

### О приведении трехмерных уравнений теории упругости к одномерным уравнениям теории стержней

Идея приведения трехмерных уравнений теории упругости к одномерным уравнениям теории стержней заключается в выражении напряженного и деформированного состояний в произвольной точке тела через новые величины, заданные вдоль оси стержня [1]. Полученные уравнения для этих новых переменных и будут уравнениями, описывающими статику или динамику стержня. Одномерные модели пригодны для изучения динамических процессов в случаях, когда поперечные размеры стержня малы по сравнению с характерной длиной распространяющейся волны. Деформации в поперечных сечениях стержня можно считать квазистатическими и искать распределение перемещений по сечению на основе решения соответствующей статической задачи при том или ином типе нагружения (растяжение, кручение, изгиб или их комбинации).

Классическая модель Д. Бернулли (техническая теория) предполагает, что при описании продольных колебаний стержня можно пренебречь потенциальной энергией сдвиговых деформаций и кинетической энергией поперечных движений частиц стержня. Согласно этой теории в линейном приближении волны в стержне распространяются со скоростью  $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$  (где  $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – плотность материала), не зависящей от частоты. Следовательно, сделанные предположения не позволяют описать геометрическую дисперсию продольных волн, наблюдаемую экспериментально [2,3].

Математические модели, предложенные Релеем и Лявом, Бишопом, Миндлиным и Германом (уточненные теории) [1–3], устраняют этот недостаток. Из одномерных моделей дисперсию продольных волн в широкополосном диапазоне наиболее точно описывает модель Миндлина – Германа.

## Вывод нелинейных уравнений Миндлина – Германа

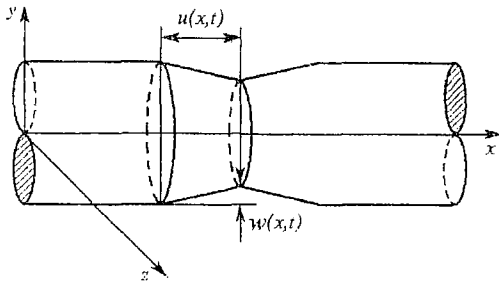


Рис. 1. Распределение смещений при продольных колебаниях стержня с учетом поперечного сжатия продольных волокон

где  $u_1(x,y,z,t)$  – компонента вектора перемещения произвольной точки объема,  $u(x,t)$  – продольное перемещение частиц срединной линии стержня;

- поперечные напряжения равны нулю

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0. \quad (2)$$

Для описания движения частиц стержня в поперечном направлении вводится функция  $w(x,t)$ , через которую выражаются перемещения  $u_2$  и  $u_3$ ,

$$\begin{aligned} u_1(x,y,z,t) &= u(x,t), \\ u_2(x,y,z,t) &= (y/r)w(x,t), \\ u_3(x,y,z,t) &= (z/r)w(x,t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $r$  – радиус поперечного сечения стержня.

Заметим, что в данной модели гипотеза Пуассона об одноосном деформированном состоянии ( $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu\epsilon_{11}$ , где  $\epsilon_{ij}$  – компоненты линейризованного тензора деформаций,  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала) может и не выполняться, поэтому  $w$  является независимой переменной.

При выводе нелинейных уравнений Миндлина – Германа делаются такие же предположения о смещениях стержня, как и при выводе линейной модели. Схема вывода уравнений динамики стержня предложена в [4]. Вывод уравнений динамики может быть произведен из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского с помощью функции Лагранжа  $L = W_K - W_{\Pi}$ . Для этого следует вычислить плотности кинетической и потенциальной энергий. Объемная плотность кинетической энергии равна

$$T = \sum_{i=1}^3 1/2 \rho (\partial v_i / \partial t)^2, \quad (4)$$

где  $\rho$  – объемная плотность среды.

Потенциальная энергия упругого тела при адиабатических процессах определяется лишь работой, производимой силами внутренних напряжений и, следовательно, равна его внутренней энергии. Внутреннюю энергию  $\rho U$  элемента объема представим в виде разложения по инвариантам тензора деформаций с точностью до кубических членов включительно (материал Мурнагана)

$$\rho U = (\lambda/2)I_1^2 + \mu I_2 + (\nu_1/6)I_1^3 + \nu_2 I_1 I_2 + 4/3 \nu_3 I_3, \quad (5)$$

где  $\lambda, \mu$  – постоянные второго порядка (константы Ламэ);  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  – константы упругости третьего порядка;  $I_1 = \epsilon_{ii}$ ;  $I_2 = \epsilon_{ij}\epsilon_{ji}$ ;  $I_3 = \epsilon_{kj}\epsilon_{ji}\epsilon_{ik}$ .

Компоненты тензора деформаций ( $\epsilon_{ik}$ ) выражаются через компоненты вектора перемещений ( $v_i$ ) следующим образом:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right), \quad (6)$$

где  $i, k = 1, 2, 3$ , а по индексу  $l$  производится суммирование.

Для получения погонной плотности функции Лагранжа  $L$  необходимо проинтегрировать объемные плотности кинетической и потенциальной энергий по площади поперечного сечения стержня  $F$ . Уравнения динамики стержня могут быть получены из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского

$$\delta I = \delta \int_0^l \int_F [\rho/2 (\partial \bar{v}/\partial t)^2 - U] dF dx dt = 0, \quad (7)$$

где  $I$  – функционал действия по Гамильтону,  $\delta I$  – его первая вариация. Компоненты тензора деформаций в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{y^2+z^2}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= \frac{w}{r} + \frac{w^2}{2r^2}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{y}{2r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{y}{2r^2} w \frac{\partial w}{\partial x}, & \varepsilon_{13} &= \frac{z}{2r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{z}{2r^2} w \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8)$$

Кинетическая энергия  $W_K$  и потенциальная энергия  $W_{\Pi}$  определяются выражениями

$$W_K = \frac{\rho F}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (9)$$

$$\begin{aligned} W_{\Pi} &= F \left[ \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{2\kappa_2^2}{r^2} \right) (\lambda + \mu) w^2 + \frac{2\kappa_2^2 \lambda}{r} w \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\kappa_1^2 \mu}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \alpha_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\alpha_2}{r^3} w^3 + \frac{\alpha_3}{r} w \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\alpha_4}{r^2} w^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha_5}{4} \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\alpha_6}{2r} w \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$  – продольные и поперечные смещения частиц стержня;  $\rho$  – объемная плотность материала;  $\lambda$ ,  $\mu$  – константы Ламэ;  $\kappa_{1,2}$  – корректирующие коэффициенты, выбираемые из условия близости дисперсионных веток данной модели и точного решения Похгаммера – Кри; коэффициенты  $\alpha_j$ , характеризующие геометрическую и физическую нелинейности среды, равны

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda/2 + \mu + \nu_1/6 + \nu_2 + 4\nu_3/3, & \alpha_4 &= \lambda + 2\nu_1 + 2\nu_2, \\ \alpha_2 &= \lambda + \mu + 2\nu_1/3 + \nu_2 + 4\nu_3/3, & \alpha_5 &= \lambda + 2\mu + \nu_2 + 2\nu_3, \\ \alpha_3 &= \lambda + \nu_1 + 2\nu_2, & \alpha_6 &= \lambda + \mu + \nu_2 + \nu_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения Лагранжа в данном случае запишутся

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial w_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial w_x} - \frac{\partial L}{\partial w} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Нелинейные уравнения Миндлина – Германа имеют следующий вид:

$$u_{tt} - c_l^2 u_{xx} - \frac{2\lambda \kappa_2^2}{r\rho} w_x = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{3\alpha_1}{\rho} u_x^2 + \frac{2\alpha_3}{r\rho} w u_x + \frac{2\alpha_4}{r^2\rho} w^2 + \frac{\alpha_5}{4\rho} w_x^2 \right\}, \quad (13)$$

$$w_{tt} - c_\tau^2 \kappa_1^2 w_{xx} + \frac{8(\lambda+\mu) \kappa_2^2}{r^2\rho} w + \frac{4\lambda \kappa_2^2}{r\rho} u_x = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\alpha_5}{\rho} u_x w_x + \frac{2\alpha_6}{r\rho} w w_x \right] - \frac{12\alpha_2}{r^3\rho} w^2 - \frac{2\alpha_3}{r\rho} u_x^2 - \frac{4\alpha_4}{r^2\rho} u_x w - \frac{\alpha_6}{r\rho} w_x^2,$$

где  $c_l = [(\lambda+2\mu)/\rho]^{1/2}$  – скорость распространения продольных волн;  $c_\tau = (\mu/\rho)^{1/2}$  – скорость распространения сдвиговых волн в материале стержня.

### Уравнения Миндлина – Германа в безразмерных переменных

Введем безразмерные переменные  $x' = x/\Lambda$ ,  $t' = c_l t/\Lambda$ ,  $u' = u/u_0$ ,  $w' = w/w_0$ , где  $x$ ,  $t$  – размерные координата и время;  $u_0$ ,  $w_0$  – максимальные амплитуды продольной и изгибной волн соответственно;  $\Lambda$  – длина волны. Если  $r/\Lambda \sim 10^{-1}$ ,  $w_0/u_0 \sim 10^{-2}$ ,  $\lambda, \mu/\alpha_i \sim 10^{-1}$ ,  $u_0/\Lambda \sim 10^{-4}$ , систему можно упростить и свести к одному уравнению

$$u_{tt} + \left[ \frac{2\kappa_2^2 \nu \lambda}{\rho c_l^2} - 1 \right] u_{xx} + \frac{r^2}{8\Lambda^2 \kappa_2^2} \left( \frac{c_l}{c_m} \right)^2 u_{ttt} - \frac{r^2}{8\Lambda^2 \kappa_2^2} \left( \frac{c_l}{c_m} \right)^2 \left[ 1 + \kappa_1^2 \left( \frac{c_\tau}{c_l} \right)^2 \right] u_{xxt} + \\ + \frac{r^2}{8\Lambda^2} \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)^2 \left( \frac{c_\tau}{c_m} \right)^2 u_{xxx} = - \frac{a_3 u_0 \lambda}{c_m^2 c_l^2 \rho^2 \Lambda} u_x u_{xx}, \quad (14)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $c_m = [(\lambda+\mu)/\rho]^{1/2}$ .

### Нелинейные стационарные волны в стержне Миндлина – Германа

Точные решения уравнения (14) будем искать в виде стационарных волн деформаций  $U(\xi = x - vt) = du/d\xi$ , которые описываются дифференциальным уравнением в обыкновенных производных

$$d^2 U/d\xi^2 + aU + bU^2 = 0, \quad (15)$$

где

$$a = \frac{8\Lambda^2 \kappa_2^2 c_m^2}{\rho r^2 c_l^4} \frac{2\kappa_2^2 \nu \lambda + \rho c_l^2 (v^2 - 1)}{v^4 - [\kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2 + 1]v^2 + \kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2}, \\ b = \frac{4\alpha_3 u_0 \lambda \kappa_2^2 \Lambda}{\rho^2 r^2 c_l^4} \frac{1}{v^4 - [\kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2 + 1]v^2 + \kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2},$$

$v$  – скорость распространения стационарных волн. Ограниченные решения уравнения (15), описывающего колебания осциллятора с квадратичной нелинейностью, были исследованы в [5]. Здесь будут использоваться некоторые из полученных результатов.

Умножая (15) на  $U_\xi = dU/d\xi$  и интегрируя, получим

$$1/2 (dU/d\xi)^2 = E - (a/2)U^2 - (b/3)U^3. \quad (16)$$

Здесь функция  $f(U) = (a/2)U^2 - (b/3)U^3$  – потенциальная энергия системы;  $E$  – константа интегрирования, имеющая смысл начальной энергии системы. Поэтому

уравнение (16) можно интерпретировать как закон сохранения энергии для ангармонического осциллятора. Полученное уравнение допускает разделение переменных

$$2^{1/2}d\xi = dU/[E-f(U)]^{1/2} \quad (17)$$

и имеет ограниченные решения при  $E-f(U)>0$ . Решения будут периодическими, если функция  $E-f(U)$  принимает положительные значения между двумя своими вещественными нулями. Пусть кубический полином  $E-f(U)$  имеет три действительных корня  $U_3 \leq U_2 \leq U_1$ . (Наличие одного действительного корня не рассматривается, так как решения уравнения (17) в этом случае будут неограниченными.) Выразим полином  $E-f(U)$  через корни  $U_{1,2,3}$

$$E - (a/2)U^2 - (b/3)U^3 = -(b/3)(U - U_1)(U - U_2)(U - U_3). \quad (18)$$

Корни полинома связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 + U_3 &= -3a/(2b), \\ U_1U_2 + U_1U_3 + U_2U_3 &= 0, \\ U_1U_2U_3 &= 3E/b. \end{aligned} \quad (19)$$

Перепишем уравнение (17) в виде

$$2^{1/2}d\xi = dU/[-(b/3)(U - U_1)(U - U_2)(U - U_3)]^{1/2}. \quad (20)$$

О возможности существования нелинейных стационарных волн уравнения (15) можно судить по знакам коэффициентов  $a$  и  $b$  и значения константы  $E$ .

Для стержней, изготовленных из большинства металлов и сплавов параметр нелинейности  $\alpha_3 < 0$ , а для стержней из композиционных материалов возможно и  $\alpha_3 > 0$ .

Физически реализуемыми являются лишь те случаи, когда в волне деформации отсутствует постоянная составляющая. Мы будем рассматривать только эти случаи.

**1. Пусть  $a > 0$ ,  $b > 0$ .** При  $\alpha_3 > 0$  скорости распространения стационарных волн в стержне удовлетворяют условию  $v > 1$ , а при  $\alpha_3 < 0$  — условию  $\kappa_1(c_2/c_1) < v < [1 - 2v^2 \kappa_2^2 / (1 - v)]^{1/2}$ . В этом случае функция потенциальной энергии  $f(U)$  имеет локальный минимум  $f_{\min}(U=0)=0$  и локальный максимум  $f_{\max}(U=-a/b)=a^3/(6b^2)$ , то есть точка  $(0,0)$  на фазовой плоскости  $(U, U_\xi)$  является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка  $(-a/b, 0)$  — неустойчивым положением равновесия типа «узел» [5]. Ограниченные решения уравнения (17) существуют, если константа  $E$  изменяется в пределах  $E_{\min} \leq E \leq E_{\max}$  ( $E_{\max}=a^3/(6b^2)$ ,  $E_{\min}=0$ ), тогда полином  $E-f(U)$  будет иметь три действительных корня, причем разным значениям  $E$  отвечают различные типы стационарных волн.

При  $0 \leq E = E_2 < a^3/(6b^2)$  стационарные волны являются периодическими кноидальными волнами, соответствующими движениям по замкнутым траекториям вблизи сепаратрисы. В этом случае корни  $U_{1,2,3}$  различны, причем  $E-f(U) > 0$  при  $U_1 < U < U_2$ . Тогда с помощью замены переменных

$$y^2 = (U_1 - U)/(U_1 - U_2), \quad 0 < y^2 < 1 \quad (21)$$

и интегрирования уравнение (20) сводится к неполному эллиптическому интегралу первого рода

$$-[(b/6)(U_1 - U_3)]^{1/2}(\xi - \xi_0) = \int_0^y dy / [(1 - y^2)(1 - s^2 y^2)]^{1/2}, \quad (22)$$

где  $s^2 = (U_1 - U_2)/(U_1 - U_3)$ ,  $0 < s^2 < 1$ . Обращая эллиптический интеграл при  $y=0$ ,  $\xi_0=0$ , получаем решение, описывающее периодические нелинейные волны, в виде

$$U(\xi) = U_1 - (U_1 - U_2)\text{sn}^2\{[(b/6)(U_1 - U_3)]^{1/2}\xi, s\}, \quad (23)$$

где  $\text{sn}(\cdot, \cdot)$  – эллиптическая функция Якоби (эллиптический синус). В выражении (23) введем следующие обозначения:

$$A = U_1 - U_2, \quad s^2 = (U_1 - U_2)/(U_1 - U_3), \quad \omega = [(b/6)(U_1 - U_3)]^{1/2} = [bA/(6s^2)]^{1/2}, \quad (24)$$

где  $A$  – амплитуда колебаний;  $s$  – модуль эллиптической функции, определяющий степень искажения формы колебаний  $U(\xi)$  по сравнению с синусоидальной;  $\omega$  – аналог частоты. Период колебаний равен

$$\Lambda = 2K(s)/\omega = [24/(bA)]^{1/2}sK(s), \quad (25)$$

где  $K(s)$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

Решение (23) содержит восемь параметров  $A, v, s, \omega, U_{1,2,3}, E$ , которые связаны между собой шестью соотношениями (19) и (24). Через два независимых параметра – амплитуду колебаний  $A$  и коэффициент нелинейных искажений  $s$ , а также коэффициенты уравнения решение (23) можно представить в виде

$$U(\xi) = -a/(2b) + A[(1 + s^2)/(3s^2)] - A\text{sn}^2\{[bA/(6s^2)]^{1/2}\xi, s\}. \quad (26)$$

Качественный вид периодического решения (23) представлен на рис. 2. Параметры периодической нелинейной волны (26) связаны соотношениями

$$A = [3a/(2b)]s^2/(1 - s^2 + s^4)^{1/2}, \quad \omega^2 = a/[4(1 - s^2 + s^4)^{1/2}]. \quad (27)$$

С их учетом (26) можно записать в виде

$$U(\xi) = [A/(3s^2)][1 + s^2 - (1 - s^2 + s^4)^{1/2}] - A\text{sn}^2(\omega\xi, s). \quad (28)$$

Качественные зависимости амплитуды периодической волны от ее скорости при различных значениях коэффициента нелинейных искажений приведены на рис. 3. В диапазоне скоростей  $v > 1$ , соответствующем случаю 1 ( $a > 0, b > 0$ ) при положительном параметре нелинейности ( $\alpha_3 > 0$ ), амплитуда волны растет с ростом скорости. (Здесь  $s_1 < s_2 < s_3$ ; выделенная кривая  $s=1$  отвечает солитонному решению, а кривизна возрастает при уменьшении  $s$  от 1 до 0.)

В диапазоне скоростей  $\kappa_1(c_+/c_-) < v < [1 - 2v^2\kappa_2^2/(1-v)]^{1/2}$ , соответствующем случаю 1 ( $a > 0, b > 0$ ) при  $\alpha_3 < 0$ , амплитуда волны уменьшается с ростом скорости. (Здесь  $s_1 < s_2 < s_3$ , выделенная кривая  $s=1$  отвечает солитонному решению.)

В остальных диапазонах скоростей эти зависимости не построены, так как они соответствуют физически не реализуемым случаям.

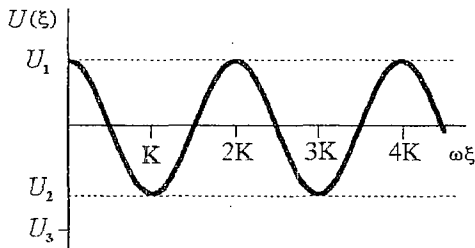


Рис. 2. Стационарная периодическая волна при  $a > 0, b > 0$

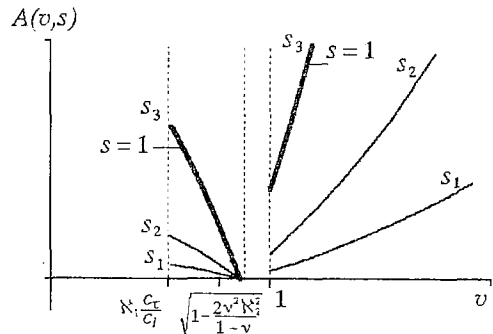


Рис. 3. Качественные зависимости амплитуды периодической волны  $A$  от ее скорости  $v$  при различных значениях коэффициента нелинейных искажений формы волны  $s$

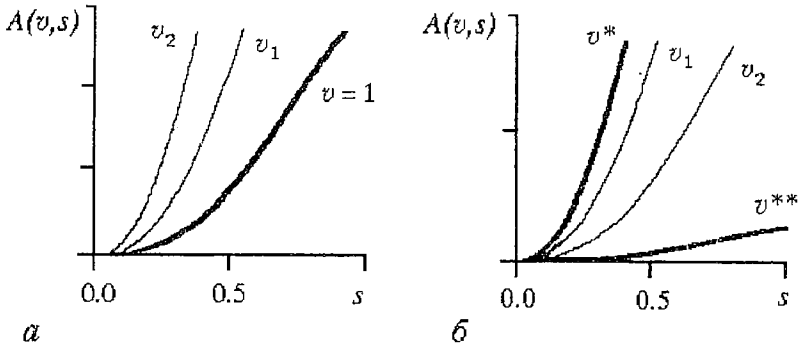


Рис. 4. Качественные зависимости амплитуды периодической волны  $A$  от коэффициента нелинейных искажений  $s$  при фиксированной скорости ( $v_1 < v_2$ ):  $a - \alpha_3 > 0$ ;  $b - \alpha_3 < 0$

На рис. 4 показаны качественные зависимости амплитуды волны  $A$  от коэффициента нелинейных искажений  $s$  при фиксированной скорости (здесь  $v^* = \kappa_1(c_T/c_l)$ ,  $v^{**} = [1 - 2v^2 \kappa_2^2 / (1 - v)]^{1/2}$ ).

Когда параметр нелинейности положителен ( $\alpha_3 > 0$ ), скорости волн удовлетворяют условию  $v > 1$  (рис. 4, а). В этом случае кривые  $A(v, s)$  лежат выше кривой, соответствующей  $v = 1$ ; при увеличении скорости ( $v_2 > v_1$ ) нарастание амплитуды с ростом  $s$  происходит быстрее.

При  $\alpha_3 < 0$  скорости волн находятся в диапазоне  $\kappa_1(c_T/c_l) < v < [1 - 2v^2 \kappa_2^2 / (1 - v)]^{1/2}$  (рис. 4, б), кривые  $A(v, s)$  лежат между кривыми  $v^*$  и  $v^{**}$ ; при увеличении скорости ( $v_2 > v_1$ ) нарастание амплитуды с ростом  $s$  происходит медленнее.

**2. При  $a < 0$ ,  $b > 0$**  скорость распространения стационарных волн находится в интервалах  $0 < v < \kappa_1(c_T/c_l)$  при  $\alpha_3 > 0$  и  $[1 - 2v^2 \kappa_2^2 / (1 - v)]^{1/2} < v < 1$  при  $\alpha_3 < 0$ . В этом случае функция потенциальной энергии  $f(U)$  имеет локальный максимум  $f_{\max}(U=0) = 0$  и локальный минимум  $f_{\min}(U = -ab) = a^3 / (6b^2)$ , то есть точка  $(-ab, 0)$  на фазовой плоскости  $(U, U_\xi)$  является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка  $(0, 0)$  – неустойчивым положением равновесия типа «узел» [5]. Ограниченные решения существуют, если начальная энергия системы изменяется в пределах  $a^3 / (6b^2) = E_{\min} \leq E \leq E_{\max} = 0$ . Различным значениям  $E$  соответствуют различные типы решений. При  $a^3 / (6b^2) < E < 0$  стационарные волны являются периодическими кноидальными волнами, при  $E \rightarrow E_{\min}$  будут наблюдаться квазигармонические колебания, соответствующие движению по замкнутым фазовым траекториям вблизи положения равновесия типа «центр», а при  $E = E_{\max}$  колебания на фазовой плоскости соответствуют движениям по сепаратрисе. Во всех этих случаях соответственно полином  $E - f(U)$  имеет либо три различных действительных корня, либо (при  $E = E_{\min}$ ) два совпадающих больших корня  $U_1$  и  $U_2$ , либо (при  $E = E_{\max}$ ) два совпадающих меньших корня  $U_2$  и  $U_3$ . Положительные значения полинома находятся в области  $U_2 < U < U_1$ . Поэтому, как и в случае 1, решения уравнения (20) находятся с помощью замены (21).

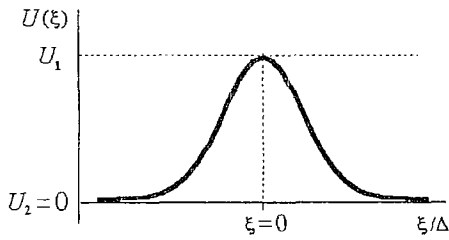
При  $E = E_{\max} = 0$  стационарные волны уравнения (15) являются уединенными. В этом случае совпадают два меньших корня полинома:  $U_2 = U_3$ . Ограниченные решения существуют в области  $U_3 = U_2 \leq U \leq U_1$ . Уравнение (20) примет вид

$$2^{1/2} d\xi = dU \{ (U - U_2) [(b/3)(U_1 - U)]^{1/2} \}, \quad (29)$$

которое после замены переменных (21) и интегрирования дает решение

$$U(\xi) = U_2 + (U_1 - U_2) \operatorname{sech}^2 \{ [(b/6)(U_1 - U_2)]^{1/2} \xi \}. \quad (30)$$

Решение (30) – предельный случай нелинейных периодических решений при  $s = 1$ . Введем обозначения



$$A^* = U_1 - U_2 = -3a/(2b), \quad (31)$$

$$\Delta = \{6/[b(U_1 - U_2)]\}^{1/2} = 2/(-a)^{1/2},$$

где  $A^*$  – амплитуда,  $\Delta$  – ширина солитона. В солитоне постоянная составляющая отсутствует  $U_2=0$ . Решение (30) можно переписать в виде

Рис. 5. Солитон деформации при  $a < 0$ ,  $b > 0$

$$U(\xi) = A^*/\text{ch}^2[(x-vt)/\Delta]. \quad (32)$$

Качественный вид солитонного решения представлен на рис. 5. Параметры солитонного решения связаны между собой соотношениями

$$A^* = [3\Lambda c_m^2 \rho / (\alpha_3 u_0 \lambda)] [\rho c^2 (1-v^2) - 2\nu \lambda \kappa_2^2], \quad (33)$$

$$\Delta = [(\rho/2)^{1/2} \rho c^2 / (c_m \Lambda \kappa_2)] \{ [v^4 - (\kappa_1^2 (c_1/c_2)^2 + 1)v^2 + \kappa_1^2 (c_1/c_2)^2] / [\rho c^2 (1-v^2) - 2\nu \lambda \kappa_2^2] \}^{1/2}. \quad (34)$$

Вид решения и зависимости между параметрами уединенной волны представлены в табл. 1. Из графиков, приведенных в табл. 1, видно, что при скоростях  $[1-2\nu^2 \kappa_2^2 / (1-\nu)]^{1/2} < v < 1$  ( $\alpha_3 < 0$ ) поведение уединенной волны является классическим для солитонов: волна большей амплитуды имеет меньшую ширину и распространяется с большей скоростью. Когда скорости волн находятся в интервале  $0 < v < \kappa_1 (c_1/c_2)$  ( $\alpha_3 > 0$ ), поведение солитонов является аномальным: волна меньшей амплитуды имеет меньшую ширину.

**3. Пусть  $a > 0$ ,  $b < 0$ .** Стационарные волны в этом случае распространяются со скоростями  $\kappa_1 c_1/c_2 < v < [1-2\nu^2 \kappa_2^2 / (1-\nu)]^{1/2}$  при  $\alpha_3 > 0$  и  $v > 1$  при  $\alpha_3 < 0$ . Смена знака перед нелинейным слагаемым в уравнении (15) приводит к тому, что на фазовой плоскости  $(U, U_\xi)$  происходит поворот фазовых портретов, рассмотренных в предыдущих случаях, в противоположную сторону, то есть стационарные волны имеют в этом случае отрицательную амплитуду. Изменение знака перед линейным слагаемым сдвигает начало координат в одно из положений равновесия: либо в «центр», либо в «узел» [5]. Функция потенциальной энергии  $f(U)$  имеет локальный максимум  $f_{\max}(U=-alb) = a^3/(6b^2)$  и локальный минимум  $f_{\min}(U=0) = 0$ . На фазовой плоскости  $(U, U_\xi)$  точка  $(-alb, 0)$  является неустойчивым положением равновесия типа «узел», а точка  $(0, 0)$  – устойчивым положением равновесия типа «центр». Начальная энергия системы изменяется в пределах  $0 = E_{\min} \leq E \leq E_{\max} = a^3/(6b^2)$ .

При  $0 < E = E_2 < a^3/(6b^2)$  в системе происходят периодические колебания, соответствующие на фазовой плоскости движениям по замкнутым траекториям вблизи сепаратрисы. В этом случае корни  $U_{1,2,3}$  различны, причем  $E - f(U) > 0$  при  $U_3 < U < U_2$ . Поэтому ограниченные решения уравнения (20) существуют в области  $U_3 < U < U_2$ . В этом случае с помощью замены

$$y^2 = (U - U_3)/(U_2 - U_3), \quad 0 \leq y^2 \leq 1 \quad (35)$$

и интегрирования уравнение (20) приводится к неполному эллиптическому интегралу первого рода

$$-[(b/6)(U_1 - U_3)]^{1/2} (\xi - \xi_0) = \int_0^y dy / [(1 - y^2)(1 - s^2 y^2)]^{1/2}, \quad (36)$$

где  $s^2 = (U_2 - U_3)/(U_1 - U_3)$ ,  $0 \leq s^2 \leq 1$ . Обращая эллиптический интеграл при  $y=0$ ,  $\xi_0=0$ , получим решение, описывающее периодические нелинейные волны

$$U(\xi) = U_3 + (U_2 - U_3) \text{sn}^2\{ [(-b/6)(U_1 - U_3)]^{1/2} \xi, s \}. \quad (37)$$



Таблица 1

$\alpha_3 > 0$	$\alpha_3 < 0$
$0 < v < \kappa_1(c_\tau/c_l)$	$[1 - 2v^2\kappa_2^2/(1-v)]^{1/2} < v < 1$
$U(\xi) = A^*/ch^2[(x-vt)/\Delta]$	$U(\xi) = A^*/ch^2[(x-vt)/\Delta]$
$A^* = [3\Lambda c_m^2 \rho / (u_0 \lambda)] [\rho c_l^2 (1-v^2) - 2v\lambda \kappa_2^2]$	$A^* = [3\Lambda c_m^2 \rho / (u_0 \lambda)] [2\kappa_2^2 v\lambda + \rho c_l^2 (v^2 - 1)]$
$\Delta = \frac{(\rho/2)^{1/2} r c_l^2}{c_m \Lambda \kappa_2} \left[ \frac{v^4 - (\kappa_1^2(c_\tau/c_l)^2 + 1)v^2 + \kappa_1^2(c_\tau/c_l)^2}{\rho c_l^2 (1-v^2) - 2v\lambda \kappa_2^2} \right]^{1/2}$	

Введем в (37) следующие обозначения:

$$A = U_2 - U_3, \quad s^2 = (U_2 - U_3)/(U_1 - U_3), \quad \omega = [(-b/6)(U_1 - U_3)]^{1/2} = [-bA/(6s^2)]^{1/2}, \quad (38)$$

где  $A$  – амплитуда колебаний,  $s$  – коэффициент нелинейных искажений формы колебаний  $U(\xi)$ ,  $\omega$  – аналог частоты. Период колебаний равен

$$\Lambda = 2K(s)/\omega = [-24/(bA)]^{1/2} sK(s), \quad (39)$$

где  $K(s)$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

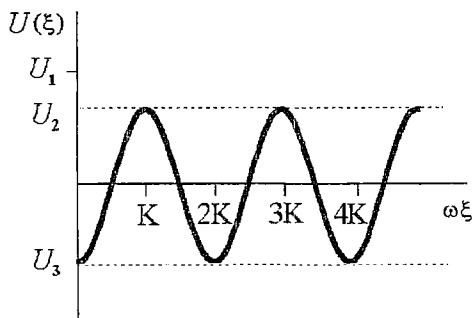


Рис. 6. Стационарная периодическая волна при  $a>0, b<0$

Решение (37) содержит параметры  $A, v, s, \omega, E, U_{1,2,3}$ , которые связаны между собой соотношениями (19) и (38). В качестве двух независимых переменных выберем амплитуду колебаний  $A$  и коэффициент нелинейных искажений  $s$ . Тогда решение можно представить в виде

$$U(\xi) = -a/(2b) - A[(1 + s^2)/(3s^2)] + Asn^2\{[-bA/(6s^2)]^{1/2}\xi, s\}. \quad (40)$$

Качественный вид периодического решения представлен на рис. 6. Параметры в решении (40) связаны следующим образом:

$$A = [-3a/(2b)][s^2/(1 - s^2 + s^4)]^{1/2}, \quad \omega^2 = a/[4(1 - s^2 + s^4)]^{1/2}. \quad (41)$$

Учитывая (41), перепишем (40) в виде

$$U(\xi) = [A/(3s^2)][(1 - s^2 + s^4)^{1/2} - 1 - s^2] + Asn^2(\omega\xi, s). \quad (42)$$

Качественные зависимости амплитуды периодической волны от ее скорости при различных значениях коэффициента нелинейных искажений приведены на рис. 3. В диапазоне скоростей  $v>1$ , соответствующем случаю 3 ( $a>0, b<0$ ) при отрицательном параметре нелинейности ( $\alpha_3<0$ ), амплитуда волны растет с ростом скорости (здесь  $s_1<s_2<s_3$ ; выделенная кривая  $s=1$  отвечает солитонному решению, а кривизна возрастает при уменьшении  $s$  от 1 до 0). В диапазоне скоростей  $v_1(c_1/c_2)<v<[1-2v^2\kappa_2^2/(1-v)]^{1/2}$ , соответствующем случаю 3 ( $a>0, b<0$ ) при  $\alpha_3>0$ , амплитуда волны уменьшается с ростом скорости (здесь  $s_1<s_2<s_3$ , выделенная кривая  $s=1$  отвечает солитонному решению).

Качественные зависимости амплитуды волны  $A$  от коэффициента нелинейных искажений  $s$  при фиксированной скорости показаны на рис. 4, б (при  $\alpha_3>0$  и диапазоне скоростей  $v_1(c_1/c_2)<v<[1-2v^2\kappa_2^2/(1-v)]^{1/2}$ ) и рис. 4, а (при  $\alpha_3<0$  и  $v>1$ ).

**4. При  $a<0, b<0$**  скорости волн в стержне удовлетворяют условию  $[1-2v^2\kappa_2^2/(1-v)]^{1/2}<v<1$  при  $\alpha_3>0$  и условию  $0<v<v_1(c_1/c_2)$  при  $\alpha_3<0$ . Функция потенциальной энергии  $f(U)$  имеет локальный максимум  $f_{\max}(U=0)=0$  и локальный минимум  $f_{\min}(U=-a/b)=a^3/(6b^2)$ , то есть на фазовой плоскости  $(U, U_\xi)$  точка  $(-a/b, 0)$  является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка  $(0, 0)$  — неустойчивым положением равновесия типа «узел» [5]. Ограниченные решения существуют, если начальная энергия системы изменяется в пределах  $a^3/(6b^2)=E_{\min}\leq E\leq E_{\max}=0$ , причем при  $E\rightarrow E_{\min}$  будут наблюдаться квазигармонические колебания вблизи положения равновесия типа «центр», а при  $E=E_{\max}$  колебания на фазовой плоскости соответствуют движениям по сепаратрисе [5]. Во всех этих случаях соответственно полином  $E-f(U)$  имеет либо три действительных корня, либо два совпадающих меньших корня  $U_2$  и  $U_3$ , либо два совпадающих больших корня  $U_1$  и  $U_2$ . Положительные значения полинома  $E-f(U)$  находятся в области  $U_3<U<U_2$ . Поэтому, как и в случае 3, решения уравнения (20) находятся с помощью замены (35).

При  $E=E_{\max}=0$  стационарные волны являются уединенными. В этом случае два больших корня полинома совпадают,  $U_1=U_2$ . В солитоне постоянная составляющая отсутствует,  $U_2=0$ . Ограниченные решения существуют в области  $U_3\leq U\leq U_2$ . Применяя замену (35) к уравнению (20), получим решение, которое

Рис. 7. Солитон деформации при  $a < 0, b < 0$

является предельным случаем нелинейных периодических решений при  $s=1$ ,

$$U(\xi) = U_3 \operatorname{sech}^2\left[\left(\frac{b}{6}U_3\right)^{1/2}\xi\right]. \quad (43)$$

Качественный вид солитонного решения представлен на рис. 7. Вводя обозначения

$$A^* = -U_3 = -3a/(2b), \Delta = [-6/(bU_3)]^{1/2} = 2/(-a)^{1/2}, \quad (44)$$

где  $A^*$  – амплитуда,  $\Delta$  – ширина солитона, решение (43) можно переписать в виде

$$U(\xi) = A^*/\operatorname{ch}^2[(x - vt)/\Delta]. \quad (45)$$

Основные зависимости между параметрами солитонного решения приведены в табл. 2.

Таблица 2

$\alpha_3 > 0$	$\alpha_3 < 0$
$[1 - 2v^2 \kappa_2^2 / (1 - v)]^{1/2} < v < 1$	$0 < v < \kappa_1(c_\tau/c_l)$
$U(\xi) = A^*/\operatorname{ch}^2[(x - vt)/\Delta]$	$U(\xi) = A^*/\operatorname{ch}^2[(x - vt)/\Delta]$
$A^* = [3\Lambda c_m^2 \rho / (u_0 \lambda)] [\rho c^2 (1 - v^2) - 2v\lambda \kappa_2^2]$	$A^* = [3\Lambda c_m^2 \rho / (u_0 \lambda)] [2\kappa_2^2 v\lambda + \rho c^2 (v^2 - 1)]$
$\Delta = \frac{(\rho/2)^{1/2} r c^2}{c_m \Lambda \kappa_2} \left[ \frac{v^4 - (\kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2 + 1)v^2 + \kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2}{\rho c^2 (1 - v^2) - 2v\lambda \kappa_2^2} \right]^{1/2}$	

$$A^* = [3\Lambda c_m^2 \rho / (\alpha_3 u_0 \lambda)] [\rho c^2 (1 - v^2) - 2\nu \lambda \kappa_2^2], \quad (46)$$

$$\Delta = [(\rho/2)^{1/2} r c^2 / (c_m \Lambda \kappa_2)] \{ [v^4 - [\kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2 + 1] v^2 + \kappa_1^2 (c_\tau/c_l)^2] / [\rho c^2 (1 - v^2) - 2\nu \lambda \kappa_2^2] \}^{1/2}. \quad (47)$$

В диапазоне скоростей  $[1 - 2\nu^2 \kappa_2^2 / (1 - \nu)]^{1/2} < v < 1$  (при  $\alpha_3 > 0$ ) поведение солитонов является классическим: волна большей амплитуды имеет меньшую ширину и распространяется с большей скоростью. Когда скорости волн удовлетворяют условию  $0 < v < \kappa_1 c_\tau / c_l$  при  $\alpha_3 < 0$ , поведение солитонов является аномальным: волна меньшей амплитуды имеет меньшую ширину.

*Работа поддержана грантом Президента РФ (№ 98-15-96127).*

### Библиографический список

1. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
2. Эйбрамсон Х.Н., Пласс Х.Дж., Риппергер Э.А. Распространение волн напряжения в стержнях и балках // Проблемы механики. 1961. Вып. 3. С. 22.
3. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
4. Ерофеев В.И., Потапов А.И. Нелинейные модели продольных колебаний стержней // Гидроаэромеханика и теория упругости: Всесоюз. межвуз. сб. Днепропетровск: ДГУ, 1984. Вып. 32. С. 78.
5. Семерикова Н.П. Стационарные продольные волны в нелинейно-упругом стержне // Волновые задачи механики: Сб. науч. тр. Н.Новгород: НФ ИМАШ РАН, 1994. С. 121.

*Нижегородский филиал  
института машиноведения РАН*

*Поступила в редакцию 15.04.99*

## NONLINEAR – ELASTIC WAVES IN MINDLIN – HERRMANN ROD

*V.I. Erofeyev, N.V. Kluyeva, N.P. Semerikova*

The nonlinear mathematical model describing longitudinal oscillations of the rod taking into account shift strains and transversal movements of particles of the middle line (nonlinear generalization of the model of Mindlin – Herrmann) is considered. The singularities of distribution of nonlinear stationary waves of the strain periodic waves and solitons are studied. The associations between basic parameters of such waves (amplitude, velocity of distribution, wavelength, and coefficient of nonlinear distortions of the waveform) are obtained. It is shown, that alongside with the classical behavior solitons (the wave of the greater amplitude has smaller breadth and propagates with the greater velocity) their anomalous behavior can be observed (amplitude of the wave decreases with growth of the velocity).



*Ерофеев Владимир Иванович* – родился в 1959 году. Окончил механико–математический факультет Горьковского государственного университета (1981). Защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико–математических наук (1994). Работает заместителем директора по научной работе Нижегородского филиала института машиноведения РАН. По совместительству – профессор Нижегородского государственного университета. Области научных интересов: нелинейные волны в механических системах, акустическая диагностика материалов и конструкций. Опубликовал более 140 научных работ, в том числе монографии: «Нелинейные волны в упругих телах с пространственной дисперсией» (1986), «Microstructured Solids» (1996), «Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой» (1999). Соавтор международной коллективной монографии «Material Instabilities in Solids» (1998). Член правления Российского акустического общества. E–mail: wvs@dynamo.nnov.ru



*Клюева Наталья Владимировна* – родилась в 1974 году. Окончила механико–математический факультет Нижегородского государственного университета (1997). С 1997 года – аспирантка Нижегородского филиала института машиноведения РАН. Область научных интересов – волновая динамика механических систем.



*Семерикова Надежда Петровна* – окончила механико–математический факультет Горьковского государственного университета (1983). Работает ассистентом кафедры математики радиофизического факультета Нижегородского университета. Область научных интересов – волновая динамика механических систем.