



## ПОТЕРЯ синхронизации хаоса в связанных системах Ресслера

*В.В. Астахов, А.Г. Баланов, О.В. Сосновцева, Т.Е. Вадивасова*

В работе исследуется процесс потери полной синхронизации хаоса во взаимодействующих осцилляторах, демонстрирующих каскад бифуркаций удвоения периода. Показано, что бифуркации основного семейства седловых циклов, встроенных в хаотический аттрактор, приводят к потере грубости синхронного режима и появлению предельных множеств, расположенных в окрестности симметричного подпространства. Бифуркации несимметричных предельных множеств, в свою очередь, ведут к формированию сложной структуры бассейнов притяжения. Потеря синхронизации завершается переходом к режиму гиперхаоса, который возникает в результате объединения определенных хаотических множеств.

Исследование явления синхронизации в связанных хаотических системах является одной из важных задач нелинейной динамики, имеющих большое фундаментальное и прикладное значение во многих областях науки и техники.

Одним из простейших видов взаимного согласования движений взаимодействующих хаотических систем является так называемая полная синхронизация хаоса. В связанных идентичных колебательных системах возможна ситуация, когда выше некоторого порогового значения коэффициента связи колебания подсистем полностью совпадают  $x_1(t) = x_2(t)$ , где  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  – фазовые координаты первого и второго осциллятора, соответственно, [1–5].

Переход к несинхронному поведению в системах с симметричным инвариантным многообразием происходит довольно сложным образом [6,7] и сопровождается такими эффектами, как «пузырение» аттрактора (bubbling of an attractor) [8], «изрешечивание» бассейнов притяжения (riddled basins) [9] и др. «Пузырение» представляет собой вид перемежающейся синхронизации, которая индуцируется малым шумовым воздействием или незначительной расстройкой подсистем, и обусловлено переходом к негрубому режиму синхронизации. «Изрешечивание» бассейна притяжения состоит в том, что в малой окрестности симметричного хаотического аттрактора появляется множество начальных условий, стартуя с которых, можно попасть на другие притягивающие множества.

Данные эффекты непосредственно связаны с бифуркациями седловых циклов, встроенных в синхронный хаотический аттрактор, что было продемонстрировано на разных примерах динамических систем [6,10–13].

В работе [12] для связанных логистических отображений было показано, что процесс потери полной синхронизации хаоса определяется поведением основного семейства седловых симметричных циклов, на базе которых в результате каскада бифуркаций удвоения периода образован синхронный хаотический аттрактор.

Потеря синхронизации начинается с бифуркации удвоения седлового цикла периода один. После нее режим синхронизации становится негрубым, в окрестности симметричного подпространства рождается седловой цикл удвоенного периода. Небольшая расстройка подсистем индуцирует «пузырение». Бифуркация седлового цикла периода два, расположенного вне симметричного подпространства, ведет к формированию сложной структуры бассейна притяжения. В малой окрестности синхронного хаотического аттрактора появляется множество начальных условий, стартуя с которых, фазовая траектория уходит на несимметричный цикл.

Обсуждаемая в [12] модель является простейшим примером взаимодействующих систем с переходом к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. В настоящей работе потеря синхронизации хаоса исследуется в более сложной модели взаимодействующих систем с удвоением периода: в двух связанных осцилляторах Ресслера. С увеличением размерности фазового пространства и числа существенных параметров связанных систем ситуация усложняется. Тем не менее, в системе с непрерывным временем в виде двух связанных идентичных осцилляторов Ресслера существуют сечения пространства параметров, при движении по которым просматривается такой же бифуркационный механизм потери полной синхронизации хаоса, как и в связанных логистических отображениях. Бифуркации основного семейства седловых циклов, встроенных в хаотический аттрактор, приводят к потере грубости синхронного режима и появлению предельных множеств, расположенных в окрестности симметричного подпространства. Бифуркации несимметричных предельных множеств ведут к формированию сложной структуры бассейнов притяжения. Кроме того, продемонстрировано, что потеря синхронизации в связанных системах Ресслера завершается переходом к режиму гиперхаоса, который возникает в результате объединения симметричных и несимметричных хаотических множеств.

Рассмотрим связанные осцилляторы Ресслера в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_0 y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon (x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_0 x_{1,2} + \alpha y_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= \beta + z_{1,2}(x_{1,2} - \mu), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_{1,2}$ ,  $y_{1,2}$ ,  $z_{1,2}$  – динамические переменные первого и второго осцилляторов;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  – параметры, управляющие динамикой индивидуальной системы;  $\varepsilon$  – коэффициент связи;  $\omega_0$  – базовая частота подсистем.

Система (1) в широкой области значений управляющих параметров демонстрирует различные регулярные и хаотические синхронные режимы колебаний. В связанных осцилляторах Ресслера с увеличением  $\mu$  на базе симметричного цикла периода один ( $C_0$ ) происходит каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого возникает множество симметричных  $2^N$ -тактных циклов ( $2^N C_0$ , где  $N=0,1,2,\dots$ ). Рассмотрим поведение взаимодействующих осцилляторов Ресслера в зависимости от  $\mu$  и  $\varepsilon$  при фиксированных  $\alpha=0.15$ ,  $\beta=0.2$ ,  $\omega_0=0.97$ .

На рис. 1 на плоскости управляющих параметров ( $\mu, \varepsilon$ ) построены линии бифуркационных значений основного семейства циклов  $2^N C_0$ . На горизонтальных линиях старший мультипликатор циклов принимает значение, равное минус единице. На наклонных линиях второй мультипликатор седловых циклов равен минус единице. При значениях  $\varepsilon$  справа от бифуркационной линии седлового цикла  $C_0$  последовательность бифуркаций завершается появлением хаотического аттрактора, расположенного в симметричном подпространстве  $x_1=x_2$ ,  $y_1=y_2$ ,  $z_1=z_2$  объединенного фазового пространства связанных систем. С дальнейшим

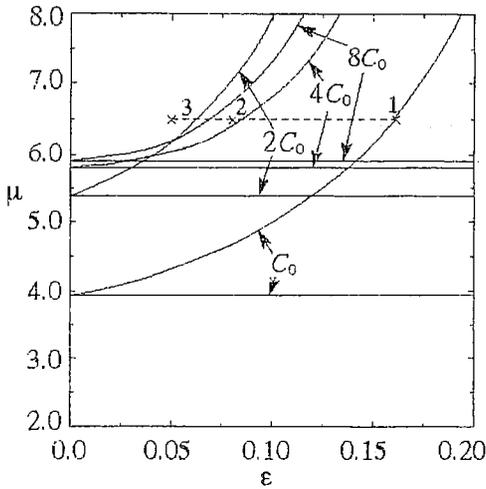


Рис. 1. Линии бифуркационных значений основного семейства циклов  $2^N C_0$  на плоскости управляющих параметров при  $\alpha=0.15$ ,  $\beta=0.2$ ,  $\omega_0=0.97$

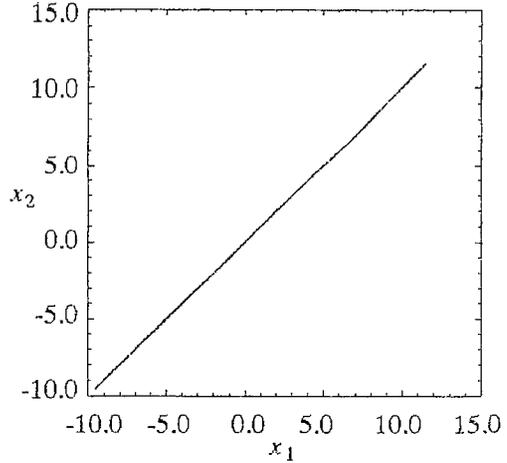


Рис. 2. Проекция хаотического аттрактора, соответствующего режиму синхронизации хаоса ( $\mu=6.5$ ,  $\epsilon=0.2$ )

увеличением  $\mu$  наблюдается последовательность бифуркаций слияния лент симметричных хаотических аттракторов.

Рассмотрим колебательные режимы взаимодействующих осцилляторов с уменьшением значений коэффициента связи от  $\epsilon=0.2$  при фиксированном  $\mu=6.5$ , когда в системе существует одноленточный симметричный хаотический аттрактор ( $A^0$ ). Устойчивый и грубый режим синхронизации хаоса наблюдается при изменении связи до  $\epsilon \approx 0.125$ . При воздействии на систему шума малой интенсивности хаотические колебания осцилляторов остаются близкими к идентичным (рис. 2). Ниже по параметру  $\epsilon$  режим синхронизации становится негрубым. Малые флуктуации индуцируют «пузырение» (рис. 3), которое наблюдается в интервале значений  $\epsilon$  примерно от 0.125 до 0.075. В отсутствие шума при задании начальных условий в окрестности симметричного подпространства фазовая траектория притягивается к хаотическому аттрактору  $A^0$ . После переходного процесса

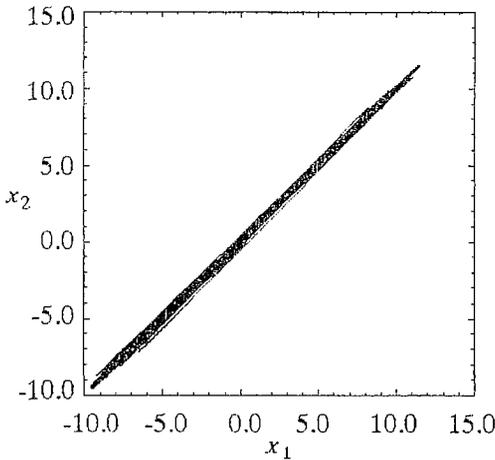


Рис. 3. «Пузырение» аттрактора, индуцированное слабым шумом ( $\mu=6.5$ ,  $\epsilon=0.11$ )

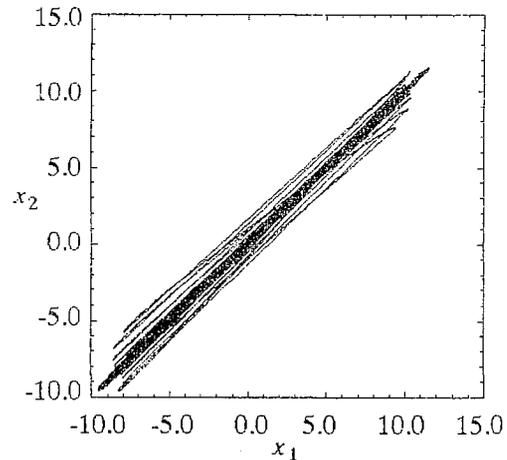


Рис. 4. Проекция фазового портрета в режиме перемежающейся синхронизации ( $\mu=6.5$ ,  $\epsilon=0.0092$ )

устанавливаются синхронные хаотические колебания. При дальнейшем уменьшении значений коэффициента связи поведение осцилляторов становится более сложным. В интервале значений  $\epsilon$  от 0.075 до 0.01 в тонкой зависимости от выбора начальных условий из окрестности симметричного подпространства фазовая траектория притягивается либо к хаотическому аттрактору, либо к устойчивому циклу периода два, расположенному вне симметричного подпространства. При малом шумовом воздействии синхронные хаотические колебания не наблюдаются. «Пузырение» сменяется регулярными несинфазными колебаниями с периодом два. Время переходных процессов сильно зависит от выбора начальных условий и может быть довольно продолжительным, например, наблюдались переходные процессы, длительность которых достигала нескольких сотен периодов цикла  $C_0$ . В отсутствие флуктуаций в данном интервале значений  $\epsilon$  все еще существует негрубый режим синхронизации хаоса. Ниже по параметру  $\epsilon$  он сменяется режимом перемежающейся синхронизации, проекция фазового портрета и временная реализация разности динамических переменных которого показаны на рис.4 и 5. При  $\epsilon < 0.008$  в системе возникает режим гиперхаоса (рис. 6). Отметим, что в рассмотренном сечении пространства параметров при уменьшении  $\epsilon$  взаимодействующие осцилляторы Ресслера демонстрируют такое же поведение, как и связанные дискретные отображения с удвоением периода.

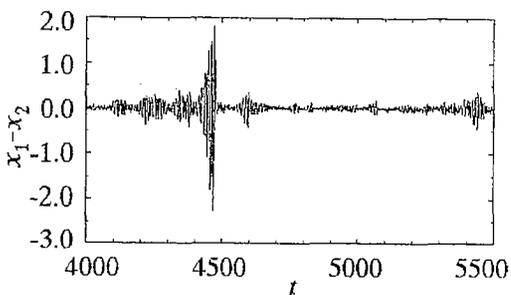


Рис. 5. Временная реализация разности динамических переменных в режиме перемежающейся синхронизации ( $\mu=6.5$ ,  $\epsilon=0.0092$ )

Теперь обсудим наблюдаемые качественные изменения в динамике системы при уменьшении значений коэффициента связи, сопоставляя их с бифуркациями седловых циклов основного семейства  $2^N C_0$ . Поскольку синхронный хаотический аттрактор  $A^0$  возник через последовательность удвоений данного семейства циклов, можно предположить, что бифуркации именно этих циклов играют основную роль в процессе потери синхронизации хаоса. Обратимся к бифуркационной диаграмме на рис. 1. Исследуемое сечение  $\mu=6.5$  на плоскости параметров показано штриховой линией. Справа от точки 1 встроенные в одноленточный симметричный хаотический аттрактор  $A^0$  седловые циклы  $2^N C_0$  являются устойчивыми к трансверсальным возмущениям. В системе наблюдается устойчивый и грубый режим синхронизации хаоса. С уменьшением  $\epsilon$  при пересечении точки 1 происходит бифуркация удвоения периода седлового цикла  $C_0$ . В его окрестности вне симметричного подпространства рождается устойчивый цикл периода два ( $2C_1$ ). Симметричный цикл  $C_0$  становится неустойчивым к трансверсальным возмущениям. Данная бифуркация приводит к потере грубости режима синхронизации хаоса. Несколько ниже по параметру, начиная с  $\epsilon \approx 0.125$ , наблюдается «пузырение». При дальнейшем уменьшении  $\epsilon$  аналогичную бифуркацию демонстрирует симметричный цикл  $4C_0$ , что не приводит к качественному изменению наблюдае-

мых хаотических колебаниях. При дальнейшем уменьшении  $\epsilon$  происходит бифуркация удвоения периода седлового цикла  $C_0$ . В его окрестности вне симметричного подпространства рождается устойчивый цикл периода два ( $2C_1$ ). Симметричный цикл  $C_0$  становится неустойчивым к трансверсальным возмущениям. Данная бифуркация приводит к потере грубости режима синхронизации хаоса. Несколько ниже по параметру, начиная с  $\epsilon \approx 0.125$ , наблюдается «пузырение». При дальнейшем уменьшении  $\epsilon$  аналогичную бифуркацию демонстрирует симметричный цикл  $4C_0$ , что не приводит к качественному изменению наблюдае-

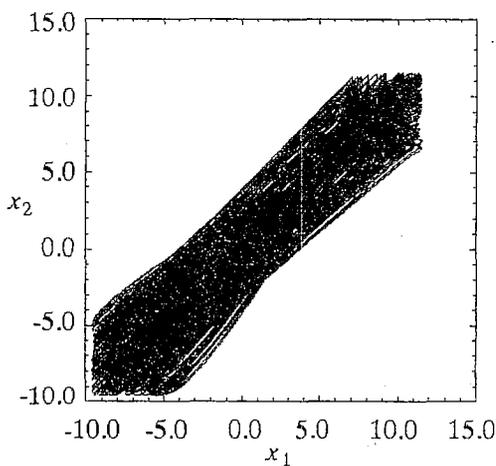


Рис. 6. Проекция хаотического аттрактора в режиме гиперхаоса ( $\mu=6.5$ ,  $\epsilon=0.002$ )

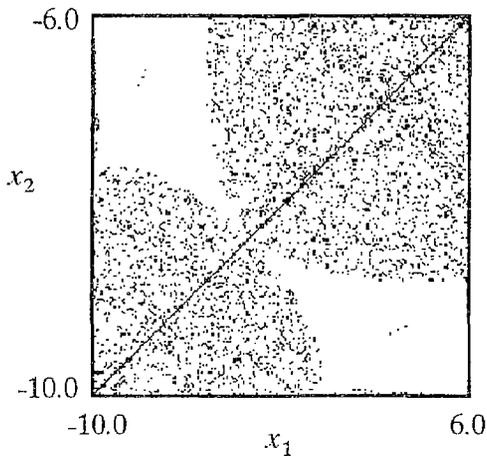


Рис. 7. Проекция сечения бассейнов притяжения хаотического аттрактора  $A^0$  (черный цвет) и устойчивого цикла  $2C^1$  (белый цвет) ( $\mu=6.5$ ,  $\epsilon=0.08$ )

В этой ситуации при небольшом шумовом воздействии в системе наблюдаются переходы к несинфазным режимам. При дальнейшем уменьшении  $\epsilon$  происходят аналогичные бифуркации на базе других седловых циклов основного семейства, что ведет к развитию трансверсальной неустойчивости симметричного хаотического множества в целом. В точке 3 становится положительной еще одна ляпуновская характеристическая экспонента, вычисленная по типичной хаотической траектории аттрактора  $A^0$ . Слева от точки 3 возникает режим гиперхаоса. В окрестности бифуркационного значения в системе без флуктуаций наблюдается режим перемежающейся синхронизации [7]. Хаотический аттрактор, соответствующий режиму гиперхаоса, образуется в результате объединения хаотического множества  $A^0$  и хаотического множества, сформированного в окрестности симметричного подпространства на базе  $2C^1$  и других несинфазных циклов, родившихся из основного семейства циклов  $2^N C_0$ .

Таким образом, в двух связанных идентичных осцилляторах Ресслера в указанном сечении пространства параметров наблюдается качественно такой же бифуркационный сценарий, как и в связанных логистических отображениях [12]. Но, в отличие от простейшей модели взаимодействующих систем с бифуркациями удвоения периода, в связанных системах Ресслера могут наблюдаться и иные сценарии перехода к несинхронному поведению осцилляторов. В частности, в сечении пространства параметров  $\alpha=0.2$ ,  $\beta=0.2$ ,  $\omega_0=1$ ,  $\mu=10$  имеет место иная последовательность бифуркаций несимметричных режимов. Здесь хотя и происходит усложнение структуры бассейна притяжения аттрактора  $A^0$ , однако явления «изрешечивания» обнаружить не удалось. Перехода к несимметричным колебательным режимам при слабом шумовом воздействии за время наблюдения порядка  $10^5$  периодов цикла  $C_0$  не наблюдалось. Данная ситуация сохраняется вплоть до возникновения режима гиперхаоса. Выяснение указанных особенностей требует дополнительных исследований.

*Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-02-16531).*

### Библиографический список

1. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems // Prog. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32.
2. Pikovsky A.S. On the interaction of strange attractors // Z. Phys. 1984. Vol. 55 B. P. 149.

3. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991.
4. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 1050.
5. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
6. Pikovsky A.S., Grassberger P. Symmetry breaking bifurcations for coupled chaotic attractors // J. Phys. A: Math. Gen. 1991. Vol. 24. P. 4587.
7. Ashwin P., Buescu J., Stewart I. From attractor to chaotic saddle: a tale of transverse instability // Nonlinearity. 1996. Vol. 9. P. 703.
8. Ashwin P., Buescu J., Stewart I. Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators // Phys. Lett. 1994. Vol. A193. P. 126.
9. Alexander J.C., Kan I., Yorke J.A., You Z. Riddled basins // Int. J. Bifurc. Chaos. 1992. Vol. 2. P. 795.
10. Kapitaniak T., Maistrenko Yu., Stefanski A., and Brindley J. Bifurcations from locally to globally riddled basins // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 6253.
11. Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Venkataramani S.C. Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. P. 55.
12. Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79, № 6. P. 1014.
13. Rulkov N.F. Images of synchronized chaos: Experiments with circuits // Chaos. 1996. Vol. 6, № 3. P. 262.

Лаборатория нелинейной  
динамики СГУ

Поступила в редакцию 10.03.99  
после переработки 30.08.99

## LOSS OF CHAOS SYNCHRONIZATION IN COUPLED RÖSSLER SYSTEMS

V.V. Astakhov, A.G. Balanov, O.V. Sosnovtseva, T.E. Vadivasova

We study process of loss of complete chaos synchronization in interacting oscillators which demonstrates cascade of period-doubling bifurcations. It is shown that bifurcations of main family of saddle cycles embedded in chaotic attractor lead to loss of the synchronous regime robustness and appearance of limit sets located in vicinity of symmetrical subspace. Bifurcations of nonsymmetrical limit sets lead to formation of complex structure of attractor basins. The transition to hyperchaos regime which appears as a result of merge of some chaotic sets completes the loss of chaos synchronization.



Астахов Владимир Владимирович окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил кандидатскую (1983) и докторскую диссертацию (1999). Работает профессором кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 60 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.  
E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru



*Баланов Александр Геннадьевич* родился в 1973 году. Окончил физический факультет СГУ (1995). С 1997 года – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и синхронизация хаоса. Автор более 15 научных работ.  
E-mail: [balanov@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:balanov@chaos.ssu.runnet.ru)



*Сосновцева Ольга Владимировна* родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Защитила кандидатскую диссертацию (1996) по структурам и свойствам аттракторов неавтономных и связанных динамических систем. Имеет более 25 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.  
E-mail: [olga@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:olga@chaos.ssu.runnet.ru)



*Вадivasова Татьяна Евгеньевна* окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981). Кандидат физ.-мат. наук (1986), Соросовский доцент. С 1998 года – докторант кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Научные интересы сосредоточены в области теории колебаний и статистической радиофизики. Автор более 40 статей в отечественной и зарубежной печати.  
E-mail: [tanya@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:tanya@chaos.ssu.runnet.ru)