



## ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ

*П.В. Купцов, С.П. Кузнецов*

В работе развит вейвлет-анализ критических аттракторов одномерных и двумерных отображений, находящихся на пороге перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Обсуждаются вейвлет-диаграммы аттракторов отображений, относящихся к различным классам универсального критического поведения.

### Введение

Одним из важнейших направлений развития нелинейной динамики является исследование перехода к хаосу в системах при изменении их управляющих параметров. Существенное продвижение здесь связано с методом ренормализационной группы (РГ), который позволяет исследовать скейлинговые свойства динамики у порога хаоса. Оказалось, что существуют определенные классы универсального поведения, так что системы разной природы при переходе к хаосу могут демонстрировать одни и те же закономерности, иметь одни и те же универсальные константы скейлинга. В частности, несколько различных классов универсальности выявлено при многопараметрическом анализе перехода к хаосу через удвоения периода [1–3].

О точке перехода к хаосу, допускающей анализ методом РГ и характеризующей наличием свойств универсальности и скейлинга, мы будем говорить как о критической точке, а об аттракторе, реализующемся в этой точке, как о критическом аттракторе. Критические аттракторы обладают мультифрактальной структурой, поэтому к ним применимы известные из теории фракталов процедуры анализа, такие как вычисление спектра обобщенных размерностей  $D_q$  и скейлинг-спектра  $f(\alpha)$ . Однако эти характеристики не дают исчерпывающего представления о фрактальной структуре, и, в частности, локального описания устройства фрактального множества вблизи различных его точек. Сравнительно недавно в обиход исследователей вошел еще один метод – вейвлет-анализ [4,5]. С его помощью можно получить информацию о том, как устроен фрактал локально, в окрестности каждой его точки.

Критический аттрактор одномерного квадратичного отображения, находящегося в точке накопления бифуркаций удвоения периода, был изучен с применением вейвлет-анализа достаточно подробно [4,6]. В настоящей работе вейвлет-анализ привлекается для исследования фрактальных свойств критических аттракторов, отвечающих различным классам универсального поведения. В разделе 1 обсуждаются основные идеи вейвлет-анализа и выводится формула,

используемая в дальнейшем для вычисления вейвлет–преобразований. В разделе 2 представлены необходимые сведения из теории перехода к хаосу через удвоения периода. Разделы 3 и 4 составляют основное содержание статьи и посвящены собственно вейвлет–анализу критических аттракторов. В разделе 5 резюмируются результаты работы.

## 1. Основные идеи вейвлет–анализа

Вейвлет–анализ можно интерпретировать как исследование устройства функций на разных масштабах [4,5]. Идея состоит в том, чтобы производить сглаживание деталей структуры анализируемой функции на масштабах, меньших заданного параметром  $\eta$ , и исследовать полученный результат в зависимости от  $\eta$ . Вейвлет–преобразование вещественной функции одного аргумента  $f(x)$  представляет собой функцию двух переменных  $T(\eta, x)$ , которая стремится к  $f(x)$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

Формально вейвлет–преобразование определяется как свертка исследуемой функции с функцией специального вида, называемой анализирующим вейвлетом

$$T(\eta, \theta) = \eta^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi((x-\theta)/\eta) dx, \quad \eta \in (0, \infty), \quad \theta \in (-\infty, \infty). \quad (1)$$

Анализирующий вейвлет  $\psi(x)$  в общем случае является комплекснозначной функцией. Область, где вейвлет заметно отличается от нуля, имеет конечный размер и располагается вблизи начала координат. Кроме того, накладывается условие, чтобы несколько моментов вейвлета (по меньшей мере, среднее значение) обращались в нуль. В настоящей работе будет использоваться вейвлет, который называется «мексиканская шляпа»,

$$\psi(x) = (1 - x^2) \exp(-x^2/2). \quad (2)$$

В контексте нелинейной динамики вейвлет–анализ по своей природе близок к методу РГ. Как известно, идея этого метода состоит том, чтобы строить операторы эволюции системы, описывающие динамику на последовательно возрастающих временных интервалах. При этом каждый шаг увеличения временного масштаба сопровождается определенным пересчетом масштаба динамических переменных. Трансформацию оператора эволюции на последовательных шагах ренорм–преобразования можно интерпретировать как своего рода динамику, как говорят, динамику в ренорм–времени [7–9]. Проводя аналогию между методом РГ и вейвлет–анализом, можно сказать, что переменная  $\eta$ , точнее  $\log(1/\eta)$ , соответствует ренорм–времени [4,6].

Применение вейвлет–анализа позволяет выявлять свойства фракталов, получая их наглядный графический образ [4,10,11]. Если фрактальная мера  $\rho(x)$  вблизи некоторой точки локальной сингулярности  $\theta^*$  демонстрирует скейлинг с показателем  $\gamma$ ,

$$\rho(\theta^* + x) - \rho(\theta^*) \sim x^\gamma, \quad (3)$$

то соответствующая функция  $T(\eta, \theta^*)$  в зависимости от  $\eta$  изменяется по степенному закону с показателем  $\gamma-2$  [10,11]

$$T(\eta, \theta^*) \sim \eta^{\gamma-2}. \quad (4)$$

Таким образом, фрактальные свойства объекта, подвергнутого вейвлет–преобразованию, проявляются в иерархической структуре пиков, указывающих остриями в точки локальной сингулярности [10,11]. При этом чем выше пик, тем меньше соответствующая величина  $\gamma$ . Это иллюстрирует рис. 1, где построена вейвлет–диаграмма стандартного множества Кантора.

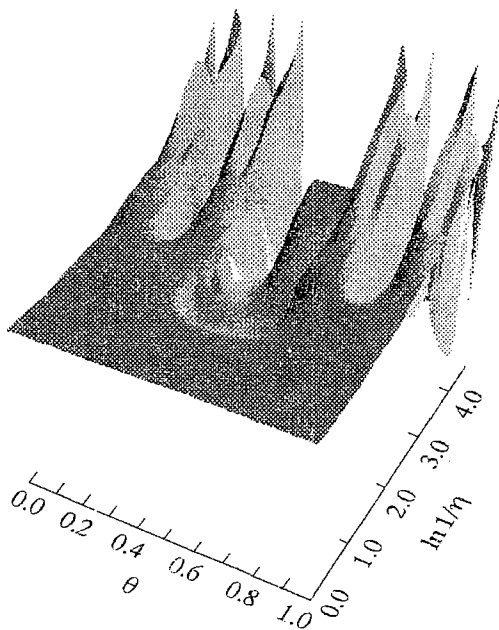


Рис. 1. Вейвлет-преобразование  $\text{sgn}(T)|T(\eta, \theta)|^{1/2}$  множества Кантора (исходный отрезок, которому приписан единичный вес, делится пополам и длина каждой из частей уменьшается на фактор  $1/3$  от длины исходного отрезка, затем эту процедуру проводят с каждым из полученных отрезков и так до бесконечности [12,13])

фазовое пространство двумерно. В этих случаях в качестве объекта вейвлет-преобразования будут выступать распределения  $\rho(x)$ ,  $\rho(y)$ , возникающие при проецировании аттрактора на некоторые оси координат в фазовом пространстве.

Рассмотрим аттрактор одномерной системы с дискретным временем. Когда аналитическое выражение для распределения  $\rho(x)$  неизвестно, его ищут численно – выбирают на координатной оси определенный интервал, разбивают его на отрезки  $[X_k, X_k + \Delta X]$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) длиной  $\Delta X$  и вычисляют распределение как относительную частоту попадания изображающей точки  $x_n$  на отрезок с номером  $k$ , то есть  $\rho(X_k) = N_k/N$ . Покажем, что вейвлет-преобразование  $\rho(x)$  можно найти, не вычисляя распределение непосредственно. Действительно, если длина отрезков разбиения  $\Delta X$  достаточно мала, то выполняется равенство

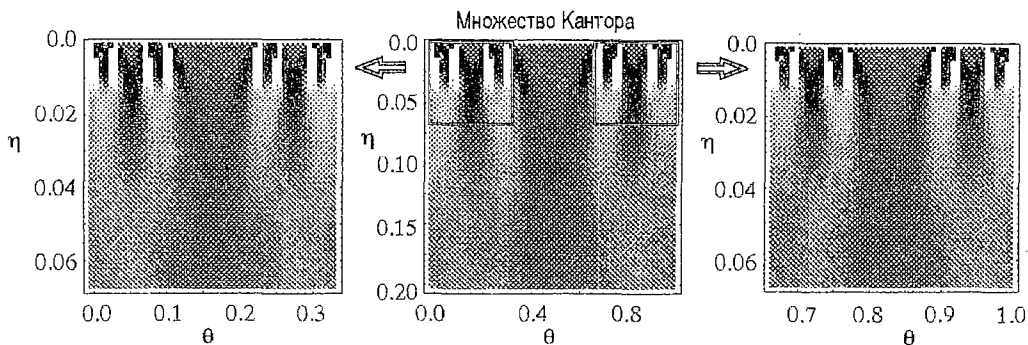


Рис. 2. Самоподобие множества Кантора. Значения  $T(\eta, \theta)$  отображены оттенками серого цвета. Светлые точки соответствуют большим значениям  $T$

В отличие от спектра размерностей  $D_q$  и скейлинг-спектра  $f(\alpha)$  [12–14], представляющих собой глобальные характеристики фрактального множества, вейвлет-преобразование содержит информацию о локальном устройстве фрактала и о взаимном расположении его элементов в пространстве. При вейвлет-преобразовании сохраняется присущее фрактальным объектам свойство самоподобия. Как видно из рис. 2, фрагменты вейвлет-диаграммы канторова множества после масштабного увеличения в 3 раза воспроизводят исходную картину.

Вейвлет-анализ может быть применен для исследования фрактальных свойств аттракторов нелинейных систем [4,6,11]. Информацию о структуре аттрактора можно получить, подвергая вейвлет-преобразованию плотность распределения инвариантной меры. Основным предметом исследования в настоящей работе будут плотности распределения  $\rho(x)$ , порождаемые модельными системами с дискретным временем на пороге возникновения хаоса. Помимо одномерного случая будут рассмотрены несколько ситуаций, когда

$$N_k \psi((X_k - \theta)/\eta) \approx \sum_{\xi} \psi((\xi - \theta)/\eta), \quad \xi \in \{x_n | X_k \leq x_n < X_k + \Delta X\}.$$

Следовательно, для вейвлет-преобразования плотности распределения  $\rho(x)$  справедлива формула

$$T(\eta, \theta) = \eta^{-2} (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} \psi((x_n - \theta)/\eta). \quad (5)$$

В дальнейшем для нахождения вейвлет-преобразований будет использоваться формула (5), что позволяет существенно упростить расчеты.

## 2. Переход к хаосу через удвоения периода

Одним из самых распространенных сценариев перехода к хаосу в нелинейных диссипативных системах является каскад бифуркаций удвоения периода. Типичной одномерной однопараметрической моделью, которая демонстрирует этот сценарий, является рекуррентное отображение с квадратичным экстремумом. Изменяя управляющий параметр отображения, можно наблюдать последовательность удвоений периода колебаний. Эта последовательность сходится по закону геометрической прогрессии к критической точке, за которой возникает хаос.

В основе РГ-анализа, применяемого для исследования этого сценария, лежит ренорм-преобразование оператора эволюции системы – двукратное увеличение масштаба времени, сопровождаемое изменением масштаба динамической переменной [7–9]. Процедуру ренорм-преобразования можно рассматривать как действие некоторого динамического оператора в функциональном пространстве, задающего так называемую ренорм-динамику. Один шаг в ренорм-времени эквивалентен удвоению периода в реальном времени. Критическая ситуация соответствует неустойчивой неподвижной точке ренорм-динамики

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)). \quad (6)$$

Решение уравнения (6), которое называется уравнением Фейгенбаума – Цвитановича [7], может быть найдено численно как разложение функции  $g(x)$  по степеням  $x^2$ . Из этого же уравнения определяется скейлинговая постоянная  $\alpha = -2.5029\dots$  Всем отображениям с квадратичным экстремумом соответствует одна и та же универсальная функция  $g(x)$ , один и тот же масштабный фактор  $\alpha$ . Говорят, что такие отображения образуют фейгенбаумовский класс универсальности, который мы будем обозначать символом F. Универсальная функция  $g(x)$  и соответствующий масштабный фактор  $\alpha$  являются своеобразными «визитными карточками» класса F.

Из уравнения (6) видно, что выделенную роль играет точка  $x=0$ , в которой, по предположению, располагается экстремум исходного отображения и функции  $g(x)$ . Эту точку мы будем называть *главным центром скейлинга*.

Оператор ренорм-преобразования, линеаризованный в окрестности фейгенбаумовской неподвижной точки, имеет дискретный спектр собственных чисел, причем (для возмущений, неустраиваемых инфинитезимальной заменой переменных) только одно по модулю больше единицы. Следовательно, размерность неустойчивого многообразия неподвижной точки ренорм-динамики равна единице. Отсюда вытекает, что фейгенбаумовский тип критического поведения на пороге хаоса реализуется в однопараметрических семействах отображений, то есть имеет коразмерность, равную единице.

Многopараметрический анализ перехода к хаосу через удвоения периода позволяет выявить среди одномерных отображений нефейгенбаумовские классы универсального поведения, которые имеют коразмерность больше единицы [1–3]. Каждому возможному классу отвечает определенная универсальная функция  $g(x)$ ,

удовлетворяющая ренорм–уравнению (6), а также универсальная масштабная постоянная  $\alpha$  [1]:

тип F («фейгенбаумовский»),  $z = 2, \text{CoDim} = 1, \alpha = -2.502907875$ ;  
 тип T («трикритичность»),  $z = 4, \text{CoDim} = 3, \alpha = -1.690302971$ ;  
 тип S («six–power»),  $z = 6, \text{CoDim} = 5, \alpha = -1.4677424503$ ;  
 тип E («eight–power»),  $z = 8, \text{CoDim} = 7, \alpha = -1.358017279$ .

Здесь  $z$  – порядок экстремума отображения,  $\text{CoDim}$  – коразмерность. Видно, что справедливо соотношение  $\text{CoDim}=z-1$ .

Экстремумом требуемого порядка может обладать не само отображение, а его итерации. Эта ситуация возникает, когда отображение имеет несколько точек экстремума или точек перегиба и управляющие параметры подобраны таким образом, что происходит отображение одной точки в другую. В этом случае соответствующее критическое поведение проявляет себя как феномен меньшей коразмерности:  $\text{CoDim}_T=2, \text{CoDim}_S=3, \text{CoDim}_E=3$ .

Обобщая РГ–анализ на многомерные отображения, демонстрирующие переход к хаосу через удвоения периода, можно прийти к уравнению [15–19]

$$G(\mathbf{x}) = AG(G(A^{-1}\mathbf{x})), \quad (7)$$

где  $G(\mathbf{x})$  – универсальная функция,  $A$  – диагональная скейлинговая матрица. При записи уравнения (7) предполагается, что система координат выбрана таким образом, что главный центр скейлинга находится в начале координат, а координатные оси отвечают направлениям, ассоциирующимся с определенными значениями масштабных констант  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  – элементов матрицы  $A$ .

У порога возникновения хаоса существенное значение имеет устройство асимптотически малой окрестности главного центра скейлинга, отвечающее за принадлежность отображения к тому или иному классу универсального поведения. Каждому классу соответствует определенное решение уравнения (7)  $G(\mathbf{x})$  и скейлинговая матрица  $A$ . Коразмерность критического поведения можно найти, изучая ренорм–динамику, линеаризованную в окрестности критической точки.

Для двумерных отображений с однонаправленной связью известно несколько классов универсальности [1,16,17]:

тип B («бикритичность»),  $\text{CoDim}=2, \alpha_1=-2.5029\dots, \alpha_2=-1.505318159$ ;

тип BT («битрикритичность»),  $\text{CoDim}=4, \alpha_1=-2.5029\dots, \alpha_2=-1.2416604$ .

Бикритичность можно наблюдать в системе двух фейгенбаумовских отображений, одно из которых воздействует на другое. Критическое поведение типа BT возникает при однонаправленном воздействии отображения, принадлежащего классу F, на отображение с критичностью T–типа.

В более общем случае взаимной связи подсистем также обнаружены классы универсального поведения [19]. Класс, получивший обозначение FQ, имеет следующие характеристики:

тип FQ («F + quasiper.»),  $\text{CoDim}=3, \alpha_1=-1.90007167, \alpha_2=-4.00815785$ .

Еще один класс, обозначаемый символом C, замечателен тем, что, в отличие от всех предыдущих случаев, критической ситуации соответствует ренорм–цикл периода 2. Критичность этого типа характеризуется двумя универсальными функциями  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ , и, соответственно, двумя скейлинговыми матрицами  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$ . Универсальные ренорм–уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\mathbf{x}) &= A^{(1)}G^{(1)}(G^{(1)}((A^{(1)})^{-1}\mathbf{x})), \\ G^{(1)}(\mathbf{x}) &= A^{(2)}G^{(2)}(G^{(2)}((A^{(2)})^{-1}\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (8)$$

Коразмерность класса C и масштабные постоянные, вычисленные за период ренорм–цикла, равны:

тип C («cycle»),  $\text{CoDim}=2, (\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})_1=6.565350, (\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})_2=22.120227$ .

### 3. Структура критических аттракторов и вейвлет-анализ: одномерные отображения

Рассмотрим одномерное модельное отображение

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1 - \lambda|x_n|^z. \quad (9)$$

Здесь  $\lambda$  выступает в роли управляющего параметра, изменяя который, можно наблюдать каскад бифуркаций удвоения периода. Когда  $\lambda$  достигает определенного порогового значения, в системе возникает хаос. В зависимости от величины  $z$  поведение системы в критической точке может принадлежать различным классам универсальности:

тип F,  $z = 2$ ,  $\lambda_c = 1.401155189092$ ;

тип T,  $z = 4$ ,  $\lambda_c = 1.594901356229$ ;

тип S,  $z = 6$ ,  $\lambda_c = 1.6832601982$ ;

тип E,  $z = 8$ ,  $\lambda_c = 1.736452374$ .

Далее предполагаем, что параметр  $\lambda$  выбран точно равным соответствующему критическому значению.

Процедуру построения критического аттрактора одномерного отображения можно представить геометрически следующим образом [20]. Обозначим через  $\mathfrak{S}_0$  критический аттрактор отображения (9), а через  $s_0=0$  – главный центр скейлинга. Стартуя из точки  $x_0=s_0$ , при итерациях отображения получаем набор точек  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , принадлежащих  $\mathfrak{S}_0$ . Их взаиморасположение таково, что на нулевом шаге конструирования (рис. 3) можно записать

$$\mathfrak{S}_0 \in [x_2, x_1].$$

На следующем, первом шаге построения рассмотрим отображение за две итерации  $f^{(2)}$ . Это отображение имеет два аттрактора,  $\mathfrak{S}_1^0$  и  $\mathfrak{S}_1^1$ , которые являются подмножествами  $\mathfrak{S}_0$  (см. рис. 3). Если стартовать из точки  $s_1^0=s_0$ , то порождаемая отображением  $f^{(2)}$  траектория выходит на аттрактор  $\mathfrak{S}_1^0$ . Точку  $s_1^0$  будем называть центром скейлинга этого аттрактора. Если же взять в качестве начальной точку  $s_1^1$ , удовлетворяющую уравнению  $f(s_1^1)=s_0$ , то траектория придет к другому аттрактору отображения  $f^{(2)}$ , а именно  $\mathfrak{S}_1^1$ . Его центром скейлинга служит точка  $s_1^1$ . Так как  $\mathfrak{S}_1^0 \in [x_2, x_4]$ ,  $\mathfrak{S}_1^1 \in [x_3, x_1]$  и  $\mathfrak{S}_0 \in \mathfrak{S}_1^0 \cup \mathfrak{S}_1^1$ , то имеем

$$\mathfrak{S}_0 \in [x_2, x_4] \cup [x_3, x_1].$$

Рассматривая таким образом шаг за шагом отображения  $f^{(4)}, f^{(8)}, \dots$ , на  $n$ -ом шаге заключаем, что аттрактор  $\mathfrak{S}_0$  принадлежит объединению  $2^n$  интервалов

$$\mathfrak{S}_0 \in \bigcup_{i=1}^{2^n} [x_i, x_{i+2^n}].$$

В окрестности главного центра скейлинга  $s_0$  аттрактор обладает самоподобием, что следует из уравнения (6). Фрагмент  $\mathfrak{S}_1^0$  после масштабного увеличения в  $\alpha$  раз воспроизводит приближенно структуру всего аттрактора  $\mathfrak{S}_0$ . Символически это можно записать как

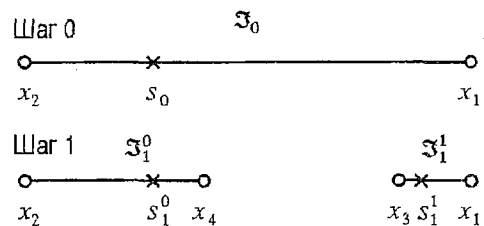


Рис. 3. Геометрическое конструирование критического аттрактора одномерного отображения

$$\mathfrak{S}_0 \approx \alpha \mathfrak{S}_1^0. \quad (10)$$

Иными словами, любой точке аттрактора  $\mathfrak{S}_1^0$  отвечает точка аттрактора  $\mathfrak{S}_0$ , отличающаяся множителем  $\alpha$ . Можно записать также аналитическое соотношение, связывающее  $\mathfrak{S}_0$  и  $\mathfrak{S}_1^1$ . Принимая во внимание равенство  $f(\mathfrak{S}_1^1) = \mathfrak{S}_1^0$  и формулу (10), имеем

$$\mathfrak{S}_0 \approx \alpha s_0 + \alpha f'(s_1^1)(\mathfrak{S}_1^1 - s_1^1). \quad (11)$$

Рассмотрим снова переход с нулевого уровня построения на первый. Для каждого из аттракторов отображения  $f^{(2)}$ ,  $\mathfrak{S}_1^0$  и  $\mathfrak{S}_1^1$  можно записать соотношения подобия. Они совпадают с (10) и (11), но в качестве масштабных множителей фигурируют величины  $\alpha$  и  $\alpha(f^{(2)})'$ . Как можно убедиться непосредственно, множители  $\alpha f'$  и  $\alpha(f^{(2)})'$  отличаются друг от друга незначительно и приблизительно равны  $\alpha$ . Это равенство становится точным в асимптотике, при рассмотрении глубоких уровней построения. Можно сказать, что структура критического аттрактора вблизи правой границы воспроизводится при пересчете масштаба на фактор  $\alpha$ . Это приводит нас к альтернативной форме ренорм-уравнения [21]

$$g(x) = \alpha^z (g(g(x/\alpha^z + s_1^1)) - s_1^1). \quad (12)$$

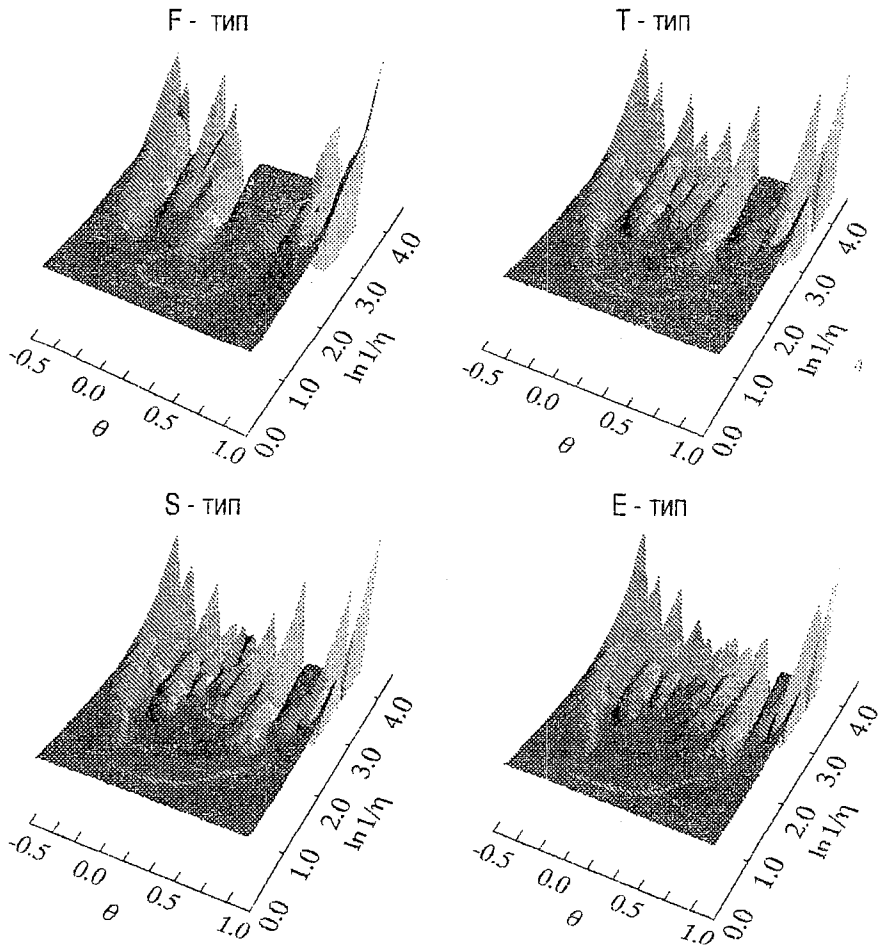


Рис. 4. Вейвлет-преобразования  $\text{sgn}(T)[|T(\eta, \theta)|]^{1/2}$  критических аттракторов F-, T-, S- и E-типов, порождаемых отображением (9) при различных значениях  $z$

(Оказывается, что универсальные ренорм-уравнения можно записать не только для главного центра скейлинга и правой границы аттрактора, но и для других его точек [22]).

Хорошей аппроксимацией критического аттрактора служит двухмасштабное множество Кантора, которое строится по следующему правилу: исходный отрезок единичного веса делят пополам, одну из частей уменьшают на фактор  $|\alpha|^{-1}$  от

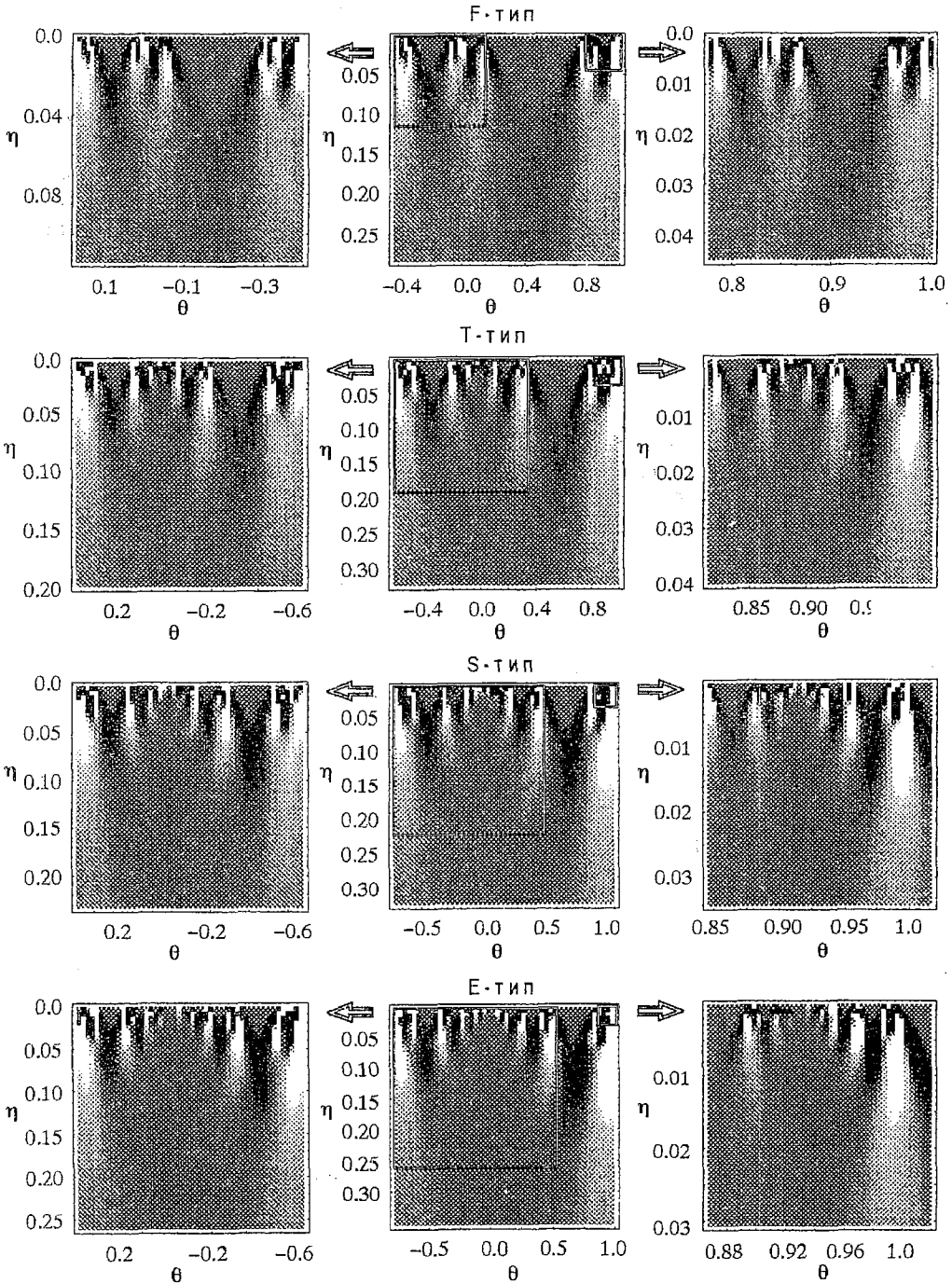


Рис. 5. Самоподобие критических аттракторов F-, T-, S- и E-типов, порождаемых отображением (9) при различных значениях  $z$



длины исходного отрезка, а другую – на фактор  $|\alpha|^{-z}$ , затем то же самое проделывают с каждым из полученных на предыдущем шаге отрезков, и так до бесконечности [12,14,23–25].

Вычислим по формуле (5) вейвлет–преобразования критического аттрактора отображения (9) при различных значениях показателя  $z$  (рис. 4). Как видно из рисунка, с увеличением  $z$  вейвлет–диаграммы становятся все более и более похожими друг на друга. Диаграмма аттрактора F–типа имеет две четко выраженные области, где концентрируются точки сингулярности. Каждая из этих областей, в свою очередь, также подразделяется на две части, и так далее. В меньшей степени эта иерархия заметна на вейвлет–диаграмме аттрактора T–типа, а для S– и E–типов точки сингулярности распределены сравнительно однородно. Это объясняется тем, что с увеличением  $z$  фактор  $|\alpha|^{-z}$  убывает, а фактор  $|\alpha|^{-1}$  становится доминирующим. Концентрация высоких пиков вблизи краев на вейвлет–диаграммах и ее спад около нуля говорит о том, что в окрестности главного центра скейлинга преобладают точки с более высоким скейлинговым показателем (см. (3) и (4)). Действительно, используя аппроксимацию канторовым множеством, можно найти, что этот показатель в центре скейлинга равен  $\ln 2 / \ln |\alpha|$ , а в правой граничной точке –  $\ln 2 / (z \ln |\alpha|)$ .

Рис. 5 иллюстрирует свойство самоподобия критических аттракторов различных типов. На центральных диаграммах изображены вейвлет–преобразования, а слева и справа приведены их фрагменты, масштабно увеличенные в  $\alpha$  и в  $\alpha^z$  раз, соответственно. Видно, что также, как и в случае канторова множества (см. рис. 2), аттракторы образованы объединением двух своих фрагментов, каждый из которых воспроизводит аттрактор в целом.

#### 4. Структура критических аттракторов и вейвлет–анализ: двумерные отображения

Обратимся теперь к обсуждению критического поведения двумерных отображений. Рассмотрим отображение

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (13)$$

где  $F$  – оператор эволюции, а  $x_n \in \mathbb{R}^2$  – двумерный вектор. Будем считать, что отображение находится на пороге перехода к хаосу, в точке накопления бифуркаций удвоенного периода. Обозначим главный центр скейлинга через  $s_0$ .

Критический аттрактор  $\mathfrak{Z}_0$  отображения (13) можно сконструировать по аналогии с одномерным случаем [16,19]. На нулевом шаге рассматриваем итерации главного центра скейлинга:  $x_0 = s_0$ ,  $x_1 = F(x_0)$ ,  $x_2 = F^2(x_0)$ . Каждой из этих точек

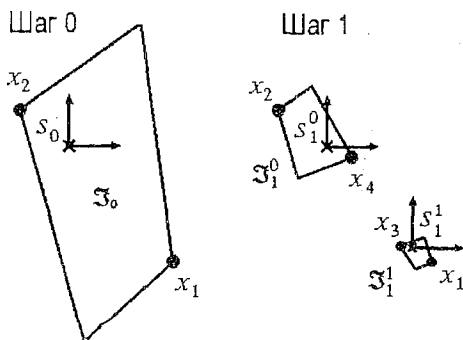


Рис. 6. Геометрическое конструирование критического аттрактора двумерного отображения

можно приписать пару направлений. В точке  $x_0$  эти направления задаются единичными векторами  $i_0 = (1, 0)$ ,  $j_0 = (0, 1)$ . В точках  $x_1$  и  $x_2$  направления  $i_1, j_1$  и  $i_2, j_2$  можно найти, рассмотрев, как трансформируются при итерациях малые возмущения вдоль  $i_0$  и  $j_0$ . Проведя прямые линии вдоль векторов  $i_1, j_1, i_2, j_2$ , получаем четырехугольную область, которой принадлежит аттрактор  $\mathfrak{Z}_0$  (рис. 6).

На первом шаге аналогичным образом рассматриваем отображение за две итерации  $F^2$ . Это отображение имеет два аттрактора,  $\mathfrak{Z}_1^0$  и  $\mathfrak{Z}_1^1$ ,

$\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}_1^0 \cup \mathfrak{S}_1^1$  (см. рис. 6). Траектория, стартующая из  $s_1^0 = s^0$ , попадает на аттрактор  $\mathfrak{S}_1^0$ . Точку  $s_1^0$  будем называть центром скейлинга этого аттрактора. Если же траектория начинается в точке  $s_1^1$ ,  $F(s_1^1) = s_0$ , то она выходит на аттрактор  $\mathfrak{S}_1^1$ , центр скейлинга которого расположен в точке  $s_1^1$ . На этом шаге мы находим четырехугольные области, заключающие в себе аттракторы  $\mathfrak{S}_1^0$  и  $\mathfrak{S}_1^1$ . Затем, на втором шаге рассматриваем отображение за четыре итерации  $F^{(4)}$  и находим четыре области, потом восемь, шестнадцать и так далее. Это можно интерпретировать как процедуру построения двумерного обобщения канторова множества.

Как можно заключить из уравнения (7), критический аттрактор отображения (13) в окрестности главного центра скейлинга должен обладать свойством самоподобия. Символически это можно записать как

$$\mathfrak{S}_0 \approx A\mathfrak{S}_1^0. \quad (14)$$

Используя (14) и соотношение  $F(\mathfrak{S}_1^1) = \mathfrak{S}_1^0$ , получим формулу, которая устанавливает соотношение между  $\mathfrak{S}_0$  и  $\mathfrak{S}_1^1$ ,

$$\mathfrak{S}_0 \approx A s_0 + AJ(s_1^1)(\mathfrak{S}_1^1 - s_1^1). \quad (15)$$

Здесь  $J(s_1^1)$  – матрица Якоби отображения  $F$  в точке  $s_1^1$ , которая в общем случае не является диагональной. Чтобы наблюдать самоподобие критического аттрактора в окрестности точки  $s_1^1$ , нужно, следовательно, произвести преобразование координат, диагонализующее матрицу  $AJ(s_1^1)$ . В частности, это означает, что для проекций на координатные оси двумерного критического аттрактора канторово множество, вообще говоря, не является адекватной аппроксимацией.

#### 4.1. Бикритический аттрактор. Модельное отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - A y_n^2 - B x_n^2 \quad (16)$$

при значении связи  $B=0.375$  находится в бикритической точке, когда управляющие параметры принимают значения [1]

$$\lambda_c = 1.40115518092, \quad A_c = 1.124981403.$$

Главный центр скейлинга расположен в начале координат,  $s_0 = (0,0)$ .

На рис. 7 построена вейвлет–диаграмма  $y$ –проекции бикритического аттрактора. Видно, что имеются две области концентрации пиков, соответствующих точкам сингулярности. Однако внутри этих областей пики распределены более или менее однородно, то есть не наблюдается характерная для канторова множества иерархия, когда каждая из двух областей разделена на две части, в свою очередь также состоящие из двух частей, и так далее.

Рассмотрим окрестность главного центра скейлинга и перейдем к отображению за четыре итерации  $F^{(4)}$ . Из уравнения  $F^{(4)}(s_1^1) = s_0$  найдем  $s_1^1$  и вычислим соответствующую матрицу Якоби:

$$\text{тип В, } s_1^1 = (0.1327562, 0.2015083), \quad J(s_1^1) = \begin{pmatrix} -2.2449776 & 0 \\ -1.7879799 & -1.4496514 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

На рис. 8 построена вейвлет–диаграмма  $y$ –проекции критического аттрактора отображения (16) за четыре итерации  $F^{(4)}$ . Диаграмма обладает самоподобием в окрестности  $y$ –координаты главного центра скейлинга. Фрагмент, изображенный слева с увеличением в  $\alpha_2$  раз, воспроизводит диаграмму в целом. Такой же фрагмент в правой части вейвлет–диаграммы выделить не удастся. Это

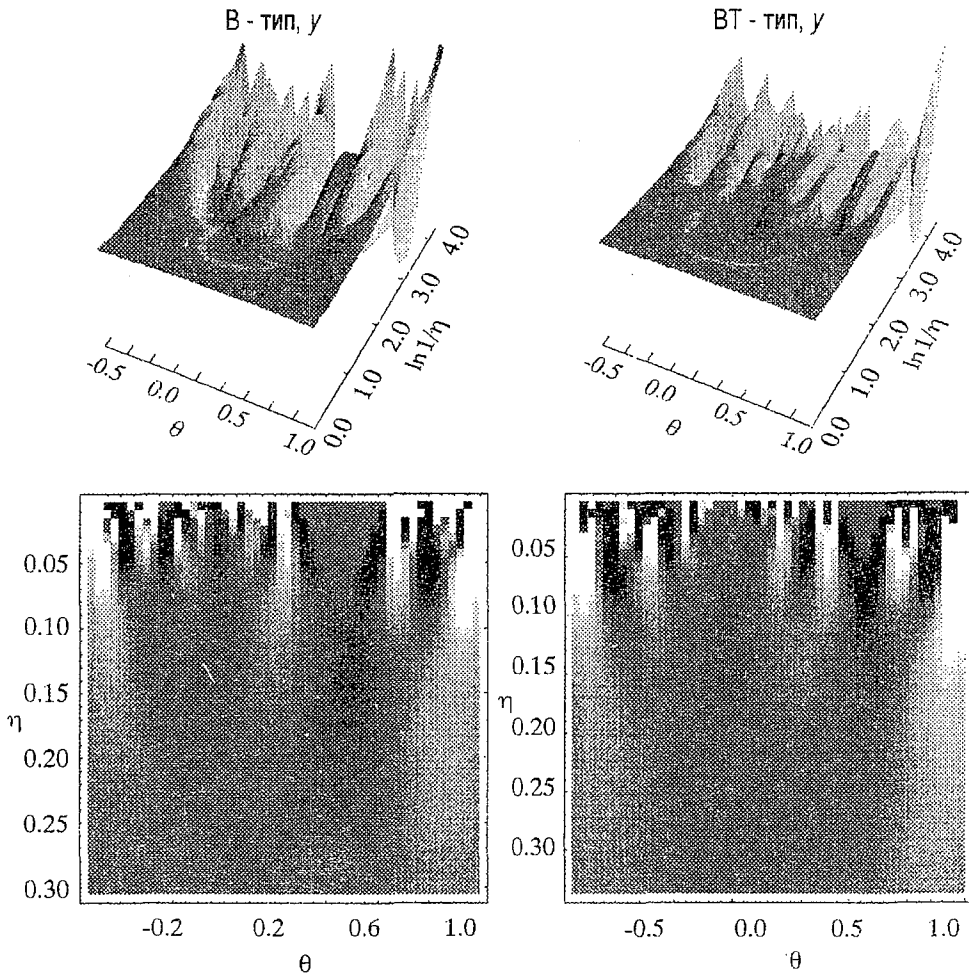


Рис. 7. Вейвлет-преобразования  $u$ -проекции критических аттракторов В- и ВТ-типов, порождаемых отображениями (16) и (18). На диаграммах верхнего ряда построена функция  $\text{sgn}(T)[|T(\eta, \theta)|]^{1/2}$

объясняется тем, что матрица Якоби (17), которая фигурирует в формуле (15), не диагональна. Для построения правой диаграммы взят аттрактор отображения за восемь итераций  $F^{(8)}$  с центром скейлинга  $s_1^1$ . Аттрактор подвергнут преобразованию по формуле (15), и для  $u$ -проекции построена вейвлет-диаграмма.

Таким образом,  $u$ -проекция критического аттрактора отображения (16) имеет неканторову структуру. Тем не менее, нужно отметить, что если рассматривать мультифрактальные характеристики, то есть спектр размерностей и спектр сингулярностей, то  $u$ -проекция бикритического аттрактора достаточно хорошо аппроксимируется двухмасштабным множеством Кантора, построенного с масштабными множителями  $|\alpha_2|^{-1}$  и  $|\alpha_2|^{-2}$  [16]. Вейвлет-анализ выявляет неидентичность локального устройства этих множеств.

#### 4.2. Битри критический аттрактор. Отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad y_{n+1} = 1 - P y_n^4 - Q x_n^2 \quad (18)$$

при значении параметра связи  $Q=0.375$  демонстрирует критичность ВТ-типа, когда управляющие параметры имеют следующие значения [1]:

$$\lambda_c = 1.40115518092, \quad P_c = 1.279735.$$

Главный центр скейлинга находится в точке  $s_0=(0,0)$ .

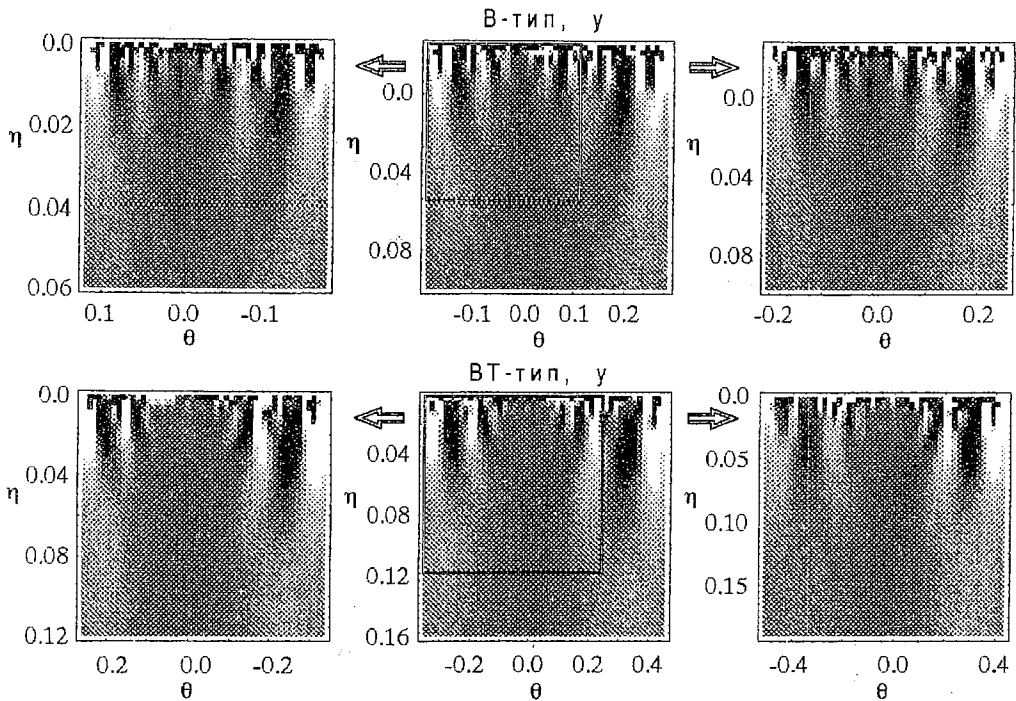


Рис. 8. Самоподобие  $y$ -проекций критических аттракторов В- и ВТ-типов, порождаемых отображениями (16) и (18), взятых за четыре итерации

На рис. 7 построена вейвлет-диаграмма  $y$ -проекции бикритического аттрактора. Для отображения  $F^{(4)}$  центр скейлинга  $s_1^1$  и матрица Якоби имеют вид:

$$\text{тип ВТ, } s_1^1 = (0.1327562, 0.3463247), \quad J(s_1^1) = \begin{pmatrix} -2.2449776 & 0 \\ -3.1895788 & -2.3494498 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Рис. 8 иллюстрирует свойство самоподобия аттрактора ВТ-типа. Как и для бикритической ситуации, на этом рисунке построены вейвлет-диаграммы  $y$ -проекции аттрактора отображения  $F^{(4)}$ . Центральная и левая диаграммы связаны масштабным пересчетом в  $\alpha_2$  раз, а диаграмма справа построена для аттрактора отображения  $F^{(8)}$ , который подвергнут преобразованию (15).

#### 4.3. Аттрактор FQ-типа. Модельное отображение

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + dx_n y_n, \quad y_{n+1} = 1 - bx_n y_n \quad (20)$$

при значении параметра связи  $d=0.3$  имеет критическую точку FQ при [1]

$$a_c = 1.767192895, \quad b_c = 1.629678013.$$

Главный центр скейлинга находится в точке  $s_0=(0,0)$ .

На рис. 9 построены вейвлет-диаграммы  $x$ - и  $y$ -проекций аттрактора FQ-типа. На диаграмме  $x$ -проекции видна канторова иерархия областей, где концентрируются точки сингулярности. В то же время на диаграмме  $y$ -проекции сингулярности распределены более сложным образом.

Самоподобие аттрактора FQ-типа можно наблюдать, перейдя к так называемым скейлинговым переменным [19],

$$X = x, \quad Y = y + 2.1091x. \quad (21)$$

Координаты точки  $s_1^1$  и соответствующая матрица Якоби  $J(s_1^1)$ , вычисленные в скейлинговых переменных, таковы:

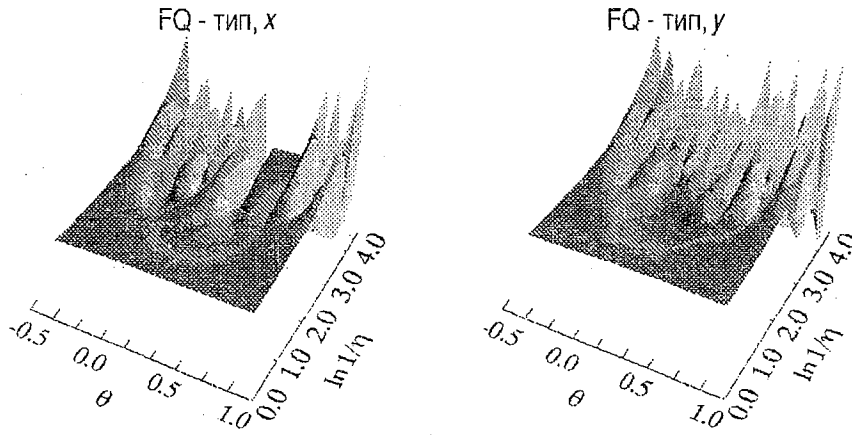


Рис. 9. Вейвлет-преобразования  $\text{sgn}(T)[|T(\eta, \theta)|]^{1/2}$   $x$ - и  $y$ -проекций критического аттрактора FQ-типа отображения (20)

тип FQ,  $s_1^{-1} = (0.8185582, -0.9767877)$ ,  $J(s_1^{-1}) = \begin{pmatrix} -2.1502842 & 0.2455674 \\ 0.4999927 & -1.8519127 \end{pmatrix}$  (22)

Свойство самоподобия иллюстрирует рис. 10, на котором приведены вейвлет-диаграммы  $X$ - и  $Y$ -проекций аттрактора в скейлинговых переменных (21). Фрагменты, выделенные на центральных диаграммах, изображены слева после масштабного увеличения в  $\alpha_1$  раз для компоненты  $x$  и в  $\alpha_2$  для компоненты  $y$ . Справа построены вейвлет-диаграммы аттрактора системы за две итерации после преобразования его по формуле (15).

#### 4.4. Аттрактор $C$ -типа. Отображение

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n, \quad y_{n+1} = -x_n^2 + dy_n \quad (23)$$

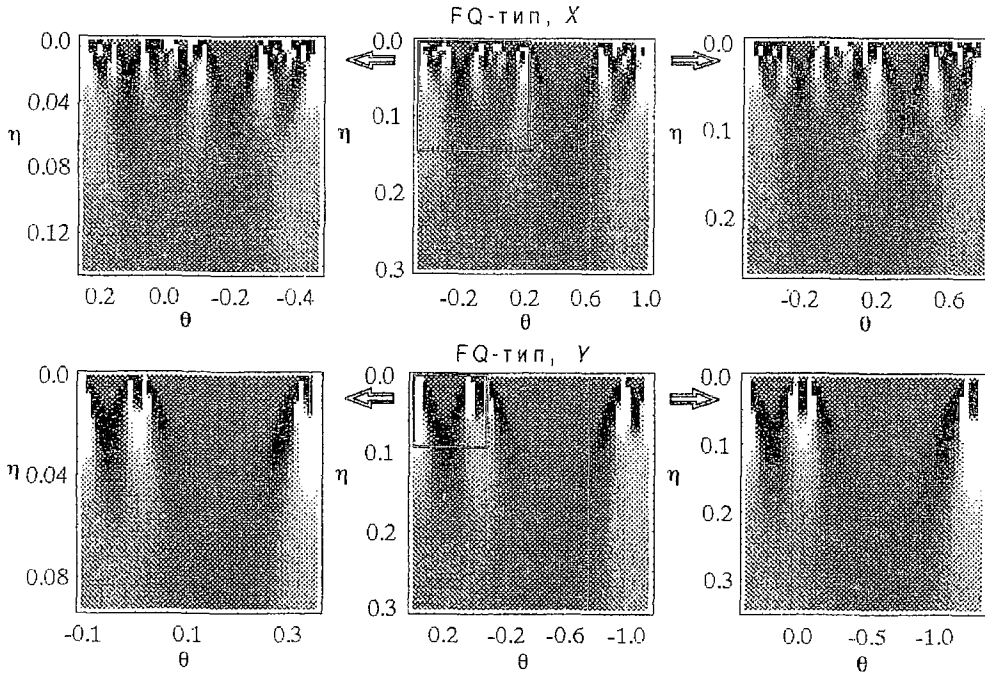


Рис. 10. Самоподобие  $X$ - и  $Y$ -проекций критического аттрактора FQ-типа отображения (20). При построении использованы скейлинговые переменные (21)

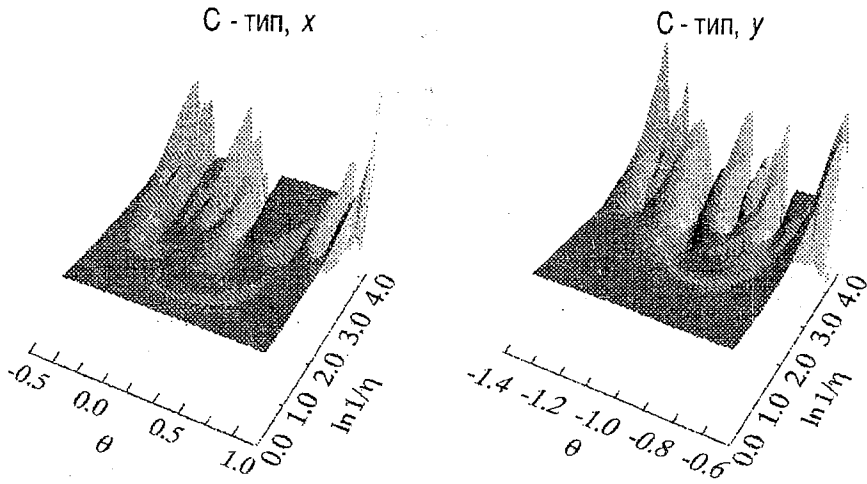


Рис. 11. Вейвлет-преобразования  $\text{sgn}(T)[|T(\eta, \theta)|]^{1/2}$  критического аттрактора С-типа отображения (23)

при значении параметра связи  $b = -0.6663$  демонстрирует критическое поведение С-типа если взять следующие значения управляющих параметров [1]:

$$a_c = 0.24990280, \quad d_c = 0.45290288.$$

При этом главный центр скейлинга находится в точке  $s_0 = (0, -1.316447534)$ .

На рис. 11 построены вейвлет-диаграммы проекций аттрактора С-типа. Отметим сильное внешнее сходство диаграммы  $x$ -проекции с вейвлет-диаграммой одномерного критического аттрактора F-типа (см. рис. 4).

Как уже говорилось в разделе 2, класс С характеризуется тем, что в критической точке имеет место ренорм-цикл периода 2. Построим вейвлет-диаграмму для аттрактора С-типа, выделим на ней некоторый фрагмент и масштабно увеличим его, затем на нем выделим и увеличим фрагмент и так далее. Получаемые таким образом диаграммы должны повторяться с периодом 2. Это иллюстрирует рис. 12, где изображены вейвлет-диаграммы  $x$ - и  $y$ -проекций аттрактора отображения (23), а также аттракторов отображений  $F^{(2)}$ ,  $F^{(4)}$  и  $F^{(8)}$  с центром скейлинга  $s_0$ .

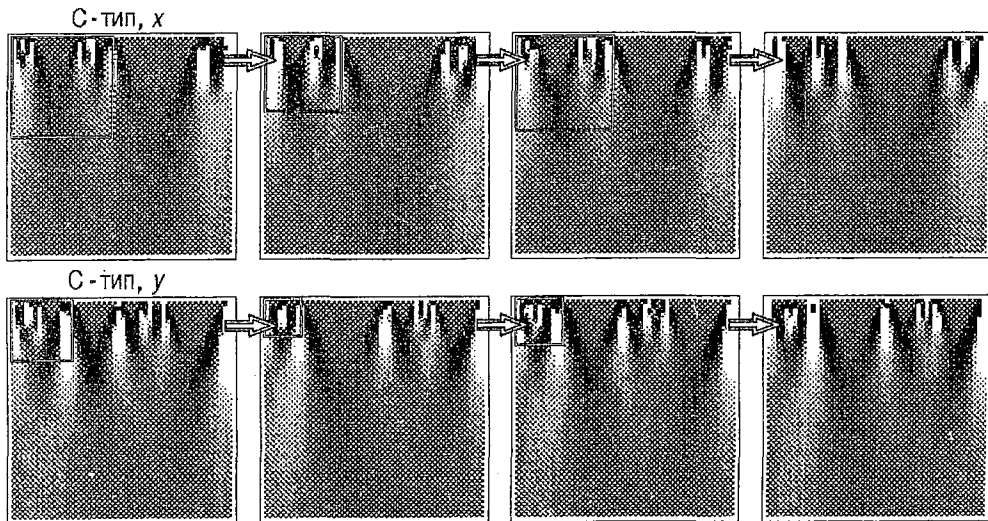


Рис. 12. Самоподобие  $x$ - и  $y$ -проекций критического аттрактора С-типа. Для построения диаграмм слева взято отображение (23), затем, слева направо, —  $F^{(2)}$ ,  $F^{(4)}$  и  $F^{(8)}$

## Заключение

Вейвлет–анализ – это мощный инструмент исследования фрактальных объектов. В настоящей работе он используется для изучения структуры одно– и двумерных критических аттракторов отображений на пороге накопления бифуркаций удвоения периода. Построенные вейвлет–диаграммы дают представление об устройстве критических аттракторов, позволяют судить о распределении точек локальной сингулярности. Сопоставление вейвлет–диаграмм выявляет общие закономерности построения аттракторов и дает возможность обнаружить характерные черты, присущие разным классам универсальности.

Одно из возможных направлений развития данной темы связано с исследованием многомерных аттракторов. В настоящей работе при изучении двумерных аттракторов строятся вейвлет–диаграммы их проекций на координатные оси. Альтернативой этому может быть использование так называемого многомерного вейвлет–анализа, когда производится свертка исследуемой функции нескольких переменных с многомерным вейвлетом [4]. Развитие такого подхода, по всей видимости, позволит получить дополнительную информацию об устройстве многомерных аттракторов.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 97–02–16414.*

## Библиографический список

1. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I.R. A variety of period–doubling universality classes in multi–parameter analysis of transition to chaos // *Physica D*, 1997. Vol. 109. P. 91.
2. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Three–parameter scaling for one–dimensional maps // *Phys.Lett. A*. 1994. Vol. 189. P. 367.
3. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу через удвоения периода в диссипативных динамических системах // *Регулярная и хаотическая динамика*. 1997. Т. 2, № 3/4. С. 90.
4. Arneodo A., Argoul F., Bacry B., Elezgaray J., Freysz E., Grasseau G., Muzy J. F., Pouligny B. Wavelet transform of fractals // *Wavelets and applications* / Ed. Meyer Y., Masson and Springer–Verlag, 1992. P. 286.
5. Даценко Н.М., Сонечкин Д.М. Вейвлетный анализ временных рядов и динамика атмосферы // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1993. Т.1, №2. С. 9.
6. Arneodo A., Argoul F., Elezgaray J., Grasseau G. // *Nonlinear Dynamics* / Ed. Turchetti G., Singapore, World Scientific, 1988. P. 130.
7. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J.Stat.Phys.* 1978. Vol. 19. P. 25.
8. Feigenbaum M.J. The universal metric properties of nonlinear transformations // *J.Stat.Phys.* 1979. Vol. 21. P. 669.
9. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // *УФН*. 1983. Т.141, № 3. С. 343.
10. Holschneider M. On the wavelet transform of fractal objects // *J.Stat.Phys.* 1988. Vol. 50. P. 963.
11. Arneodo A., Grasseau G., Holschneider M. Wavelet transform of multifractals // *Phys.Rev.Lett.* 1988. Vol. 61, № 20. P. 2281.
12. Schroeder M. *Fractals, Chaos, Power Laws*. New York, Freeman & C, 1991.
13. Федер Е. *Фракталы*. М.: Мир, 1991.
14. Halsey T.S., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I. Fractal measures and their singularities // *Phys.Rev.* 1986. Vol. A33. P. 1141.
15. Eckmann J.P., Koch H., Wittwer P. Existence of a fixed point of the doubling transformation for area preserving maps of plane // *Phys.Rev.A*. 1982. Vol. 26. P. 720.
16. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Bicritical dynamics of period–

doubling systems with unidirectional coupling // Int J. Bifurc. and Chaos. 1991. Vol. 1, № 4. P. 839.

17. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Variety of types of critical behavior and multistability in period-doubling systems with unidirectional coupling near the onset of chaos // Int J. Bifurc. and Chaos. 1993. Vol. 3. P. 139.

18. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* New types of critical dynamics for two-dimensional maps // Phys.Lett.A. 1992. Vol. 162. P. 236.

19. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Period doubling for two-dimensional non-invertible maps: Renormalization group analysis and quantitative universality // Physica D. 1997. Vol. 101. P. 249.

20. *Crutchfield J.P., Farmer J.D., Huberman B.A.* Fluctuations and simple chaotic dynamics // Phys.Rep. 1982. Vol. 92. P. 45.

21. *Couillet P., Tresser C.J.* Iterations d'endomorphismes et groupe de renormalisation // J.de Phys Coll. 1978. Vol. 39. P. 25.

22. *Chang S.J., Fendley P.R.* Scaling and universal behavior on bifurcation attractor // Phys. Rev.A. 1986. Vol. 33, № 6. P. 4092.

23. *Grassberger P.* On the Hausdorff dimension of fractal attractors // J.Stat.Phys. 1981. Vol. 26. P. 173.

24. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D. 1983. Vol. 9. P. 189.

25. *Chang S.J., McCown J.* Universal exponent and fractal dimensions of Feigenbaum attractors // Phys.Rev.A. 1984. Vol. 30. P. 1149.

*Институт радиотехники  
и электроники РАН,  
Саратовский филиал*

*Поступила в редакцию 3.06.99*

## WAVELET ANALYSIS OF CRITICAL ATTRACTORS

*P.V. Kuptsov, S.P. Kuznetsov*

Wavelet analysis is developed for critical attractors of one- and two-dimensional maps at the threshold of the chaos onset via period-doubling cascades. Numerically calculated wavelet diagrams are presented and discussed relating to critical attractors of different universality classes.



*Купцов Павел Владимирович* – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского университета (1994). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1998). Область научных интересов – нелинейная динамика, теория критических явлений. Автор нескольких научных работ по этой теме.



*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Опубликовал свыше 100 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора в 1995 году читал лекции по нелинейной теории колебаний в Датском техническом университете.

E-mail: [kuz@spkuz.saratov.ru](mailto:kuz@spkuz.saratov.ru)