



## БИФУРКАЦИИ В ТОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ КОЛЬЦЕВОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПОВОРОТОМ ПОЛЯ

*И.В. Измайлов, В.Т. Калайда, А.Л. Магазинников, Б.Н. Пойзнер*

Математической моделью процессов структурообразования в нелинейном кольцевом интерферометре служит система обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием и нелинейностью в виде функции косинуса. Сделан расчет границ областей устойчивости (на плоскости: запаздывание – нелинейность), обобщающий результаты Икеды. На основе построенных бифуркационных диаграмм, фазовых портретов и фурье–спектров сделан анализ динамики для разных условий. Показан простой прием совместной интерпретации диаграмм и портретов. Идентифицированы типы бифуркаций в зависимости от нелинейности и поворота поля при наличии запаздывания.

### Введение

Статья продолжает исследования бифуркаций в модели процессов в кольцевом интерферометре, содержащем несколько нелинейных сред, оптические поля в котором взаимосвязаны. Фундаментальное свойство нелинейного кольцевого интерферометра – способность формировать в поперечном сечении лазерного пучка многообразные регулярные и хаотические структуры. Особенностью данной модели является возможность учесть запаздывание оптического поля в контуре обратной связи, отмечавшаяся еще авторами работы [1]. Представляет интерес выяснить влияние этого запаздывания на динамику процессов в интерферометре. Подобное исследование целесообразно, во-первых, в связи с тем, что кольцевой интерферометр служит аналогом кольцевых нейронных систем, в которых также имеет место запаздывание [2]. Во-вторых, такое исследование оправдано в более широком контексте изучения кольцевых систем с запаздыванием, например, СВЧ–приборов: ЛБВ, ЛОВ [3]. В-третьих, необходимо установить, как отражается на процессах в кольцевом интерферометре с запаздыванием рост числа нелинейных элементов либо уменьшение угла поворота оптического поля в контуре обратной связи интерферометра. Обсуждение свойств многокомпонентных интерферометров проводится обычно в плане разработки принципов и устройств оптической обработки информации [4]. Наконец, обращение к вопросам устойчивости описанной оптической системы открывает возможности применения результатов моделирования в курсах нелинейной динамики и теории колебаний для студентов университета (так, на компьютерных семинарах по курсу «Динамические системы и бифуркации» для студентов Высшего колледжа прикладных наук Саратовского государственного университета изучается, в частности, в рамках классической модели Икеды [5] возбуждаемый лазером нелинейный кольцевой интерферометр [6]).

Проведенное моделирование показало, что в зависимости от величины запаздывания в контуре обратной связи интерферометра фазовые портреты системы усложняются. Построены бифуркационные диаграммы, на которых указаны области устойчивости. Установлено, что имеют место бифуркации удвоения периода. Отмечено, что при увеличении времени запаздывания размер областей устойчивых стационарных состояний (на плоскости: стационарное решение – параметр нелинейности) сокращается. Вычислены фурье–спектры установившихся движений. По четырем первым бифуркациям удвоения периода определено число Фейгенбаума. Проведено сопоставление строения бифуркационных диаграмм и фазовых портретов.

Структура фазовых портретов и временного фурье–спектра зависит от угла поворота оптического поля в плоскости поперечного сечения лазерного пучка (в контуре обратной связи интерферометра). С уменьшением угла поворота проявляется тенденция к хаотизации. В качестве тестовой ситуации при анализе устойчивости авторы использовали модель Икеды, обсуждавшуюся в нелинейно–оптическом [5] и нелинейно–динамическом [7] аспектах, а при построении бифуркационных диаграмм – результаты авторов [4] для поворота поля на угол  $\pi$ .

Таким образом, знание закономерностей бифуркационного поведения нелинейного кольцевого интерферометра с запаздыванием и поворотом поля в поперечной плоскости дает определенные ориентиры для развития моделей кольцевых систем оптической обработки информации.

## 1. Описание модели

Схема кольцевого интерферометра с поворотом оптического поля в плоскости поперечного сечения лазерного пучка (поворот осуществляет некоторый линейный элемент, например, призма, помещенная в контуре обратной связи интерферометра) изображена на рис. 1. Здесь приняты следующие обозначения:  $G$  – линейный элемент;  $M_1, M_2$  – зеркала с коэффициентом отражения по интенсивности  $R$ , для  $M_3, M_4$  он равен 1.

Характер процессов в кольцевом интерферометре обусловлен свойствами нелинейной среды  $NL$  [4], а при заданном уровне ее нелинейности  $K$  – темпом диффузии поляризованных молекул в жидком кристалле  $NL$  [8].

В тех случаях, когда оптическая длина контура обратной связи интерферометра и, следовательно, время обхода контура световым полем  $T$  (обусловленное конечной величиной скорости света) достаточно велики, также следует ожидать изменения динамики структурообразования. Для характеристики  $T$ , то есть времени запаздывания в интерферометре, оказываются существенными два количественных масштаба. Ими служат: период светового поля  $T_0$  и время релаксации нелинейной части показателя преломления  $n$  нелинейной среды  $\tau$ . Для

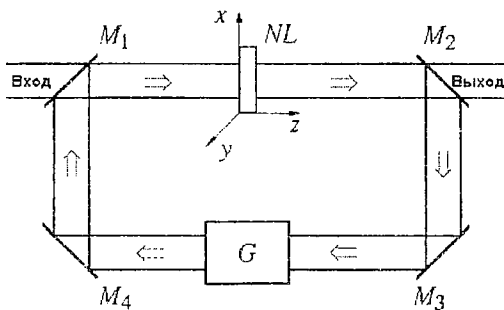


Рис. 1. Интерферометр Физо, содержащий нелинейную среду  $NL$ .  $M_1$ – $M_4$  – зеркала ( $M_1, M_2$  – полупрозрачные зеркала). Стрелками показаны направления хода лучей

сред (со значительными по величине нелинейными свойствами), используемых в кольцевых интерферометрах, время релаксации  $\tau$ , как правило, составляет от  $10^{-12}$  с до  $10^{-1}$  с [4]. Поэтому для видимого диапазона длин волн справедливо соотношение  $\tau \gg T_0 \approx 10^{-14}$  с. Но соотношение между величиной запаздывания светового поля  $T$  и временем релаксации  $\tau$  может быть различным. Если величина  $\tau \ll T$ , то достаточно учесть запаздывание в виде дополнительного фазового набега в интерференционном слагаемом, значе-

ние которого определяется соотношением между  $T$  и  $T_0$ . Если же  $\tau$  соизмеримо с  $T$ , то следует учитывать запаздывание введением функции с отклоняющимся аргументом.

Как уже говорилось, необходимо исследовать совместное влияние нелинейности, запаздывания и поворота оптического поля в контуре обратной связи интерферометра, или числа нелинейных элементов  $N$ , как будет показано ниже, на динамику процессов в нем.

В случае поворота поля на угол  $\Delta=2\pi/N=120^\circ$  при  $N=3$  возвращение светового луча в исходную точку  $(x,y)$  поперечного сечения происходит после трех проходов через интерферометр, причем через участки нелинейной среды с различными значениями показателя преломления. Поэтому, если влиянием диффузии пренебрегают, то поворот оптического поля на угол  $\Delta=2\pi/N$  приводит к тому же эффекту, что и последовательное распространение светового луча через  $N$  нелинейных элементов (керровских сред), параметры которых в общем случае различны. Однако, для любой модели  $N$ -компонентного интерферометра можно найти равноценную модель однокомпонентного интерферометра с поворотом поля на угол  $\Delta=2\pi/N$ , временем запаздывания поля внутри интерферометра  $T$  и параметром нелинейности  $K$ .

Границы применимости модели  $N$ -компонентного интерферометра на практике обусловлены целочисленным значением  $N$ , то есть максимальным числом проходов, при котором потери излучения не оказывают заметного влияния на структурообразование. Если число  $N$  не целое, то есть возвращение светового луча (после  $N$  проходов через интерферометр) в исходную точку не происходит, то существенной оказывается дифракция светового поля. Следовательно, точечная модель становится неприменимой. В теоретическом плане модель работоспособна для любого целочисленного значения  $N$ .

Динамику нелинейной фазовой модуляции в кольцевом интерферометре с поворотом оптического поля на угол  $2\pi/N$  описывает система уравнений [1,9]

$$\tau du_j(t)/dt + u_j(t) = K[1 + \gamma(\cos(u_i(t-T) + \varphi_0))], \quad j=1, 2, \dots, N; \quad i=2, \dots, N, 1. \quad (1)$$

Здесь  $u_j$  – фазовый набег в  $j$ -м канале,  $\tau$  – время релаксации,  $T$  – время запаздывания,  $K$  – параметр нелинейности,  $\varphi_0$  – невозмущенный фазовый набег,  $\gamma$  – контрастность. В системе (1) все  $u_j$  положительны. Постоянный фазовый набег  $\varphi_0=0$ . Из-за наличия второго члена в левой части равенства, описывающего релаксацию, система (1) является диссипативной.

## 2. Анализ устойчивости стационарных состояний

Исследуем динамику оптических волн в нелинейном интерферометре. Для этого найдем стационарные решения  $u_{j*}$  системы (1) из следующих уравнений:

$$u_{j*} = K(1 + \gamma \cos(u_{i*} + \varphi_0)), \quad j=1, 2, \dots, N; \quad i=2, \dots, N, 1. \quad (2)$$

Система (2) является инвариантной относительно циклической перестановки переменных  $u_{j*}$ . Например, для  $N=3$  [10] система (2) генерирует точечную группу симметрии  $C_3$  вращений вокруг прямой  $B$  с углами поворотов  $\alpha$  равными  $0, 2\pi/3, 4\pi/3$  (рис. 2). Из рисунка видно, что поворот треугольника относительно прямой  $B$  на угол, кратный  $2\pi/3$ , приводит лишь к циклической перестановке индексов переменных  $u_{j*}$ . Поэтому, для полного анализа решений системы (2) достаточно рассмотреть один из трех ее корней ( $u_{1*}$ ). Решения, принадлежащие прямой  $B$  (перпендикулярной плоскости треугольника), находятся из следующего уравнения:

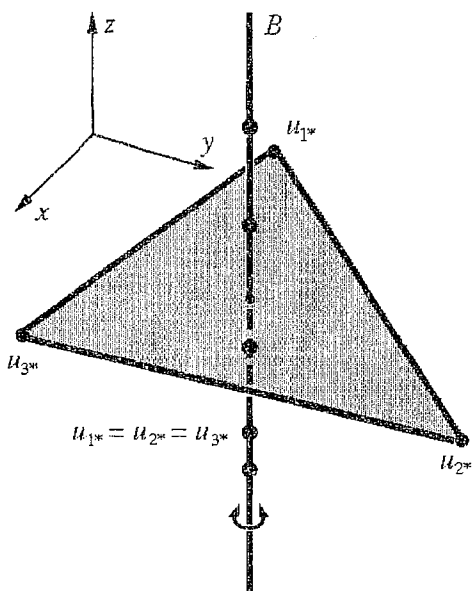


Рис. 2. Случай трех одинаковых и различных корней системы трех уравнений (2). Прямая  $B$  – ось поворотной симметрии третьего порядка  $C_3$ . Вершины равностороннего треугольника  $u_{j*}$  обозначают различные корни уравнений (2). Точки на прямой  $B$  соответствуют одинаковым корням  $u_* = u_{1*} = u_{2*} = u_{3*}$ .

Для того, чтобы можно было судить о характере процессов в интерферометре с запаздыванием, необходимо исследовать стационарные решения уравнений (1) на устойчивость. По-видимому, наиболее рациональным является метод, предложенный в книгах [12,13]. Для этого линеаризуем уравнения (1) и получим следующую систему:

$$\tau \dot{\varepsilon}_j(t) + \varepsilon_j(t) + C_j \varepsilon_j(t-T) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $C_j = K\gamma \sin(u_{j*} + \varphi_0)$ ,  $\varepsilon_j = |u_j - u_{j*}| \ll 1$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ ,  $i=2, \dots, N, 1$ . Решение (4) ищем в виде

$$\varepsilon_j = [\xi_1 \xi_2 \dots \xi_N]^T \exp(\nu \lambda),$$

что приводит к характеристическому уравнению относительно неизвестного параметра  $\lambda$

$$(\lambda+1)^N + (-1)^{N-1} \prod_{j=1}^N C_j \exp(-N\nu\lambda) = 0. \quad (5)$$

Проведем анализ уравнения (5) при  $N=2, 3, 4$ . Подобно тому, как это сделано в работе [7] для  $N=1$ , построим кривые зависимостей  $C(\nu)$ , которые являются границами областей устойчивости стационарных решений. Каждая точка, лежащая на этой кривой, соответствует значениям  $\text{Re}(\lambda)=0$ . Для  $N>1$  переменную  $C$  определим следующим образом:

$$C = [\text{PC}_j / |\text{PC}_j|] |\text{PC}_j|^{1/N}, \quad (6)$$

где в качестве величины  $|\text{PC}_j|^{1/N}$  следует взять вещественный положительный корень.

Из рис. 3 видно, что при  $|C| \leq 1$  стационарное решение (2) всегда устойчиво

$$u_* = K(1 + \gamma \cos u_*), \quad u_* = u_{1*} = u_{2*} = u_{3*}. \quad (3)$$

Заметим, что решения уравнения (3) полностью включает в себя и система с любым другим числом уравнений  $N$ . Для  $N=4$ , очевидно, система (2) генерирует группу симметрии  $C_4$ . При этом решения  $(u_{1*}, u_{2*}, u_{3*}, u_{4*})$ , принадлежащие вершинам четырехгранного угла, будут полностью включать в себя решения  $(u_{1*}, u_{2*})$  системы из двух алгебраических уравнений.

Решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом имеют много общего со свойствами решений обычных дифференциальных уравнений, тогда как благодаря запаздыванию возникают свойства, которые являются принципиально новыми [11]. Например, при малых значениях параметров  $K$  и  $\gamma$  ( $K\gamma < 1$ ) решения уравнений (1) не отличаются от решений системы обычных дифференциальных уравнений. С ростом значений указанных параметров в системе с запаздыванием могут возникнуть периодические движения и динамический хаос.

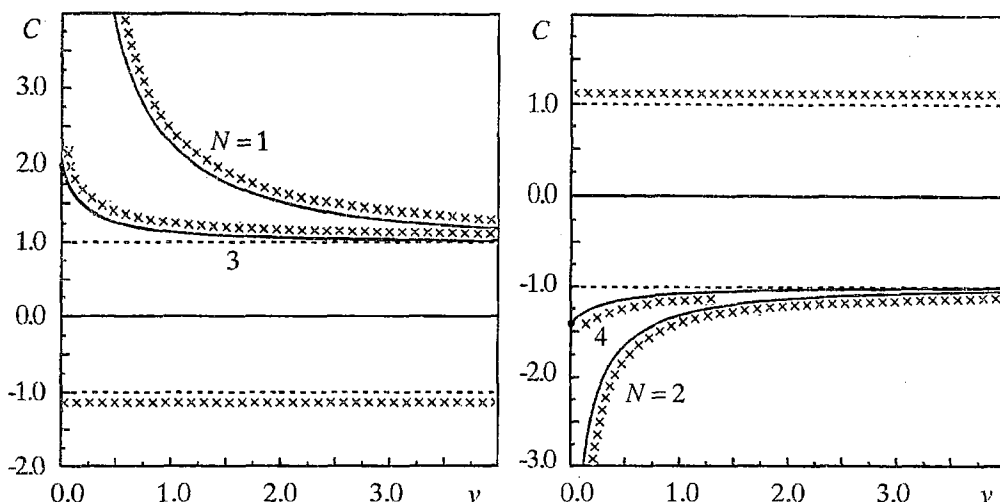


Рис. 3. Области и границы устойчивости на плоскости: запаздывание – нелинейность. Переменная  $C$  (6) зависит от параметра нелинейности  $K$ ;  $\nu$  – время запаздывания, нормированное на время релаксации нелинейной части показателя преломления. «Крестики» обозначают переход в область неустойчивости. Цифры от 1 до 4 есть значения  $N$ , определяющие угол поворота поля  $\Delta=2\pi/N$ . График 1 соответствует случаю, рассмотренному Икедой [7]

(то есть не зависит от значения запаздывания  $\nu$  при любых  $N$ ). Отметим важную особенность систем с  $N \geq 3$ . Даже при  $\nu=0$  в такой системе возможно возникновение неустойчивых колебаний, поскольку значение переменной  $C(\nu=0)$  конечно и составляет:  $C=2$  для  $N=3$  и  $C=-(2)^{1/2}$  для  $N=4$ . Данный вывод подтверждают натурные [4] и вычислительные [10] эксперименты. Ориентируясь в областях устойчивости, изображенных на рис. 3, будем строить бифуркационные диаграммы стационарных состояний при различных  $K$ ,  $\nu$  и  $N$ . Численное решение системы (1) производилось методом Рунге – Кутты четвертого порядка.

### 3. Бифуркационные диаграммы с учетом запаздывания и поворота поля в контуре обратной связи

Общее представление об изменении бифуркационных диаграмм вследствие варьирования угла поворота  $\Delta=2\pi/N$  оптического поля в плоскости поперечного сечения лазерного пучка при учете нормированного времени запаздывания  $\nu=T/\tau$ , где  $\tau$  – время релаксации нелинейной части показателя преломления, дают серии бифуркационных диаграмм на рис. 4. Они построены на плоскости: стационарные решения уравнений (1) – параметр нелинейности  $K$  для данного угла поворота  $\Delta$  при различных значениях  $\nu$ .

Сопоставление бифуркационных диаграмм со случаем, когда  $\nu=0$  [4,10,14], приводит к следующим выводам. Во-первых, наличие запаздывания, хотя и вызывает появление и/или смещение вдоль оси  $K$  бифуркаций устойчивости стационарных состояний, но не влияет на расположение стационарных состояний в структуре диаграммы. Во-вторых, с ростом запаздывания внутри кольцевого интерферометра количество устойчивых стационарных состояний уменьшается. В-третьих, с ростом запаздывания размеры интервалов значений параметра нелинейности, при которых имеет место потеря устойчивости стационарных состояний, увеличиваются.

Проведем сравнительный анализ бифуркационного поведения нелинейного фазового набегает сначала для нечетного значения  $N$ , а затем – для четного.

Обратимся к бифуркационным диаграммам для углов поворота  $\Delta=2\pi$  и  $\Delta=2\pi/3$  (см. рис. 4, а, в) и обратим внимание на их нижние ветви А. Рассмотрим интервал значений от 0 до 6.62 параметра нелинейности  $K$ , когда все  $u_j$  одинаковы, то есть

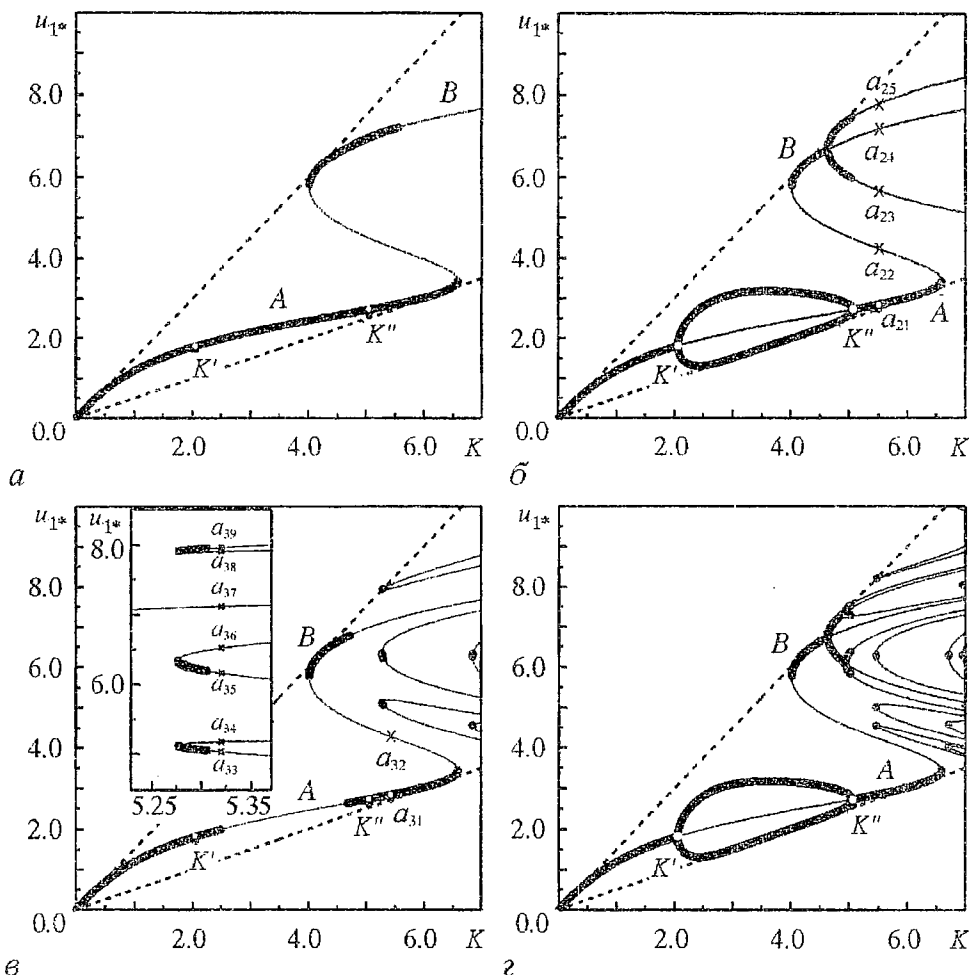


Рис. 4. Бифуркационные диаграммы (на плоскости: стационарное решение – параметр нелинейности) при запаздывании  $v=1$  для различных углов поворота поля  $\Delta=2\pi/N$ :  $a - N=1$ ,  $б - N=2$ ,  $в - N=3$ ,  $г - N=4$ . Более жирными линиями показаны устойчивые участки ветвей. Видность  $\gamma=0.5$ . При  $v=0$  диаграммы  $a, б$  по форме совпадают с приведенными в работе [4]

генерируется структура типа моностабильность. Действие запаздывания  $v$  выражается в появлении неустойчивых состояний на нижних ветвях  $A$  при значениях величины  $v=3.02$  для числа уравнений  $N=1$  и  $v=0.44$  для  $N=3$ . Зато при  $N=5$  такие состояния существуют даже при отсутствии запаздывания ( $v=0$ ). Расстояние вдоль оси  $K$  между возникшей таким образом парой бифуркаций устойчивости увеличивается с ростом  $v$ . Этот рост ограничен значениями  $K'=2.05$  и  $K''=5.07$ , приближение к которым бифуркационного параметра  $K$  происходит асимптотически с увеличением  $v$ . Значениям  $K'$  и  $K''$  соответствует величина коэффициента  $C=1.00$  на рис. 3.

Установлено, что для углов поворота поля  $\Delta=2\pi$  и  $\Delta=2\pi/3$  потеря устойчивости стационарного состояния сопровождается возникновением устойчивого предельного цикла, то есть имеет место бифуркация Андронова – Хопфа [15]. С увеличением бифуркационного параметра  $K$  на нижней ветви  $A$  имеет место лишь периодическое движение без бифуркаций удвоения периода.

Аналогичные переходы от стационарного состояния к предельному циклу (бифуркация Андронова – Хопфа) и обратно наблюдаются также на участках диаграммы  $B$  для угла поворота оптического поля  $\Delta=2\pi/3$  (см. рис. 4, в), расположен-

ной выше ветви  $A$  и соответствующей тому же типу состояния, когда все  $u_i$  одинаковы. Однако здесь с увеличением бифуркационного параметра  $K$  появляется последовательность бифуркаций удвоения периода. Кроме того, на ветви  $B$  наблюдаются окна периодичности, то есть появляются более простые периодические движения. Поэтому можно констатировать, что с переходом на ветвь  $B$  бифуркационной диаграммы характер динамики усложняется.

Рассмотрим вид бифуркационных диаграмм для углов поворота  $\Delta=\pi$  (см. рис. 4, б) и  $\Delta=\pi/2$  (см. рис. 4, з), соответствующих значениям  $N=2$  и  $N=4$ . Отметим, что на каждой из них нижняя ветвь  $A$  теряет устойчивость независимо от величины запаздывания  $\nu$ : при  $K=K'=2.05$  происходит возникновение петли бистабильности. При  $K=K''=5.07$  бистабильность исчезает: ветвь  $A$  снова становится устойчивой. Таким образом, значения  $K'=2.05$  и  $K''=5.07$  соответствуют для нечетных  $N$  парам бифуркаций потери устойчивости при  $\nu \rightarrow \infty$ , а для четных  $N$  – возникновению и исчезновению петли бистабильности независимо от запаздывания  $\nu$ . Сама петля бистабильности всегда устойчива, так как для всех ее точек задаваемая формулой (6) величина  $|C| < 1$ .

Согласно вышесказанному множество стационарных состояний нелинейного фазового набег в случае угла поворота оптического поля  $\Delta=\pi/2$  включает в себя множество стационарных состояний фазового набег, соответствующих углам поворота  $\Delta=2\pi$  и  $\Delta=\pi$ . В этом нетрудно убедиться, сопоставляя структуру всех ветвей бифуркационных диаграмм на рис. 4. При отсутствии запаздывания вид диаграммы при  $\Delta=\pi$  совпадает с бифуркационной диаграммой этого случая, исследованного в книге [4]. Для углов поворота  $\Delta=\pi$  неустойчивые состояния «окаймлены» (в направлении оси  $u$ ) парой устойчивых состояний. Это позволяет заключить, что при  $\Delta=\pi$  (в отсутствие запаздывания) система с течением времени неизбежно сходится к стационарному устойчивому состоянию. При наличии запаздывания «окаймляющие» устойчивые состояния могут утратить свою устойчивость, что делает возможным появление предельных циклов или более сложных типов движения. Их детальное изучение предполагает построение фазовых портретов и вычисление временных фурье-спектров.

#### 4. Фазовые портреты и особенности временных фурье-спектров

Для идентификации и изучения нестационарных состояний нелинейного фазового набег на рис. 5 были построены фазовые портреты на плоскости  $(u_1, u_2)$  и вычислены временные фурье-спектры указанных процессов.

Обращаясь к ним, будем комментировать обсуждавшиеся ранее бифуркационные диаграммы. Как уже указывалось, ветвь  $B$  соответствует более сложным видам движения, чем ветвь  $A$ . Чтобы продемонстрировать это обстоятельство и одновременно влияние нелинейности, а также угла поворота поля, на рис. 5 построено пять серий фазовых портретов, соответствующие значениям  $\Delta=\pi/2$  ( $N=4$ ),  $\Delta=2\pi/3$  ( $N=3$ ),  $\Delta=\pi$  ( $N=2$ ),  $\Delta=2\pi/3$  ( $N=3$ ),  $\Delta=\pi/2$  ( $N=4$ ) для различных величин параметра нелинейности  $K$ . Структура рис. 5 свидетельствует о том, что динамика нелинейного фазового набег в кольцевом интерферометре включает в себя бифуркацию удвоения периода. С уменьшением угла поворота  $\Delta$  диапазон значений  $K$ , внутри которого сохраняется определенный тип предельного цикла, существенно сокращается. Число Фейгенбаума (4.6692), оцененное разными методами по второй, третьей, четвертой бифуркациям, составляет приблизительно 4.50. При увеличении параметра нелинейности последовательность бифуркаций удвоения периода приводит к более сложной динамике тем быстрее, чем меньше угол  $\Delta$  (см. рис. 5). Две нижние строки фазовых портретов на рис. 5 позволяют сравнить влияние на их вид значения  $N$  при прочих одинаковых

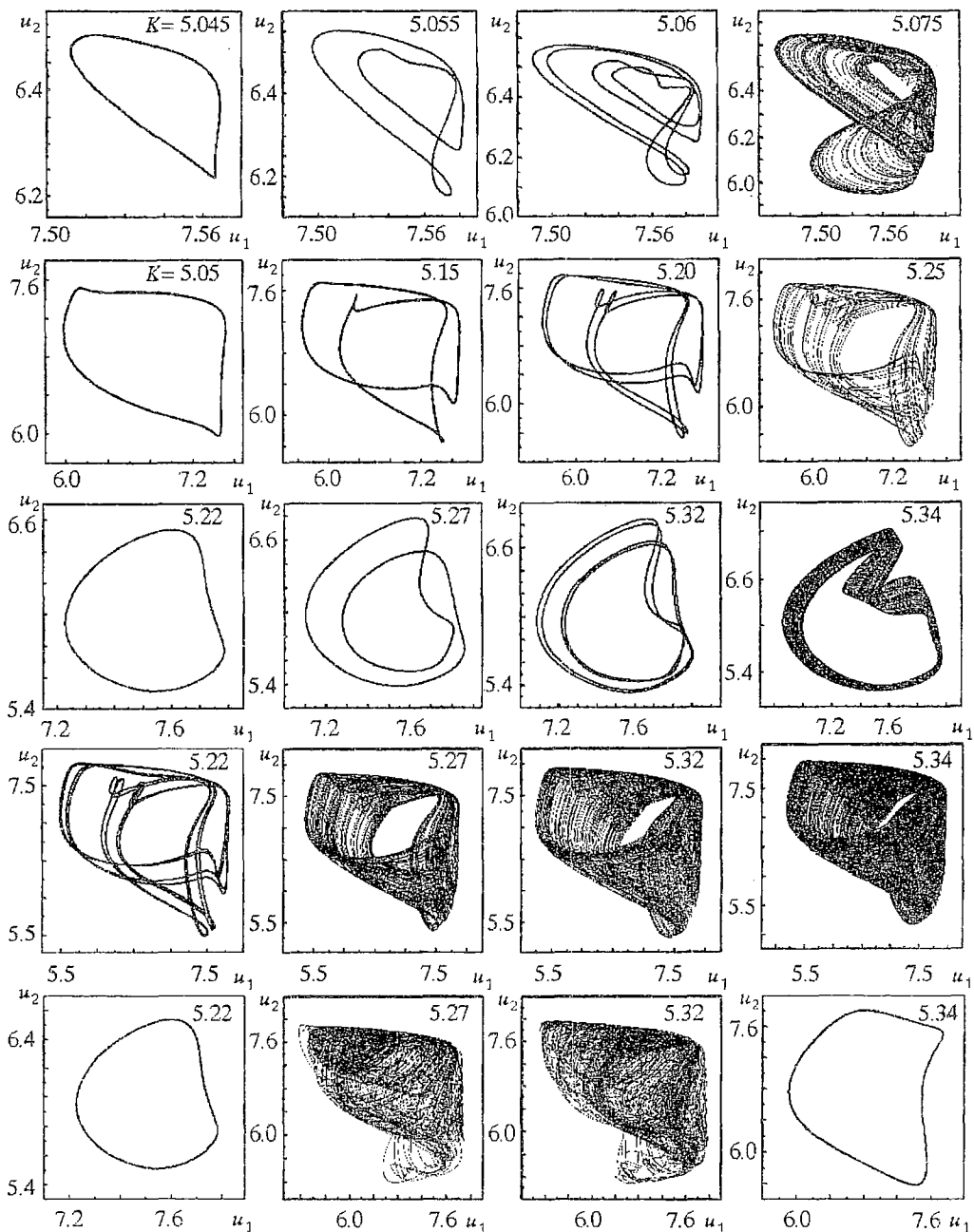


Рис. 5. Серии проекций фазовых портретов, полученных как результат решения уравнений (1) для  $N=4$  – первая и пятая строки,  $N=3$  – вторая и четвертая строки,  $N=2$  – третья строка. Первая, вторая, третья строки демонстрируют наступление бифуркации удвоения периода при различном уровне нелинейности. Третья, четвертая, пятая строки отражают влияние угла поворота поля при прочих равных условиях. Видность  $\gamma=0.5$

параметрах. Несмотря на тенденцию к усложнению структуры фазовых портретов, с увеличением параметра  $K$  и числа  $N$  имеют место «окна» периодичности, характерные и для многих других нелинейных систем. На рис. 5 окну периодичности соответствуют левый и правый нижние фазовые портреты, построенные для  $N=4$ .

Выяснить особенности сложного движения помогают взятые в совокупности бифуркационные диаграммы, фазовые портреты и фурье-спектры на рис. 6,



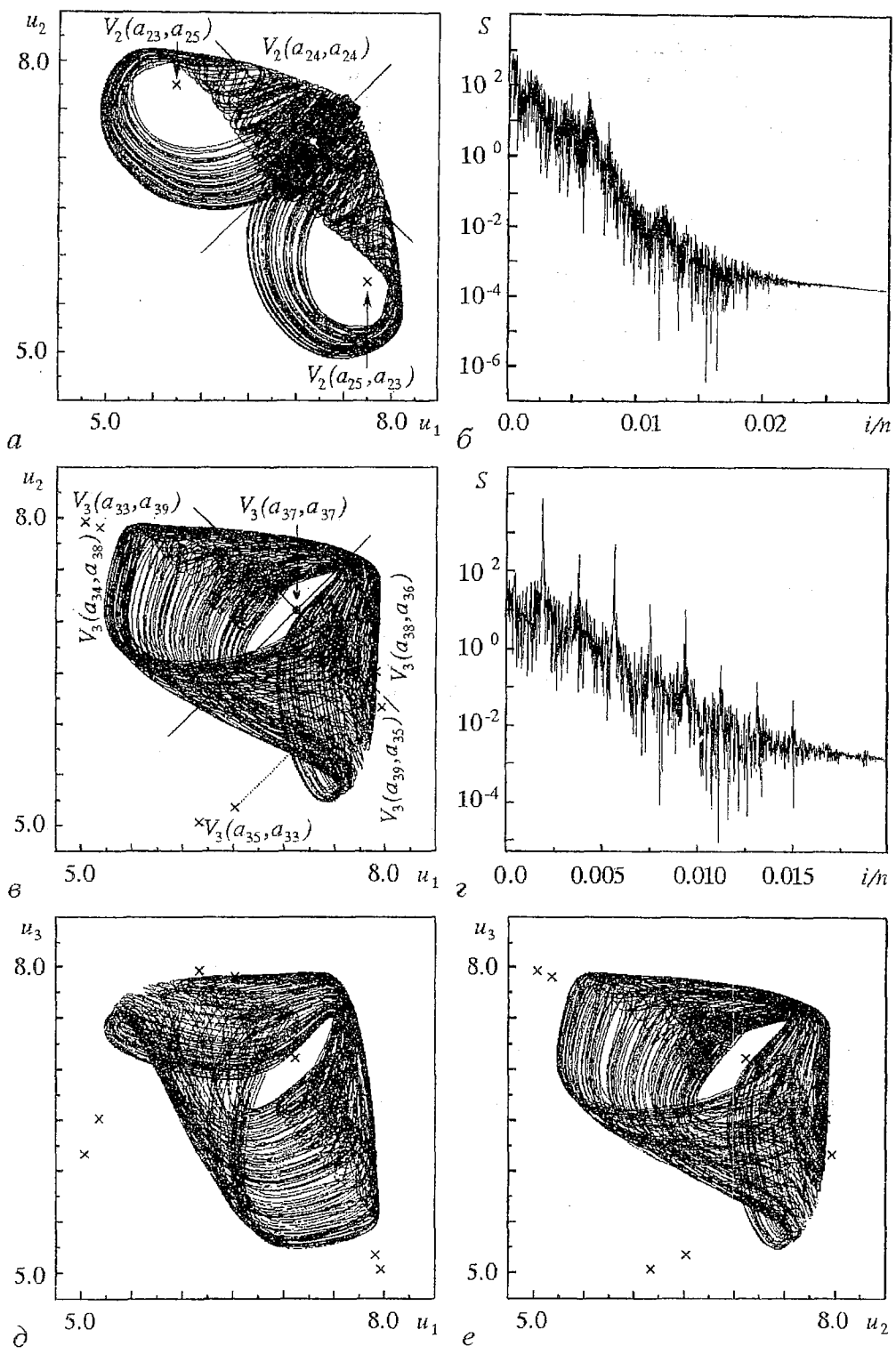


Рис. 6. Проекция фазовых портретов  $a, в, д, е$  и энергетические фурье-спектры  $б, г$  процессов изменения нелинейного фазового набега  $u_j$  при различных углах поворота поля и параметрах нелинейности:  $a, б - N=2, K=5.45$ ;  $в - е - N=3, K=5.32$ . Точки  $V_j$ , отмеченные «крестиками», показывают стационарные неустойчивые состояния  $a_{ji}$  на соответствующих бифуркационных диаграммах (см. рис. 4, б, в)

с

соответствующие различным углам  $\Delta$  и значениям  $K$ . В литературе принято судить о степени хаотичности движения по наличию/отсутствию ярко выраженных узких пиков (максимумов) в спектре частот. Если движение периодически, то его фурье-спектр имеет ряд узких пиков. С приближением к хаотическому режиму в спектре появляется непрерывное распределение частот [16]. Если руководствоваться этими признаками, то можно заключить, что хаотизацию вызывает как рост параметра нелинейности  $K$ , так и уменьшение угла поворота  $\Delta$ , то есть увеличение  $N$  (см. рис. 5).

При анализе сложного движения целесообразно сопоставить строение фазового портрета с положением стационарных точек на ветвях бифуркационной диаграммы. Для этого выберем случаи поворота оптического поля на углы  $\Delta=\pi$  и  $\Delta=2\pi/3$  в контуре обратной связи интерферометра. Зададимся начальными условиями, лежащими на бифуркационных диаграммах (см. рис. 4, б, в) выше точек, обозначенных  $a_{22}$ ,  $a_{32}$ , соответственно. Точки лежат на границах, отделяющих различные динамические режимы: с устойчивой стационарной точкой  $a_{21}$ ,  $a_{31}$  и нерегулярный. Как показали вычислительные эксперименты, сложный тип динамики имеет место при значениях бифуркационного параметра  $K=5.45$  (см. рис. 6, а) и  $K=5.32$  (см. рис. 6, в). Неустойчивым состояниям при  $K=5.45$  на рис. 4, б отвечают точки, обозначенные  $a_{22}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{24}$ ,  $a_{25}$ , а неустойчивым состояниям при  $K=5.32$  на рис. 4, в – точки  $a_{32}$ ,  $a_{33}$ ,  $a_{34}$ ,  $a_{35}$ ,  $a_{36}$ ,  $a_{37}$ ,  $a_{38}$ ,  $a_{39}$ .

На фазовых портретах (см. рис. 6, а, в, д, е) точки  $V_j$ , отмеченные «крестиками», показывают стационарные неустойчивые состояния, взятые с соответствующих бифуркационных диаграмм (см. рис. 4, б, в). Например, помеченные «крестиками» точки  $V_2$  на фазовом портрете (см. рис. 6, а) имеют координаты точек на неустойчивых ветвях диаграммы (см. рис. 4, б). Строение траекторий на фазовом портрете (см. рис. 6, а) приводит к выводу, что движение динамической системы происходит вокруг пары зеркально-симметричных точек  $V_2(a_{23}, a_{25})$ ,  $V_2(a_{25}, a_{23})$ , а также вдоль биссектрисы прямого угла  $(u_1, u_2)$ , делящей портрет на две зеркально-симметричные части.

Аналогичным образом, обозначенные «крестиками» точки  $V_3$  на фазовом портрете (см. рис. 6, в) имеют координаты точек на неустойчивых ветвях диаграммы (см. рис. 4, в). Строение траекторий на трех проекциях трехмерного фазового портрета (см. рис. 6, в, д, е) приводит к следующим выводам. Во-первых, движение динамической системы происходит во всех трех плоскостях вокруг «центральной» точки  $V_3(a_{37}, a_{37})$ , лежащей на биссектрисе трехгранного угла. Во-вторых, наличие неустойчивых стационарных точек, расположенных вне фазового портрета, влияет на его внешнюю конфигурацию и внутреннее строение. В-третьих, можно предположить, что через неустойчивые стационарные точки  $V_3(a_{34}, a_{36})$  и  $V_3(a_{38}, a_{36})$  проходит прямая, параллельная биссектрисе трехгранного угла. Эта прямая (изображена пунктиром на рис. 6, в) определяет на фазовом портрете точку, над и под которой проходит граничная траектория, совершающая петлю в фазовом пространстве.

## 5. Обсуждение результатов

Таким образом, в статье в рамках модели (1), предполагающей пренебрежимо малую роль диффузии молекул нелинейной (жидкокристаллической) среды и дифракции лазерного пучка, исследовано влияние на динамику процессов в кольцевом интерферометре нелинейности, запаздывания в контуре обратной связи, угла поворота оптического поля в поперечной плоскости лазерного пучка как по отдельности, так и в совокупности. С этой целью изучены свойства стационарных уравнений (2), найдены области устойчивости решений, построены семейства бифуркационных диаграмм и фазовых портретов, рассчитаны временные фурье-спектры процессов со сложной динамикой.

Стационарные состояния  $u_{j*}$  динамической системы, описываемой системой (1), являются решениями уравнений (2), инвариантных относительно циклической перестановки переменных  $u_{j*}$  (см. рис. 2). В ходе изучения устойчивости стационарных состояний получено характеристическое уравнение (5), учитывающее как запаздывание, так и поворот оптического поля в контуре обратной связи интерферометра. При отсутствии поворота уравнение (5) сводится к характеристическому уравнению, полученному Икедой [5]. Без запаздывания, но при достаточно сильной нелинейности утрата устойчивости становится возможной вследствие поворота оптического поля: на угол  $\Delta=2\pi/3$  ( $N=3$ , что соответствует трехмерному фазовому пространству), на  $\Delta=\pi/2$  ( $N=4$ , что соответствует четырехмерному пространству) и менее (см. рис. 3). Данный вывод подтверждают как натурные [4], так и вычислительные [10] эксперименты. Если же параметр нелинейности не выходит за определенные границы, то устойчивость стационарных решений уравнений (2) сохраняется при любых значениях запаздывания  $\nu$  и сколь угодно малых углах поворота, то есть при любых  $N$  (см. рис. 3).

С увеличением времени запаздывания в интерферометре вид бифуркационных диаграмм (на плоскости: стационарные решения уравнений (2) – параметр нелинейности  $K$ ) преобразуется – число устойчивых стационарных состояний сокращается, а интервалы значений  $K$ , при которых стационарные состояния неустойчивы, расширяются. Структура бифуркационных диаграмм изменяется также и с уменьшением угла поворота поля в поперечной плоскости пучка, то есть с ростом числа  $N$ , но по-разному для нечетных и четных чисел  $N$ . При углах поворота, которым соответствуют нечетные  $N$ , влияние запаздывания заключается в появлении неустойчивых состояний на нижней ветви диаграмм. (При достаточно больших  $N$  эти неустойчивые состояния имеют место даже без запаздывания.) Интервал значений  $K$ , определяемый парой бифуркаций устойчивости, увеличивается с ростом времени запаздывания, и его пределы составляют величины  $K'=2.05$  и  $K''=5.07$ . Для углов поворота поля  $\Delta=2\pi$  ( $N=1$ ) и  $\Delta=2\pi/3$  ( $N=3$ ) потеря устойчивости стационарного состояния (в зависимости от бифуркационного параметра  $K$ ) сопровождается бифуркацией Андронова – Хопфа. С увеличением бифуркационного параметра  $K$  на нижней ветви имеет место лишь периодическое движение без бифуркаций удвоения периода. На верхней ветви диаграмм с увеличением бифуркационного параметра  $K$  появляется последовательность бифуркаций удвоения периода и, кроме того, имеются окна периодичности (см. рис. 4, а, в). Для углов поворота  $\Delta=\pi$  (см. рис. 4, б) и  $\Delta=\pi/2$  (см. рис. 4, г), соответствующих четным значениям  $N=2$  и  $N=4$ , нижняя ветвь бифуркационных диаграмм теряет устойчивость (независимо от величины запаздывания) в некотором интервале величин параметра  $K$ , внутри которого имеет место петля бистабильности. Но здесь границы интервала  $K'$  и  $K''$  не зависят от времени запаздывания  $\nu$ . При отсутствии запаздывания вид диаграммы для  $\Delta=\pi$  такой же, что и в книге [4].

Построена «матрица» проекций фазовых портретов для различных значений  $K$  и  $N$  при времени запаздывания равно времени релаксации (см. рис. 5). Число Фейгенбаума (4.6692), оцененное по нескольким бифуркациям, составляет 4.50. При увеличении параметра нелинейности  $K$  последовательность бифуркаций удвоения периода приводит к более сложной динамике тем быстрее, чем меньше угол поворота поля  $\Delta$ .

Показано, как строение фазовых портретов для  $N=2$ ,  $N=3$  (см. рис. 6, а, в, д, е) связано с положением стационарных точек на ветвях бифуркационной диаграммы (см. рис. 4). Такой прием представляется достаточно эффективным для выяснения закономерностей сложной динамики, зависящей от ряда параметров системы.

## Заключение

Итак, совместное рассмотрение бифуркационных диаграмм, формы фазовых портретов и рассчитанных временных фурье-спектров приводит к выводу, что наличие запаздывания в интерферометре влечет усложнение динамики нелинейного фазового набегания. Без запаздывания, но при прочих равных условиях система со временем сходится к устойчивым стационарным точкам [10].

## Библиографический список

1. Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu., Larichev A.V., and Zheleznykh N.I. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures // *J. Opt. Soc. Am. A*. 1992. Vol. 9, № 1. P. 78.
2. Кащенко С.А., Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Волновые образования в кольцевых нейронных системах // *Математическое моделирование*. 1997. Т. 9, № 3. С. 29.
3. Рыскин Н.М., Титов В.Н. О сценарии перехода к хаосу в однопараметрической модели лампы обратной волны // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1998. Т.6, № 1. С. 75.
4. Новые физические принципы оптической обработки информации: Сб.ст. / Под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990. С. 13; 263.
5. Гиббс Х. Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света. М.: Мир, 1988. 520 с.
6. Кузнецов А.П. Через экран компьютера – в мир нелинейной динамики // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1998. Т.6, № 5. С. 89.
7. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. С. 370.
8. Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н. Бифуркационная диаграмма в случае кольцевого интерферометра с жидким кристаллом: влияние диффузии // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1998. Т.6, № 2. С. 65.
9. Аршинов А.И., Мударисов Р.Р., Пойзнер Б.Н. Тройка керровских сред в кольцевом интерферометре: роль неидентичности // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1995. Т.3, № 1. С. 20.
10. Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н., Сабденев К.О., Тимохин А.М. Тройка керровских сред в нелинейном интерферометре: факторы, влияющие на бифуркационное поведение // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1998. Т.6, № 5. С. 56.
11. Мышкис А.Д. Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом // *Математическая энциклопедия: В 5 т. М.: Сов. энциклопедия, 1979. Т. 2. С. 294.*
12. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
13. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: ГИФМЛ, 1959. 212 с.
14. Магазинников А.Л. Бифуркационная диаграмма стационарных состояний нелинейного оптического интерферометра с двумерной обратной связью / Ред. ж-ла «Изв. вузов. Физика». Томск, 1997. 6 с. Деп. в ВИНТИИ 01.08.97, № 2575–В97.
15. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 366 с.
16. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 312 с.

Томский государственный  
университет

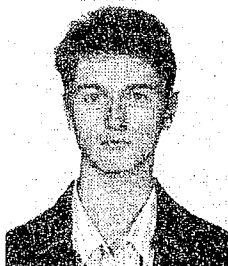
Поступила в редакцию  
после доработки

25.06.99  
11.10.99

## BIFURCATIONS IN THE POINT MODEL OF RING INTERFEROMETER WITH DELAY AND FIELD TURN

*I.V. Izmailov, V.T. Kalaida, A.L. Magazinnikov, B.N. Poizner*

System of the ordinary differential equations with retarded argument and nonlinearity in the form of cosine function serves as the mathematical model of optical structures generation in nonlinear ring interferometer. Computation of stability domains boundaries (in plane: delay – nonlinearity) extended of Ikeda results is performed. Based on the bifurcation diagrams, phase patterns, Fourier spectrums analysis of dynamics features under various conditions is realized. Simple way of the bifurcation diagrams and phase patterns joint interpretation is showed. Types of bifurcations are identified depending on nonlinearity and turn of optical field under delay in the interferometer.



*Измайлов Игорь Валерьевич* – родился в Алма-Ате (1976). Поступил в Томский государственный университет (1993). В настоящее время является студентом (магистрантом) шестого курса радиофизического факультета кафедры квантовой электроники и фотоники. Область научных интересов: моделирование процессов в системах различной природы, применение нелинейной динамики для обработки и передачи информации.



*Калайда Владимир Тимофеевич* – родился в Хабаровске (1949). В 1972 году окончил факультет прикладной математики томского государственного университета и физико-технический факультет томского политехнического института. Защитил диссертацию (1979) на соискание ученой степени кандидата технических наук. Область научных интересов – применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях. Имеет около 80 публикаций. В настоящее время – докторант ТГУ.



*Магазинников Антон Леонидович* – родился в 1974 году в Томске. Окончил с отличием радиофизический факультет ТГУ (1997). В настоящее время является аспирантом кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Области научных интересов: оптическая синергетика, моделирование процессов оптического формообразования. Автор нескольких работ по данной тематике.



*Пойзнер Борис Николаевич* – родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Имеет много статей по указанной тематике. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучающего»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов.

E-mail: [pznr.rff@elefot.tsu.ru](mailto:pznr.rff@elefot.tsu.ru)