



## ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАРШЕГО ЛЯПУНОВСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВРЕМЕН ВОЗВРАТА: ВОЗМОЖНОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЯ

*А.Н. Павлов, В.С. Анищенко*

Мы анализируем возможность определения динамических характеристик хаотического аттрактора по последовательности времен возврата и исследуем вопрос о влиянии выбора секущей плоскости на результат реконструкции. На примере модели Ресслера продемонстрировано, что старший ляпуновский показатель может быть определен по последовательности времен возврата в секущую даже в том случае, когда не все фазовые траектории ее пересекают.

### Введение

Процесс эволюции многих систем сопровождается повторяющимися резкими изменениями во времени физических переменных. Данная ситуация достаточно типична для целого ряда биологических объектов и наблюдается в нейробиологии («зажигания» нейронов, соответствующие «спайкам» напряжения [1]), в кардиологии (зубцы электрокардиограммы [2]), в микробиологии (осцилляции мембранного потенциала клеток – «берсты» [3]) и т.д. Анализ систем, демонстрирующих подобное поведение, часто проводится на основе обработки временных интервалов между последовательными «событиями», генерируемыми в ходе эволюции (например, «interspike intervals» (ISI) [4], исследование которых мы будем проводить в настоящей работе).

В литературе обычно выделяют две модели генерации «спайков». В рамках модели «integrate-and-fire» (IF) [5–7] рассматривается сигнал  $S(t)$ , чаще всего представляющий собой линейное преобразование временной зависимости одной из переменных маломерной динамической системы (ДС) либо функцию нескольких переменных. Данный сигнал интегрируется с некоторого момента  $T_0$ , а времена  $T_i$ , соответствующие «спайкам», определяются уравнением

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t) dt = \theta, \quad I_i = T_{i+1} - T_i, \quad (1)$$

где  $\theta$  – пороговый уровень,  $I_i$  – временные интервалы (IF ISI). При достижении порога генерируется кратковременный импульс (рис.1, а) и обнуляется значение интеграла.

Другая модель, «threshold-crossing» (TC) [6], предполагает введение порогового уровня  $\theta$ , который в данном случае задает уравнение секущей  $S=\theta$ , и

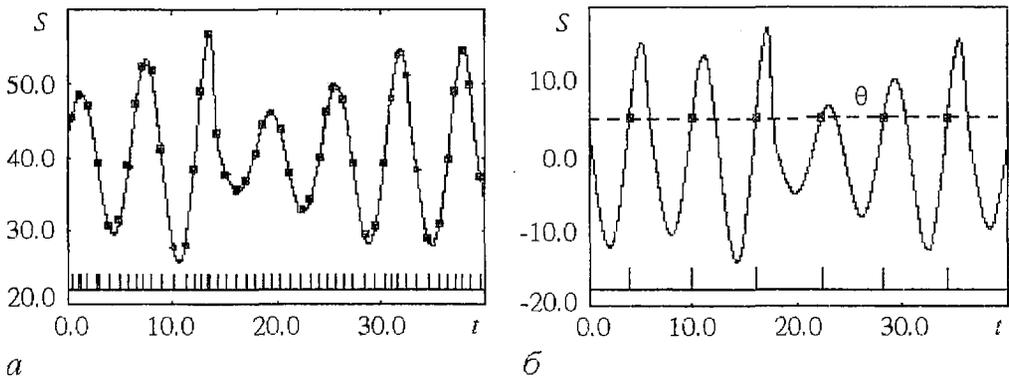


Рис. 1. Нейронные модели: а – IF; б – TC. Точками на сигналах  $S(t)$  обозначены моменты времени, соответствующие достижению порога и генерации «спайков». Внизу на каждом рисунке изображена последовательность «спайков», представляющая собой сигнал на выходе системы

запись интервалов времени между пересечениями данного уровня (TC ISI) сигналом  $S(t)$  в одном направлении, например, снизу вверх (рис. 1, б). Для аттрактора динамической системы TC ISI соответствуют временам возврата в секущую плоскость.

Проблема анализа ISI является актуальной в тех случаях, когда полная реализация интересующего нас процесса  $S(t)$  по тем или иным причинам не может быть записана, и единственно доступный сигнал представляет собой последовательность времен, соответствующих «спайкам». Классическим примером служит сенсорный нейрон, который может быть рассмотрен как некоторое пороговое устройство, преобразующее входной сигнал  $S(t)$  в последовательность «спайков», генерируемых при превышении порога. Данное преобразование неоднократно исследовалось ранее с позиции теории информации [8].

В последние годы появился новый взгляд на сигналы типа ISI. Они стали рассматриваться в качестве координаты состояния, с помощью которой может быть охарактеризована динамика хаотического сигнала на входе нейрона [5–7,9–11]. В [5] была продемонстрирована возможность реконструкции хаотического аттрактора, соответствующего входному сигналу, по последовательности временных интервалов IF ISI методом задержки [12], рассмотрены вопросы отличия детерминированного сигнала, управляющего «зажиганиями» нейрона, от случайного процесса путем вычисления ошибки предсказания, проведены расчеты корреляционной размерности [6]. Позднее была доказана теорема Зауэра<sup>1</sup> (теорема вложения для временных интервалов IF ISI) [7] и обоснована возможность реконструкции по последовательности времен возврата в секущую плоскость (TC ISI) [9]. Детальное исследование различных нейронных моделей с точки зрения реконструкции хаотического аттрактора, соответствующего сигналу на входе, предпринято в [10]. В [13] предложена интерпретация времен возврата на основе концепции аналитического сигнала и представлений о мгновенной частоте хаотических колебаний, а также определены метрические и динамические характеристики аттракторов некоторых ДС по последовательностям TC ISI.

<sup>1</sup> Учитывая, что работа [7] может быть недоступна российскому читателю, мы приводим формулировку теоремы Зауэра: Пусть  $dx/dt=f(x)$  есть система дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условию Липшица на компактном инвариантном подмножестве  $A$  в  $R^k$ . Предположим, что  $m$  есть целое, большее чем  $2d_0(A)$ , и что  $A$  не содержит точек, соответствующих состояниям равновесия системы. Тогда существует открытая область  $C$  в некотором  $R^p$  и гладкое семейство  $\{q_c: R^k \rightarrow R\} c \in C$  гладких функций, таких что для каждой гладкой положительной действительной функции  $h: R^k \rightarrow R$  функция ISI-реконструкции  $G_{h+q_c}$  является взаимно однозначной на  $A$  почти для всех  $c \in C$ . Более подробная информация (препринты статей) доступна в сети Internet: <http://math.gmu.edu/~tsauer/pre/index.html>

В настоящей работе мы исследуем влияние величины порога и структуры временных интервалов на результат реконструкции. Данные исследования проводятся в терминах вычисления максимального ляпуновского характеристического показателя (ЛХП)  $\lambda_1$ , являющегося, «вероятно, наиболее информативным инвариантом сложного динамического процесса», как отмечается, например, в [14]. Мы сформулируем условия, при которых существует возможность вычисления  $\lambda_1$  по временным интервалам ТС ISI с помощью стандартных алгоритмов без их модификации.

В первом разделе мы кратко остановимся на методах расчета старшего ляпуновского показателя. Особенности определения ЛХП по сигналам типа ISI будут рассмотрены во втором разделе работы. В третьем разделе мы обсудим влияние величины порогового уровня  $\theta$ , а также предложим качественное объяснение полученных результатов. Основные выводы суммируются в заключении.

## 1. Методы расчета максимального показателя Ляпунова

В данном разделе мы кратко остановимся на методах расчета ЛХП, с тем чтобы ввести в рассмотрение некоторые параметры алгоритмов, которые нам потребуются для дальнейшего изложения. Как известно, для режима динамического хаоса характерно наличие экспоненциальной неустойчивости траекторий, количественной мерой которой является положительный ляпуновский показатель, характеризующий степень чувствительности системы к выбору начальных условий. Число положительных экспонент в спектре ЛХП определяется количеством неустойчивых направлений периодических орбит, встроенных в хаотический аттрактор, хотя возможны более сложные ситуации (состоящие в сосуществовании периодических орбит с различным числом неустойчивых направлений [15]). В рамках данной работы мы ограничимся рассмотрением динамических систем с одним положительным показателем Ляпунова  $\lambda_1$ . При вычислении  $\lambda_1$  делается предположение о «типичности» фазовой траектории, являющейся решением ДС при выбранных начальных условиях. В противном случае величина показателя, определенная на интервале времени  $T$ , может отличаться от предельного значения  $\lambda_1$ , соответствующего  $T \rightarrow \infty$ . В частности, в [16] (см. также ссылки в этой работе) приводится пример дискретного отображения с очень длительными переходными процессами (до 1500000 итераций система может демонстрировать «хаотическое» поведение, после чего режим динамики становится регулярным). С точки зрения вычисления ляпуновского показателя это соответствует тому, что величина  $\lambda_1$  в течение переходного процесса сходится к некоторому положительному значению и только на очень длительных временах спадает до нуля. Длительные переходные процессы и сложное поведение  $\lambda_1$  наблюдается в окрестности гомоклинической траектории седлового цикла при разрушении квазипериодических колебаний [17]. Чтобы охарактеризовать поведение типичной фазовой траектории, иногда используют понятие «ляпуновских показателей на конечном времени» (finite-time Lyapunov exponents), которые характеризуют скорость разбегания или сжатия по различным направлениям в течение конечного интервала времени  $T$  [15].

Если уравнения ДС, генерирующей фазовую траекторию, известны, то определить величину максимального показателя (или полный спектр ЛХП) можно с помощью хорошо известного алгоритма, предложенного в работах Бенеттина с соавторами [18], Шимады и Нагашимы [19]. Данный метод иногда называют «стандартным алгоритмом» расчета ляпуновских экспонент [20].

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(x, \mu), \quad x \in R^n, \quad \mu \in R^m, \quad (2)$$

в которой  $x$  – вектор состояния,  $f$  – нелинейная вектор–функция,  $\mu$  – вектор управляющих параметров. Исследование системы (2) на устойчивость ее частного решения  $x_p(t)$  сводится к анализу уравнения в вариациях и введению понятия  $k$ -мерного ляпуновского показателя; однако если ограничиться только вычислением старшего ЛХП, алгоритм [18,19] существенно упрощается. Искомая величина  $\lambda_1$  будет определять эволюцию во времени вектора возмущения

$$r(t) = r_0 \exp(\lambda_1 t), \quad (3)$$

где  $r_0$  – расстояние между двумя близлежащими траекториями в фазовом пространстве в момент  $t_0=0$  ( $r_0=|x(t_0)-x_p(t_0)|$ ). Поскольку экспоненциальный закон разбегания траекторий (3) справедлив лишь для малых значений векторов  $r$ , при расчете  $\lambda_1$  проводятся перенормировки, в ходе которых задаются новые возмущения – малые по величине, но выбранные в направлении, соответствующем максимальному разбеганию траекторий; в результате вычисляется усредненная вдоль фазовой траектории количественная характеристика степени хаотичности. Различные аспекты проблемы расчета ЛХП можно найти, например, в работах [21].

Задача вычисления  $\lambda_1$  существенно усложняется, если уравнения ДС (2) неизвестны, однако к настоящему времени предложено множество алгоритмов расчета ляпуновских экспонент по экспериментальным данным [22–24]. Проблема вычисления динамических характеристик хаотических аттракторов по их одномерным реализациям за последние годы неоднократно обсуждалась в печати [25]. В настоящей работе мы проводили вычисление старшего ЛХП с помощью алгоритма [22], который напоминает подход [18,19] к решению данной задачи, но необходимость работы с единственной траекторией ограничивает возможности выбора вектора возмущения, заставляя искать компромисс между уменьшением ошибки его ориентации в фазовом пространстве и минимизацией его длины. Ошибки ориентации обусловлены невозможностью выбора вектора возмущения строго в заданном направлении, а ограничения на его длину могут быть сформулированы следующим образом:

$$l_1 < r < l_2. \quad (4)$$

Необходимость введения минимального значения  $l_1$  вызвана тем, что при  $r < l_1$  сказывается влияние шума, способного индуцировать дополнительное разбегание траекторий;  $l_2$  задает условие линейного приближения и обычно может быть введено заранее в процентном отношении от размера аттрактора (например, 5÷10%). По аналогии с [18,19] проводятся перенормировки вектора, если расстояние между траекториями перестает удовлетворять условию линейного приближения ( $r > l_2$ ).

Поскольку вычисление  $\lambda_1$  предполагает реконструкцию аттрактора, результат расчета данной величины будет зависеть от качества реконструкции [26], что приводит к появлению дополнительных параметров численной схемы – размерности пространства вложения, задержки и т.п. [12].

Заканчивая краткое изложение техники расчета ЛХП, обратим внимание на одно важное обстоятельство. В проводимых исследованиях мы рассматриваем случай, когда реализация, для анализа которой применяется алгоритм [22] (входной сигнал для моделей ИФ и ТС), является одномерной проекцией фазовой траектории, принадлежащей аттрактору ДС. В реальных экспериментах динамическая природа анализируемого сигнала не всегда может быть установлена. Если исследуемый сигнал не является детерминированным, говорить о ляпуновских показателях становится проблематично, и вместо  $\lambda_1$  алгоритм [22] позволяет определять лишь некоторую количественную характеристику степени чувствительности системы к выбору начальных условий [27] или меру предсказуемости.

## 2. Вычисление максимального показателя Ляпунова по последовательности ISI

Вопросы реконструкции хаотического аттрактора, соответствующего входному сигналу IF-модели, по последовательности временных интервалов исследовались в работах [5–11]. Качество реконструкции в значительной степени определялось выбором порога  $\theta$ . Как показано в [10], если частота «зажиганий» нейрона велика, применение интегральной теоремы о среднем позволяет рассматривать в некотором приближении IF ISI как нелинейное преобразование входного сигнала  $S(t)$

$$I_i \approx \theta/S_i, \quad S_i = S(T_i). \quad (5)$$

Поскольку старший ЛХП является инвариантом нелинейных преобразований, величина  $\lambda_1$ , вычисленная для аттрактора, реконструированного по IF ISI, должна совпадать со значением показателя, определенного по входному сигналу  $S(t)$ . Вопрос состоит лишь в том, какую методику выбрать для расчета показателя.

С одной стороны, мы можем рассматривать ISI исключительно как дискретную последовательность  $I_1, I_2, \dots, I_N$ , восстанавливать аттрактор методом задержки ( $I_i, I_{i+1}, \dots, I_{i+m-1}$ ) и определять для него меру хаотичности как усредненную за одну «итерацию» скорость потери информации о начальном состоянии; причем длительность «итерации» приближенно можно принять соответствующей среднему значению временного интервала  $\bar{I} = (1/N) \sum_{i=1}^N I_i$ . Мы проводили данные вычисления на примере системы Ресслера

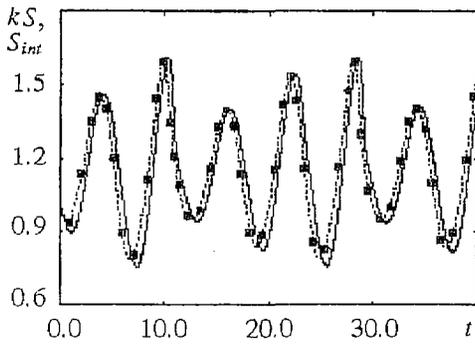
$$\begin{aligned} dx/dt &= -(y + z), \\ dy/dt &= x + ay, \\ dz/dt &= b + z(x - c) \end{aligned} \quad (6)$$

при значении параметров  $a=0.15, b=0.2, c=10.0$ , по аналогии с [10] выбрав в качестве входного сигнала  $S(t)=x(t)+40$  и зафиксировав порог  $\theta=35$ . При этом было получено заниженное значение старшего показателя Ляпунова (недооценка  $\lambda_1$  составляла приблизительно 25%).

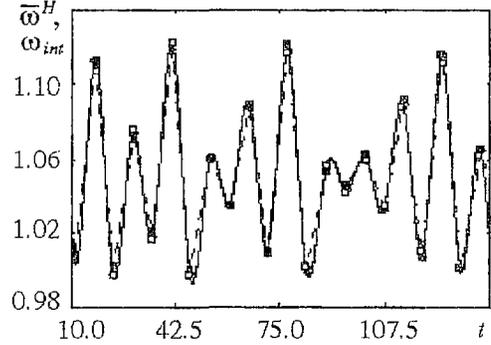
Другой подход к проблеме расчета ЛХП состоит в следующем. Если нам известна последовательность IF ISI, то, согласно (5),

$$1/I_i \approx (1/\theta)S_i = kS(T_i), \quad (7)$$

то есть в фиксированные моменты времени  $T_i$  мы можем определить значения входного сигнала, умноженные на постоянный множитель. Зная значения  $kS(T_i)$  и желая восстановить входной сигнал как непрерывную функцию времени, предлагается интерполировать точки  $1/I_i$ , рассмотренные в моменты времени  $T_i$ , гладкой функцией  $S_{\text{int}}(t)$  (например, кубическим сплайном). Интерполяция позволит перейти к постоянному шагу по времени и приближенно восстановить линейное преобразование входного сигнала, то есть  $kS(t)$  (рис. 2, а); следовательно,  $S_{\text{int}}(t)$  будет сохранять метрические и динамические характеристики сигнала на входе. Разумеется, сохранение характеристик хаотического аттрактора происходит с какой-то погрешностью, учитывая как ошибки интерполяции, так и приближенный характер соотношения (5). Однако, как видно из рис. 3, а, значение  $\lambda_1$ , вычисленное по сигналу  $S_{\text{int}}(t)$  с помощью алгоритма [22], совпадает с результатом расчета старшего ЛХП по исходному сигналу  $S(t)$ , причем точность вычисления оказалась выше, чем в предыдущем случае (по дискретной последовательности IF ISI). Мы склонны объяснять данное обстоятельство тем,

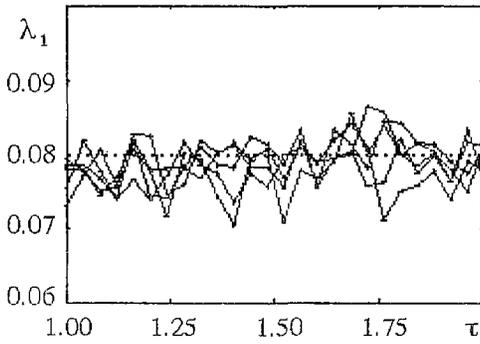


*a*

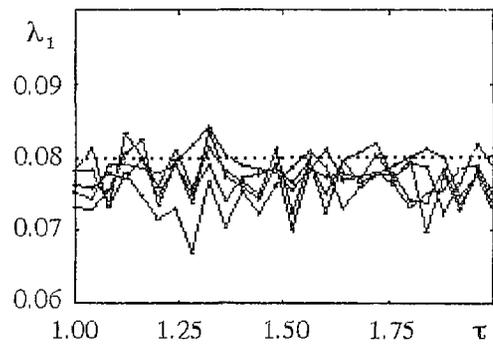


*б*

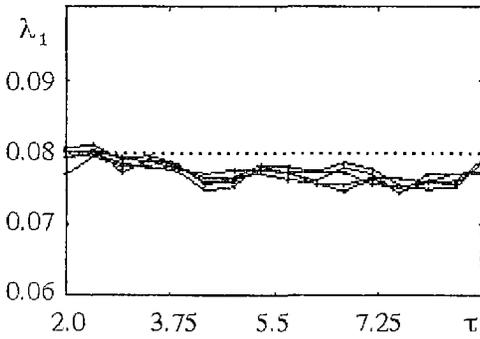
Рис. 2. *a* – линейное преобразование входного сигнала  $(1/\theta)S(t)$  – сплошная линия – и временная зависимость  $S_{int}(t)$  – результат интерполяции точек  $(1/I_i)(T_i)$  – пунктир. Небольшое смещение по оси времени может быть устранено, если в формуле (5) рассмотреть  $S_i = S(T_i + T_{i+1})/2$ ; *б* – точки усредненной мгновенной частоты по Гильберту  $\bar{\omega}^H(T_i)$  в моменты времени, соответствующие пересечению порога, (черные кружочки, соединенные пунктирной линией) и значения  $(2\pi I_i)(T_i)$  в те же моменты времени (белые кружочки, соединенные гладкой функцией  $\omega_{int}(t)$ )



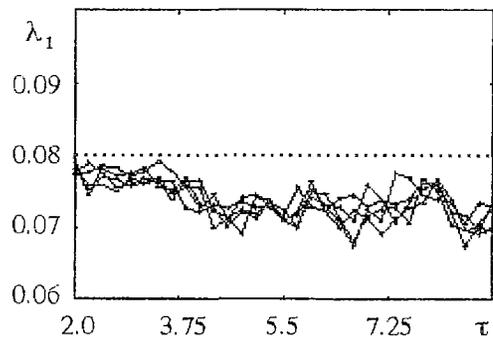
*a*



*б*



*в*



*г*

Рис. 3. Результаты расчета максимального показателя Ляпунова в зависимости от выбора задержки  $\tau$  при различных значениях параметра  $l_2$ , полученные по: *a, б* – последовательности IF ISI в отсутствие и при наличии флуктуаций, соответственно; *в, г* – последовательности TC ISI также в отсутствие и при наличии флуктуаций. Вычисления проводились при реконструкции аттрактора в 5-мерном пространстве. На всех рисунках пунктиром обозначена величина  $\lambda_1$ , вычисленная по входному сигналу  $S(t)$

что увеличение числа точек в интерполированной временной зависимости  $S_{\text{int}}(t)$  по сравнению с дискретной последовательностью ISI (соответственно, увеличение числа точек в восстановленном фазовом портрете) способствует уменьшению ошибки ориентации вектора возмущения при расчете ЛХП методом [22]. Для получения достоверных результатов расчет  $\lambda_1$  проводился при варьировании параметров алгоритма – задержки, размерности пространства вложения, параметра  $l_2$ , задающего условие линейного приближения (см. рис. 3,а).

Более сложную задачу представляет собой реконструкция динамических характеристик хаотического аттрактора по набору ТС ISI. Возможный вариант решения данной проблемы был предложен в работе [13] и состоял в следующем. Осуществлялся переход от набора временных интервалов  $I_i$  к точкам  $\omega(T_i)=2\pi/I_i$ , соответствующим значениям усредненной мгновенной частоты за время возврата  $I_i=T_{i+1}-T_i$ , где  $T_i$  – времена пересечения порогового уровня (то есть времена, соответствующие «спайкам»). Далее точки  $\omega(T_i)$  интерполировались гладкой функцией (также кубическим сплайном)  $\omega_{\text{int}}(t)$  для перехода к сигналу с равномерной выборкой (рис. 2, б), используемому при реконструкции аттрактора. Было показано [13], что данная временная зависимость позволяет качественно описать поведение истинной усредненной мгновенной частоты, и реконструированный аттрактор сохраняет характеристики хаотического аттрактора, соответствующего входному сигналу  $S(t)$  (рис. 3, в).

Хотя в последнем случае можно было использовать иные подходы к определению динамических характеристик (например, [24, 28]), мы решили остановиться на методе Вольфа с соавторами [22] и процедуре интерполяции, чтобы иметь возможность использовать один и тот же алгоритм вне зависимости от характера анализируемого сигнала.

Некоторые комментарии к методу [13]. Данная техника принципиально не работает при анализе однопериодических колебаний. В этом случае  $\omega(T_i)=\text{const}$ , и в отсутствие флуктуаций мы получим точку в фазовом пространстве. При наличии шумов мы можем зафиксировать некоторое движение, но расчеты динамических характеристик приведут к заведомо ошибочным результатам. В случае сложных периодических либо хаотических режимов происходит переход к медленным функциям времени (сопровождающийся, в частности, уменьшением тактности периодических колебаний), но метрические и динамические характеристики при этом сохраняются. Это подтверждают расчеты ляпуновских экспонент для системы Ресслера, генератора Анищенко – Астахова и ряда других моделей [13].

Для проверки работоспособности методики определения  $\lambda_1$  при наличии флуктуаций осуществлялось добавление нормально распределенных случайных величин аддитивно к входному сигналу (с дисперсией, равной 1% от  $S(t)$ ) и к величине порога (1% от  $\theta$  в случае IF ISI,  $10^{-2}$  для ТС ISI). Полученные результаты (рис. 3, б, г) подтверждают устойчивость работы алгоритма по отношению к слабым случайным воздействиям.

Рис. 3, в, г соответствуют выбору порогового уровня, равного нулю, то есть введению секущей Пуанкаре  $x=0$  динамической системы. В следующем разделе мы обсудим влияние величины порога на результат вычисления старшего ляпуновского показателя по последовательности ТС ISI.

### **3. Влияние величины порога на результат реконструкции динамических характеристик**

Решаемая в настоящей работе задача, по сути дела, сводится к следующему. Располагая только последовательностью времен возврата в секущую плоскость (ТС ISI), можем ли мы определить динамические характеристики хаотического аттрактора? Если да (что, собственно, следует из результатов работы [9]), то при

каких условиях? Особый интерес вызывает случай, когда секущая плоскость вводится таким образом, что часть фазовых траекторий либо касается ее либо не пересекает вовсе. Рассмотрение данного случая позволит сформулировать ограничения на эффективность используемой методики.

Обратимся к системе Ресслера и выберем в качестве секущей плоскости  $x=\theta$  (см. рис. 1,б), где  $S(t)=x(t)$ . Будем анализировать последовательность времен возврата для различных  $\theta$ , медленно увеличивая значение порогового уровня. Старший показатель Ляпунова, вычисляемый по ТС ISI (каждый раз при фиксированном пороге), демонстрирует довольно сложную зависимость от  $\theta$  (рис. 4, а). Как видно из данного рисунка, существуют две области ( $0 \leq \theta < 4$  и  $10 < \theta < 13.5$ ), в пределах которых динамические характеристики хаотического аттрактора могут быть определены с достаточно хорошей точностью (ошибка вычисления  $\lambda_1$  не превышает  $10 \div 15\%$  и может быть уменьшена за счет увеличения длительности анализируемого временного ряда, составившего в наших расчетах примерно 2000 времен возврата). В то же время вне данных областей результат расчета максимального показателя может отличаться в несколько раз от истинного значения, достигая минимума при  $\theta \approx 5.35$ . Аналогичную картину демонстрируют более детальные вычисления  $\lambda_1$ , выполненные для нескольких контрольных точек:  $\theta=0$  (рис. 3, б),  $\theta=11$  (рис. 4, б),  $\theta=5.35$  (рис. 4, в, г). В последнем случае наблюдается чувствительность алгоритма к выбору параметра  $l_2$ , не позволяющая получить достоверной оценки степени хаотичности.

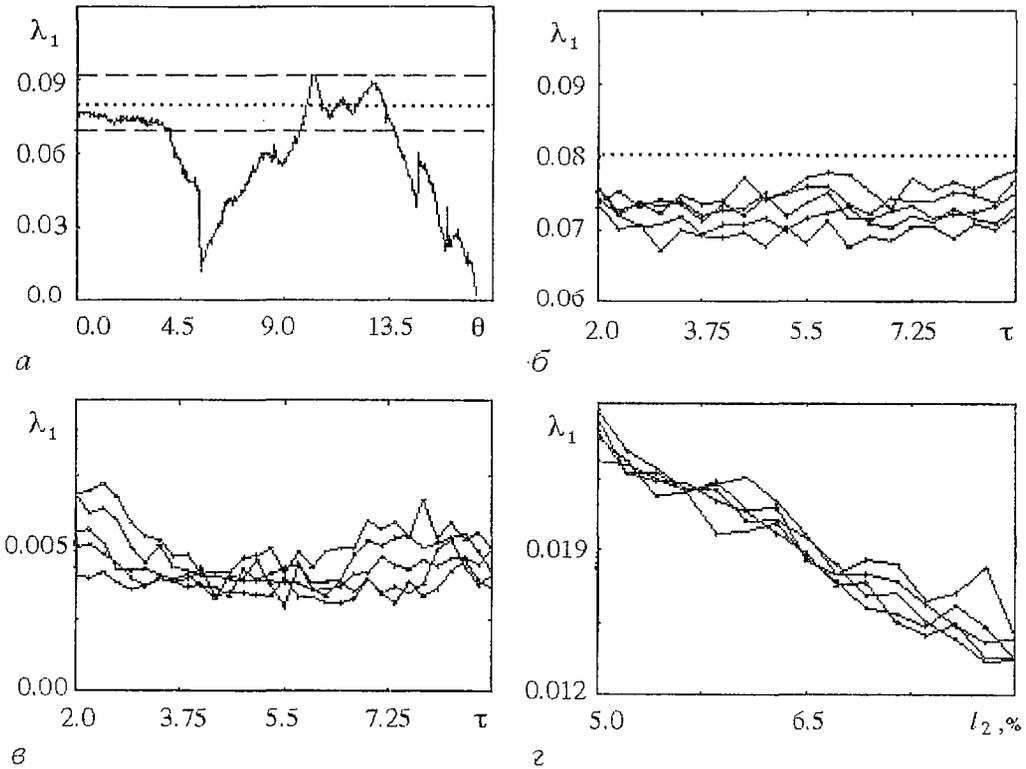


Рис. 4. а – зависимость старшего ЛХП, вычисленного по последовательности ТС ISI, от выбора порога  $\theta$ . Пунктиром обозначена величина  $\lambda_1$ , вычисленная по входному сигналу  $S(t)$ , штрихами – диапазон ошибки вычисления  $\lambda_1$  ( $\pm 12\%$ ); результаты расчета  $\lambda_1$ : б, в – в зависимости от выбора задержки  $\tau$  при различных значениях параметра  $l_2$  для  $\theta=11$  и  $\theta=5.35$ ; г – в зависимости от выбора  $l_2$  при различных  $\tau$  для  $\theta=5.35$

С целью объяснения сложного поведения  $\lambda_1(\theta)$  проводилось исследование структуры временных интервалов (рис. 5). В области  $0 \leq \theta < 4$  пересечение порогового уровня происходит в течение каждого базового периода колебаний. Последовательность временных интервалов ТС ISI является стационарной (рис. 5, а), а размеры аттрактора, реконструированного методом задержки по интерполированной временной зависимости  $\omega_{int}(t)$ , определяются диапазоном изменения  $I_i$ . Увеличение  $\theta$  приводит к тому, что в течение некоторых базовых периодов колебаний пересечения порога не происходит – появляются  $I_i$  с большими значениями (рис. 5, з). Наличие нескольких временных масштабов в последовательности ТС ISI, в свою очередь, приводит к появлению нескольких пространственных масштабов в реконструированном аттракторе (рис. 5, д), причем из-за отличающейся вероятности больших и малых  $I_i$  (рис. 5, е) фазовая траектория основную часть времени будет проводить в ограниченной области фазового пространства (примерно 10÷15% от размера аттрактора) – рис. 5, д. Условие линейного приближения (параметр  $l_2$ ) теперь необходимо задавать для

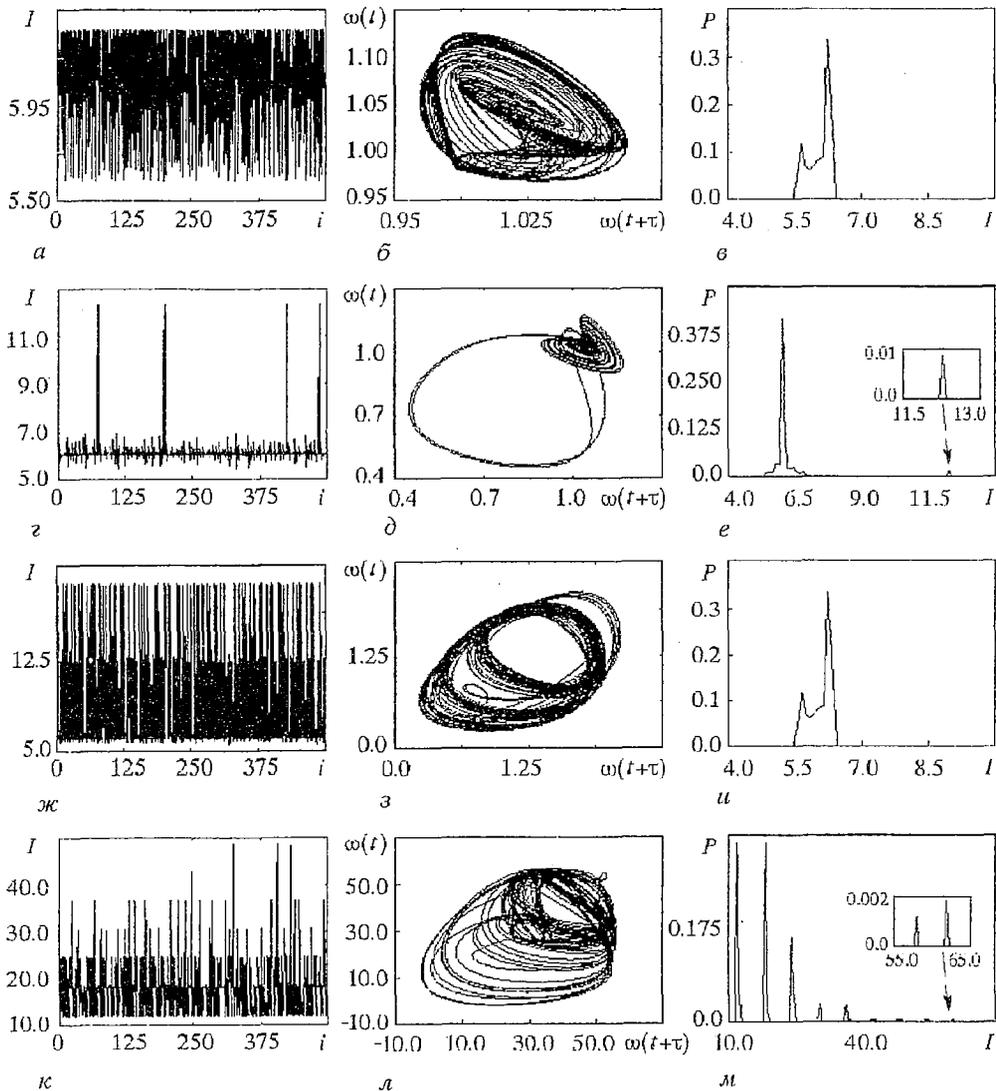


Рис. 5. Последовательности ТС ISI, фазовые портреты, реконструированные по интерполированной временной зависимости  $\omega_{int}(t)$  (для простоты обозначение int опущено) и функции плотности распределения вероятности временных интервалов для различных значений  $\theta$ : а, б, в – 0; з, д, е – 5.35; ж, з, и – 11; к, л, м – 15

каждого пространственного масштаба в отдельности; однако даже при существенном уменьшении данного параметра зависимость  $\lambda_1(l_2)$ , аналогичная рис. 4, г, сохраняется.

При дальнейшем увеличении  $\theta$  среди ТС ISI появляются временные интервалы, соответствующие трем базовым периодам колебаний, но если вероятности различных  $I_i$  сравнимы между собой, последовательность ТС ISI (рис. 5, ж) сохраняет динамические характеристики сигнала  $S(t)$ .

В области  $\theta > 13.5$  в последовательности  $I_i$  появляются интервалы, соответствующие пяти и более базовым периодам, вероятность которых очень мала, но отлична от нуля (рис. 5, к, м). В данной области вычислить значение максимального показателя Ляпунова не представляется возможным.

На основании проведенного исследования можно сформулировать ряд условий, при выполнении которых алгоритм [22] позволяет определять динамические характеристики хаотического сигнала системы Ресслера по последовательности ТС ISI:

1) последовательность  $I_i$  является стационарной, а вероятности различных временных интервалов в функции плотности распределения сравнимы между собой (для диапазонов  $I_i$  с отличной от нуля вероятностью);

2) среднее значение  $\bar{T}$  не превышает характерный временной масштаб системы (время предсказуемости или «время Ляпунова» [10,29]).

Обсудим значение данных условий. Выполнение первого из них обеспечивает приблизительное соответствие времен, проводимых фазовой траекторией в различных областях аттрактора при наличии нескольких пространственных масштабов, а также равномерное посещение данных областей.

Необходимость второго условия вызвана тем, что увеличение  $\bar{T}$  при смещении порогового уровня и превышение некоторого характерного временного масштаба системы приводит к потере информации о динамике. В результате максимальное значение показателя, которое может быть вычислено по последовательности ТС ISI, демонстрирует спад, обратно пропорциональный  $\bar{T}$  – рис. 6, а. Заметим однако, что даже если ограничения на величину  $\bar{T}$  не позволяют определить  $\lambda_1$ , процедура расчета ЛХП может служить качественной оценкой степени хаотичности. В подтверждение этому на рис. 6, б представлена зависимость  $\lambda_1$  от управляющего параметра  $c$  системы Ресслера, вычисленная методом [18,19] вместе с качественно повторяющимися ее результатами расчета ЛХП по последовательности ТС ISI, записанной при фиксировании каждого 5-го пересечения секущей  $\theta=0$ .

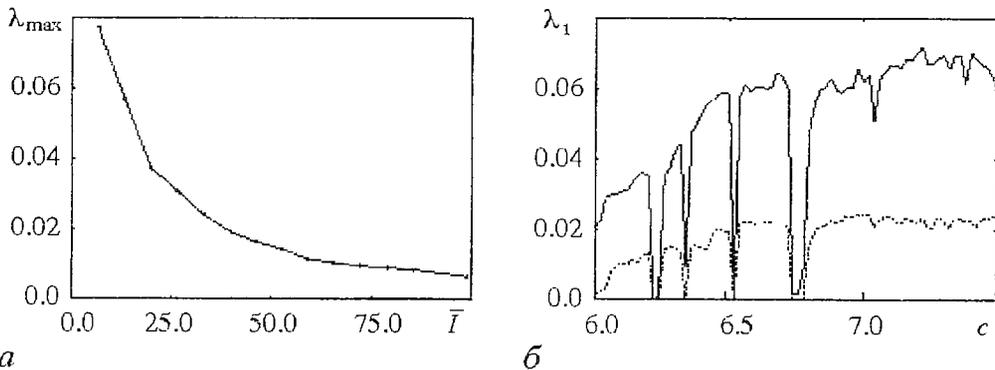


Рис. 6. а – зависимость максимального значения ЛХП, которое может быть вычислено при превышении характерного временного масштаба системы, от средней величины временного интервала; б – результаты расчета  $\lambda_1$  системы Ресслера методом [18,19] в зависимости от выбора параметра  $c$  (сплошная линия) и значения ЛХП, вычисленные при фиксировании каждого 5-го пересечения секущей плоскости  $x=0$  (пунктир)

Вышеприведенные результаты были получены в рамках алгоритма, осуществляющего проведение перенормировок вектора возмущения после достижения фиксированного расстояния между траекториями (условия линейного приближения, задаваемого параметром  $l_2$ ). Как мы убедились при рассмотрении случая  $\theta=5.35$ , данная методика может не работать для аттракторов с несколькими пространственными масштабами. Формально алгоритм [22] не ограничивает нас в том, каким образом осуществлять перенормировки. Можно, в частности, анализировать среднюю скорость разбегания траекторий за фиксированный период времени  $T_r$ . Однако в этом случае мы получаем дополнительный параметр численной схемы. Если  $T_r$  выбрать малым, существенно увеличивается время счета (в связи с процедурами поиска ближайших соседей при перенормировках, отнимающими большую часть времени работы алгоритма). Слишком частые перенормировки способствуют также увеличению ошибки ориентации вектора возмущения. С другой стороны, выбрав большое  $T_r$ , мы рискуем получить заниженные оценки степени хаотичности, если в течение данного времени разбегание близлежащих траекторий выходит за рамки линейного приближения. Для более достоверных оценок целесообразным является исследование зависимости  $\lambda_1$  от параметра  $T_r$ , также, как и от других параметров (задержки, размерности пространства вложения и т.д.).

Осуществление перенормировок через фиксированное время может приводить к большей чувствительности алгоритма расчета ЛХП к выбору параметров численной схемы, но при наличии нескольких ярко выраженных пространственных масштабов данная процедура позволяет определять динамические характеристики хаотического аттрактора (рис.7), и, таким образом, первое из двух условий перестает быть необходимым<sup>2</sup>.

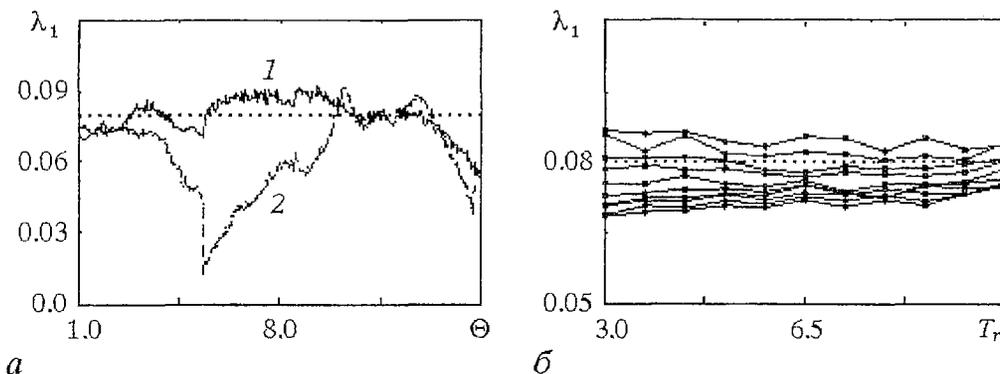


Рис. 7. *а* – результаты расчета  $\lambda_1$  по последовательности ТС ISI в зависимости от выбора порога  $\theta$  при осуществлении перенормировок вектора возмущения через фиксированное время (зависимость 1). Зависимостью 2 представлены результаты расчета, соответствующие рис. 4,а (осуществление перенормировок при превышении параметра  $l_2$  – условия линейного приближения); *б* – результаты расчета  $\lambda_1$  для случая  $\theta=5.35$  в зависимости от параметра  $T_r$  при различных  $t \in [2 \div 5]$

<sup>2</sup> Одна из проблем, с которой мы столкнулись в данной работе, состоит в том, что из-за неперехода некоторыми траекториями через порог возникают слишком большие временные интервалы и, как следствие, – сильные неоднородности. Один из способов решения проблемы разных масштабов (за идею которого мы очень признательны рецензенту) состоит в следующем. Фазовый сдвиг в течение каждого интервала  $I_i$  может быть выбран равным  $2\pi k_i$ , где  $k_i$  в общем случае отлично от единицы и подбирается из условия наибольшей равномерности изменения фазы. Соответственно осуществляется переход от последовательности  $I_i$  к точкам  $\omega(T_i)=2\pi k_i/l_i$ . Данный переход позволяет нам избавиться от проблемы сильной неоднородности, но проведенные расчеты показали, что и в этом случае процедуры перенормировок после достижения фиксированного расстояния между фазовыми траекториями [22] могут приводить к недооценке величины  $\lambda_1$ .

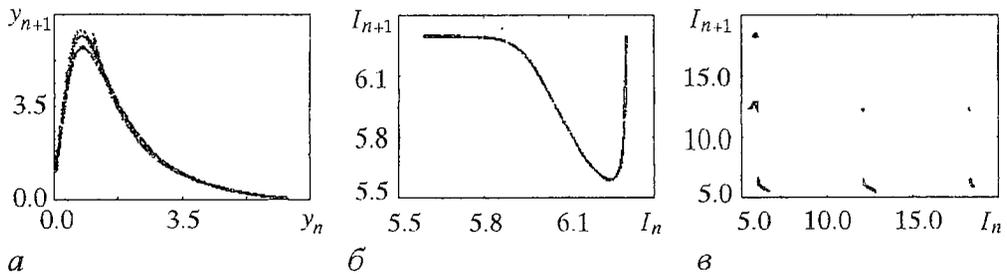


Рис. 8. *a* – отображение Пуанкаре системы Ресслера; *б, в* – отображения времен возврата для  $\theta=0$  и  $\theta=11$

Вышесказанное относилось к чисто технической стороне процедуры расчета старшего ЛХП. Если же отвлечься от деталей алгоритма и обобщить полученные результаты, мы можем говорить о том, что последовательность временных интервалов ТС ISI сохраняет динамические характеристики хаотического аттрактора даже в том случае, когда не все фазовые траектории пересекают секущую, и, таким образом, при наличии ограничения на среднее значение  $\bar{I}$  (второе условие) величина  $\lambda_1$  является инвариантной к выбору порога.

Данный вывод представляется нам достаточно нетривиальным – ведь смещение секущей плоскости приводит к разрушению структуры отображения времен возврата. Если при корректном выборе секущей (когда все фазовые траектории ее пересекают, причем трансверсально) отображение времен возврата напоминает отображение Пуанкаре (рис. 8, *a, б*), то при смещении порога картина значительно усложняется (рис. 8, *в*).

В рамках настоящей работы мы не можем предложить строгого обоснования сохраняемости динамических характеристик при произвольном выборе секущей. Возможное качественное объяснение состоит в следующем. Рассмотрим для простоты значения усредненной мгновенной частоты  $\omega(t_i)=2\pi/I_i$  в моменты  $t_i=i\bar{I}$ , то есть равномерный шаг по времени. Выберем два участка сигнала  $S(t)$  из пяти базовых периодов колебаний, для каждого из которых незначительное смещение величины порога приводит к тому, что в течение 3-го периода траектория перестает пересекать пороговый уровень (рис. 9, *a*). Для уровня  $\theta_1$  при переходе к интерполированной временной зависимости мы получим две гладкие кривые  $\omega^1(t)$  и  $\omega^2(t)$ , проходящие через точки  $\omega_1^1=\omega_{\text{int}}(t_i)=2\pi/I_i, \dots, \omega_4^1=\omega_{\text{int}}(t_{i+3})=2\pi/I_{i+3}$  и  $\omega_1^2=\omega_{\text{int}}(t_j)=2\pi/I_j, \dots, \omega_4^2=\omega_{\text{int}}(t_{j+3})=2\pi/I_{j+3}$  в моменты времени  $t_i, \dots, t_{i+3}$  и  $t_j, \dots, t_{j+3}$ , соответствующие пересечениям порога для двух выбранных участков сигнала  $S(t)$ .

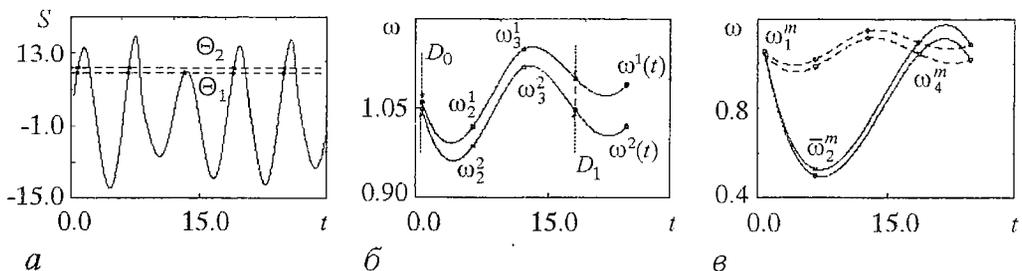


Рис. 9. *a* – участок сигнала  $S(t)$  с двумя уровнями  $\theta_1=9$  и  $\theta_2=10$ ; *б* – интерполированные временные зависимости  $\omega^1(t)$  и  $\omega^2(t)$  для двух участков сигнала  $S(t)$  при выборе порога  $\theta_1$  (точками обозначены значения  $\omega_k^m$ ); *в* – интерполированные временные зависимости  $\omega^1(t)$  и  $\omega^2(t)$  для двух участков сигнала  $S(t)$  при выборе порога  $\theta_2$ . Пунктиром обозначены временные зависимости, изображенные на рис. *б*

Если величина  $D_0=|\omega_1-\omega_2|$  достаточно мала, и условие линейного приближения для расстояния между кривыми  $\omega^1(t)$  и  $\omega^2(t)$  не нарушается за время наблюдения (3 временных интервала ТС ISI), то одномерный аналог показателя Ляпунова может быть определен следующим образом (рис. 9, б):

$$\lambda_1 = [1/(3I)] \ln(D_1/D_0), \quad D_1 = |\omega_4 - \omega_2|. \quad (8)$$

Незначительное смещение порога (уровень  $\theta_2$ ) приводит к изменению последовательностей  $\omega_k^m$ . Для каждой из них точки  $\omega_1^m$  и  $\omega_4^m$  остаются прежними, а вместо  $\omega_2^m$ ,  $\omega_3^m$  будет одна точка  $\omega_2^m$ , но со значением, вдвое меньшим, чем в предыдущем случае (рис. 9, в). Это, в свою очередь, приводит к изменению скорости разбегания траекторий на локальных участках, однако усредненная характеристика степени хаотичности за время наблюдения остается той же, определяемой формулой (8) (рис. 9, в). Аналогичные рассуждения можно провести и при неравномерном шаге по времени. Разумеется, данные иллюстрации можно интерпретировать лишь как качественное объяснение, не претендующее на строгость изложения.

### Заключение

В настоящей работе были рассмотрены две модели генерации «спайков» – «integrate-and-fire» и «threshold-crossing»; предложена процедура перехода к непрерывной временной зависимости для IF ISI, позволяющая качественно воспроизвести линейное преобразование входного сигнала для данной модели. Мы проанализировали влияние выбора порогового уровня (или, что эквивалентно, выбора секущей плоскости для аттрактора ДС) на результат реконструкции динамических характеристик хаотического аттрактора по последовательности времен возврата (ТС ISI) и убедились в том, что старший ляпуновский показатель может быть определен по сигналу ТС ISI даже в том случае, когда не все фазовые траектории пересекают секущую. Заметим, что вместо смещения порога мы могли зафиксировать постоянное значение  $\theta > 0$  и менять амплитуду входного сигнала ТС-модели, что привело бы к тем же самым выводам.

В работе были представлены результаты, полученные для системы Ресслера. На самом деле проводимые исследования не ограничивались только этой известной системой. Аналогичные выводы были сделаны при анализе целого ряда моделей математической биофизики, для которых был подтвержден вывод о возможности определения динамических характеристик при условии, что среднее значение времен возврата не превышает характерный временной масштаб динамической системы. Ряд интересных результатов был получен для ДС с несколькими состояниями равновесия, относительно которых осуществляется движение фазовой траектории (например, системы Лоренца), но нужно отметить, что анализ таких систем является более сложной проблемой, которая может представлять собой задачу отдельного исследования.

Авторы выражают благодарность профессору датского технического университета Э. Мосекилде и О.В. Сосновцевой за внимание к данной работе и обсуждение результатов, а также рецензенту за ценные замечания и интересные идеи.

*Работа частично финансировалась за счет гранта INTAS (№ 96-0305).*

### Библиографический список

1. Tuckwell H.C. Introduction to theoretical neurobiology. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. Vols. 1,2.

2. Task Force of the European Society of Cardiology and the North American Society of Pacing and Electrophysiology. Heart Rate Variability. Standards of Measurement, Physiological Interpretation, and Clinical Use // *Circulation*. 1996. Vol. 93, № 5. P. 1043.

3. *Sherman A.* Anti-phase, asymmetric and aperiodic oscillations in excitable cells – I. Coupled bursters // *Bulletin of Mathematical Biology*. 1994. Vol. 56. P. 811.

4. *Longtin A., Bulsara A., Moss F.* Time interval sequences in the bistable systems and the noise induced transmission of information by sensory neurons // *Phys.Rev.Lett.* 1991. Vol. 65. P. 656;

*Dougllass J.K., Wilkens L., Pantazelou E., Moss F.* Noise enhancement of the information in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance // *Nature*. 1993. Vol. 365. P. 337;

*Moss F., Pei X.* Neurons in parallel // *Nature*. 1995. Vol. 376. P. 211;

*Richardson K.A., Imhoff T.T., Grigg P., Collins J.J.* Encoding chaos in neural spike train // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80. P. 2485;

*Gluckman B.J., Netoff T.I., Neel E.J., Ditto W.L., Spano M.L., Schiff S.J.* Stochastic resonance in a neuronal network from mammalian brain source // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 4098.

5. *Sauer T.* Reconstruction of dynamical system from interspike intervals // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72. P. 3911.

6. *Castro R., Sauer T.* System reconstruction and analysis using interspike intervals // Preprint. 1996.

7. *Sauer T.* Reconstruction of integrate-and-fire dynamics, in: *Nonlinear Dynamics and Time Series*, eds. C.Culter and D.Kaplan, Fields Institute Communications. Vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. P. 63.

8. *Bialek W., Rieke F., De Ruyter van Steveninck R.R. and Warland D.* Reading a neural code // *Science*. 1991. Vol. 252. P. 1854;

*Gabbiani F., Koch C.* Coding of time-varying signals in spike trains of integrate-and-fire neurons with random threshold // *Neural Comput.* 1996. Vol. 8. P. 44.

9. *Hegger R., Kantz H.* Embedding of sequence of time intervals // *Europhysics Letters*. 1997. Vol. 38. P. 267.

10. *Racicot D.M., Longtin A.* Interspike interval attractors from chaotically driven neuron models // *Physica D*. 1997. Vol. 104. P. 184.

11. *Castro R., Sauer T.* Chaotic stochastic resonance: Noise-enhanced reconstruction of attractor // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 1030;

*Castro R., Sauer T.* Correlation dimension of attractors through interspike intervals // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55. P. 287;

*Castro R., Sauer T.* Reconstructing chaotic dynamics through spike filters // *Phys. Rev.E*. 1999. Vol. 59. P. 2911.

12. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence, in *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick 1980., eds. D. Rang and L.S. Young, Lecture Notes in Mathematics. Vol. 898, (Springer, Berlin). P. 366;

*Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* Geometry from a time series // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 712;

*Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M.* Embedology // *J. Statistical Physics*. 1991. Vol. 65. P. 579.

13. *Janson N.B., Pavlov A.N., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* Reconstruction of dynamical and geometrical properties of chaotic attractors from threshold-crossing interspike intervals // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58. P. R4.

14. *Sauer T., Tempkin J.A., Yorke J.A.* Spurious Lyapunov exponents in attractor reconstruction // *Phys.Rev.Lett.* 1998. Vol. 81. P. 4341.

15. *Dawson S.P.* Strange nonattracting chaotic sets, crises, and fluctuating Lyapunov exponents // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 4348.

16. *Froyland G., Judd K., Mees A.I.* Estimation of Lyapunov exponents of dynamical systems using a spatial average // *Phys.Rev.E*. 1995. Vol. 51. P. 2844.

17. *Анищенко В.С., Сафонова М.А.* Индуцированное шумом экспоненциальное разбегание фазовых траекторий в окрестности регулярных аттракторов // *Письма в ЖТФ*. 1986. Т. 12, вып. 12. С. 740;

*Anishchenko V.S., Herzog H.P.* Noise-induced chaos in a system with homoclinic points // ZAMM. 1988. Vol. 68, № 7. P. 317.

18. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them // *Mechanica*. 1980. Vol. 15. P.9.

19. *Shimada I., Nagashima T.* A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical system // *Progr. Theor. Phys.* 1979. Vol. 61. P. 1605.

20. *Wiesel W.E.* Continuous time algorithm for Lyapunov exponents. I,II // *Phys. Rev.E.* 1993. Vol. 47. P. 3686.

21. *Wiesel W.E.* Extended Lyapunov exponents // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 46. P. 7480;

*Theiler J., Smith L.A.* Anomalous convergence of Lyapunov exponent estimates // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51. P. 3738;

*Dawson S., Grebogi C., Sauer T., Yorke J.A.* Obstructions to shadowing when a Lyapunov exponent fluctuates about zero // *Phys.Rev.Lett.* 1994. Vol. 73. P. 1927;

*Rangarajan G., Habib S., Ryne R.D.* Lyapunov exponents without rescaling and reorthogonalization // *Phys.Rev.Lett.* 1998. Vol. 80. P. 3747;

*Ershov S.V., Potapov A.B.* On the concept of stationary Lyapunov basis // *Physica D.* 1998. Vol. 118. P. 167;

*Потанов А.Б.* Методы и алгоритмы нелинейной динамики в задачах оценки параметров динамических моделей и прогноза по временным рядам // Автореф. дис.... д-ра физ.-мат. наук. 1999.

22. *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D.* 1985. Vol. 16. P. 285.

23. *Eckmann J.P., Kamphorst S.O., Ruelle D., Gilberto D.* Lyapunov exponents from a time series // *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 34. P. 4971;

*Sano M., Sawada Y.* Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55. P. 1082;

*Brown R.* Calculating Lyapunov exponents for short and/or noisy data sets // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 47. P. 3962;

*Parlitz U.* Identification of true and spurious Lyapunov exponents from time series // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 1992. Vol. 2, № 1. P. 155.

24. *Kantz H.* A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponents of a time series // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 185. P. 77.

25. *Eckmann J.P., Ruelle D.* Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems // *Physica D.* 1992. Vol. 56. P. 185;

*Brown R., Bryant P., Abarbanel H.D.I.* Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 43. P. 2787;

*Karantonis A., Pagitsas M.* Comparative study for the calculation of the Lyapunov spectrum from nonlinear experimental signals // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53. P. 5428;

*Zeng X., Eukholt R., Pielke R.A.* Estimating the Lyapunov-exponent spectrum from short time series of low precision // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66. P. 3229;

*Bryant P., Brown R., Abarbanel H.D.I.* Lyapunov exponents from observed time series // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65. P. 1523.

26. *Потанов А.Б.* Качество реконструкций хаотических аттракторов и выбор параметров реконструкции // Препринт Института прикладной математики РАН. 1995. № 13. 28 с.;

*Potapov A.* Distortions of reconstruction for chaotic attractors // *Physica D.* 1997. Vol. 101. P. 207.

27. *Paladin G., Serva M., Vulpiani A.* Complexity in dynamical systems with noise // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74. P. 66;

*Loreto V., Paladin G., Vulpiani A.* Concept of complexity in random dynamical systems // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53. P. 2087.

28. *Faure P., Korn H.* A new method to estimate the Kolmogorov entropy from recurrence plots: its application to neuronal signals // *Physica D.* 1998. Vol. 122. P. 265.

29. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59. P. 845.

Лаборатория нелинейной  
динамики СГУ

Поступила в редакцию 26.04.99  
после переработки 9.06.99

## COMPUTING LARGEST LYAPUNOV EXPONENT FROM A SEQUENCE OF RETURN TIMES: POSSIBILITIES AND LIMITATIONS

*A.N. Pavlov, V.S. Anishchenko*

We analyze whether it is possible to estimate dynamical characteristics of a chaotic attractor from a sequence of return times and study how the choice of a secant plane influences the result of reconstruction. Using Rössler model as an example it is shown that the largest Lyapunov exponent can be determined from a series of return times even in that case, when not all the phase trajectories cross a secant plane.



*Павлов Алексей Николаевич* – родился в 1973 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности «радиофизика и электроника» (1995). В 1998 году защитил кандидатскую диссертацию. В настоящее время работает ассистентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов, реконструкция динамических систем по экспериментальным данным. Автор 25 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.



*Анищенко Вадим Семенович* защитил диссертацию на степень кандидата физико-математических наук (1970) и докторскую диссертацию «Механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы» (1986). С 1979 и по настоящее время работает в области исследований динамического хаоса. В качестве приглашенного профессора читал курс лекций по динамическому хаосу в Гумбольдском университете (Берлин, 1987). С 1988 года заведует кафедрой радиофизики Саратовского университета. Автор более 200 научных работ, среди которых 6 монографий и 3 учебника по статистической радиофизике. Три монографии написаны на английском языке, из них 2 книги опубликованы в Лейпциге (1987, 1989); издательством «Наука» выпущена книга «Сложные колебания в простых системах» (1990), хорошо известная среди специалистов; в издательстве «World Scientific» вышла новая монография «Dynamical Chaos – Models and Experiments» (1995).

В.С. Анищенко разработывал и читал общие курсы лекций по статистической радиофизике, теоретическим основам радиотехники, теории колебаний и теории информации и ряд спецкурсов, из которых наиболее важные: устойчивость и бифуркации динамических систем, детерминированный хаос, специальные проблемы нелинейной динамики. Под его руководством успешно защитили диссертации 10 аспирантов, в настоящее время готовят свои работы три докторанта кафедры радиофизики, у которых он является научным консультантом. Соросовский профессор (1994). Заслуженный деятель науки РФ (1995). Входит в состав редколлегии журналов «Прикладная нелинейная динамика» и «Discrete Dynamics in Nature and Society». E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru