



Изв.вузов «ПНД», т.7, № 5, 1999

УДК 537.86

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ХАОТИЧЕСКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Фундаментальные основы и избранные проблемы

*В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов*

© В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов, 1999  
Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. 368 с.: илл.  
ISBN 5-292-02285-3

*Славному юбилею родного  
Саратовского университета,  
90-летию со дня основания,  
посвящают этот труд авторы*

### Предисловие

Уважаемый читатель! Перед Вами книга по нелинейной динамике, актуальному научному направлению в области исследований нелинейных явлений в динамических системах. За последние годы по близкой тематике опубликовано много хороших книг. И тем не менее предлагаемая Вам новая книга, мы надеемся, будет достойна внимательного прочтения в силу ряда причин. Их несколько и они относятся как к предмету изучения нелинейной динамики, содержанию книги, так и к форме изложения материала.

В конце 70-х годов благодаря активной деятельности профессора Штутгартского университета Г. Хакена и профессора МГУ Ю.Л. Климонтовича, в университетах России начались дискуссии о синергетике<sup>1</sup>. При этом каждый понимал новую науку по-своему. Одни говорили о новой парадигме в естествознании; об изменении сути научного подхода, обусловленного кооперацией нескольких фундаментальных наук и их методов; другие не видели в синергетике ничего нового в сравнении с современной теорией нелинейных колебаний и волн; третьи вообще считали, что синергетика это лозунг и ничего больше. Примерно в эти же годы яростные дискуссии и споры вызвали идеи Нобелевского лауреата И.Р. Пригожина о процессах формирования и эволюции так называемых диссипативных структур, о хаосе, порядке и т.д.<sup>2</sup> Многие ученые отстаивали мнение, что понятие «автоволны» и «автоколебания» более правильно отражают

<sup>1</sup> Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1985.

<sup>2</sup> Пригожин И. От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985.

суть явлений и рассматриваемые проблемы составляют предмет исследований нелинейной теории колебаний и волн. Наконец, относительно недавно профессор Ю.Л. Климонтович предложил ввести в перечень направлений магистерской подготовки физиков специализацию «физика открытых систем»<sup>3</sup>. Несмотря на определенные различия в содержании и трактовке указанных выше научных направлений, их объединяет глубокая общность.

В современной теории колебаний и волн разработаны специальные методы анализа нелинейных процессов в динамических системах и исследован ряд принципиальных физических явлений, имеющих фундаментальное значение для естествознания. Вклад теории нелинейных колебаний и волн в развитие нелинейной динамики в целом безусловно велик. Однако выяснилось, что при анализе реальных, эволюционных процессов в естествознании ряд проблем не может быть исследован с использованием только теории колебаний и волн. В качестве примера можно привести явления индуцированных шумом переходов в нелинейных системах. Шум может вызывать качественно новые явления, отсутствующие в системах без флуктуаций. Другим примером служит эффект детерминированного хаоса. Для понимания закономерностей возникновения, структуры и свойств хаотических автоколебаний необходимо использовать весь арсенал теоретических методов и представлений теории динамических систем, статистической и эргодической теорий, теории информации, качественной теории дифференциальных уравнений и др. Другими словами, анализ закономерностей нелинейной динамики сложных систем естествознания требует синергетического подхода. Другое важное обстоятельство заключается в том, что ряд принципиальных эффектов, обнаруженных при исследовании нелинейных систем в различных областях знаний, носит фундаментально общий характер. И, наконец, наиболее важное. Большинство новых эффектов, открытых в последние годы, относится к исследованиям процессов в нелинейных диссипативных системах и средах. Автоколебания и автоволны, а также стационарные пространственные структуры могут наблюдаться исключительно в нелинейных диссипативных системах и распределенных активных средах. Такие системы в силу диссипативности являются открытыми, самоподдерживание тех или иных режимов или структур в них возможно лишь за счет нелинейности. Таким образом, ключом к пониманию сути сложных явлений и процессов является диссипативность и нелинейность динамической системы. Поэтому, если подходить к проблеме с самых общих позиций, то синергетика, теория диссипативных структур, физика открытых систем и нелинейная динамика – все это по сути дела важные составляющие одной общей науки о колебаниях и структурах, призванной описать явления в мире нелинейных систем, активно взаимодействующих с внешней средой.

Нелинейная динамика как часть этой науки выявляет наиболее простые и типичные модели фундаментальных нелинейных явлений, развивает специальные методы их описания и исследования, формирует единый междисциплинарный научный язык и обосновывает методы компьютерного моделирования как один из наиболее эффективных способов познания нелинейных процессов.

Настоящая книга посвящена изложению фундаментальных основ и ряда научных результатов по исследованию динамики нелинейных диссипативных систем, математическими моделями которых служат обыкновенные дифференциальные уравнения, дискретные отображения или соответствующие стохастические уравнения, когда учитывается эффект воздействия флуктуаций.

Перед Вами научная монография, в которой отражены результаты современных исследований, в большинстве своем полученные авторами совместно с коллегами по лаборатории нелинейной динамики Саратовского государственного университета. В то же время книга может рассматриваться и как учебник для студентов, аспирантов и молодых ученых естественно-научных специальностей вузов, изучающих природу нелинейных явлений.

<sup>3</sup> Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995, 1999. Т. 1,2.

Сложность в определении жанра книги обусловлена содержанием и формой представления материала. Работа содержит 11 глав, посвященных одной из самостоятельно важных научных проблем. Главы носят относительно законченный характер, включают отдельный список цитируемой литературы и могут быть прочитаны независимо друг от друга. При этом главы 1–6 можно выделить в первую часть, посвященную наиболее общим проблемам, составляющим фундаментальную основу нелинейной динамики. Главы 7–11 являются по сути самостоятельными монографическими обзорами современных результатов по избранным научным проблемам. Эти главы условно составляют вторую часть книги и адресуются подготовленному читателю, имеющему опыт самостоятельной научной работы.

Главы 1, 2, 6, 7 книги были написаны Т.Е. Вадивасовой, главы 5, 8 – В.В. Астаховым. Мною написаны главы 3, 4, 9–11 и осуществлено научное редактирование книги в целом.

Как и предыдущие монографии<sup>4</sup>, настоящая книга в первую очередь базируется на научных результатах, опубликованных в периодической печати ее авторами совместно с сотрудниками лаборатории нелинейной динамики СГУ за последние 5–6 лет. Они отражены в диссертационных работах моих аспирантов Г.И. Стрелковой, А.В. Шабунина, Н.Б. Янсон, А.Н. Павлова, Б.В. Шульгина, И.А. Хованова, А.Н. Сильченко, а также докторантов А.Б. Неймана и Д.Э. Постнова. Всем вышеперечисленным коллегам по лаборатории от имени авторов я выражаю глубокую благодарность и признательность. Искреннюю благодарность выражаю зарубежным коллегам, J. Kurths, W. Ebeling, F. Moss, L. Schimansky-Geier, M. Hasler, T. Kapitaniak, A. Pikovsky, P. McClintock за участие в совместных исследованиях, регулярное обсуждение и критику результатов, за поддержку деятельности нашей лаборатории.

От имени авторов книги благодарю профессоров Ю.Л. Климонтовича, Д.И. Трубецкова, Ю.А. Данилова, С.П. Кузнецова, Б.П. Безручко, Ю.М. Романовского, В. В. Тучина и Ю.А. Кравцова за внимание и постоянный интерес к нашим исследованиям. Работа над книгой была бы невозможной без финансовой помощи, оказываемой лабораторией на разных этапах со стороны Международного Научного Фонда Сороса, Российского Фонда Фундаментальных исследований, Международной программы INTAS, Королевского Общества Лондона, Немецкого Научного Общества и Госкомобразования России. Гранты на исследование, присужденные лаборатории вышеперечисленными организациями, обеспечили условия для проведения исследований, результаты которых положены в основу книги.

В заключение хочется особо поблагодарить Г.И. Стрелкову и А.В. Климпина за огромный труд по подготовке рукописи книги к печати.

*Научный редактор  
заслуженный деятель науки РФ  
чл.-корр. РАЕН,  
профессор В.С. Анищенко*

## **Оглавление**

### **Предисловие.**

**Глава 1. Динамические системы.** 1.1. Введение. 1.2. Динамическая система и ее математическая модель. 1.3. Классификация динамических систем. Дифференциальные и дискретные системы. 1.4. Колебательные системы. 1.5. Фазовые портреты динамических систем. 1.6. Регулярные и странные аттракторы. 1.7. Выводы. Литература.

**Глава 2. Устойчивость, бифуркации, катастрофы.** 2.1. Введение. 2.2. Классификация предельных множеств динамической системы. 2.3. Линейный анализ устойчивости. 2.4. Бифуркации

<sup>4</sup> Анищенко В.С. Стохастические колебания в радиофизических системах. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985, 1986. Ч. 1,2; Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990; Anishchenko V.S. Dynamical Chaos – Models and Experiments. Singapore: World Scientific, 1995.

динамических систем, катастрофы. 2.5. Бифуркации состояний равновесия. 2.6. Бифуркации предельных циклов. 2.7. Бифуркации квазипериодических и странных аттракторов. 2.8. Нелокальные бифуркации. Гомоклинические траектории и структуры. 2.9. Выводы. Литература.

**Глава 3. Детерминированный хаос.** 3.1. Введение. 3.2. Детерминированность. 3.3. Хаос. 3.4. Устойчивость и неустойчивость. 3.5. Нелинейность. 3.6. Неустойчивость и нелинейное ограничение. 3.7. Детерминированный хаос. 3.8. Перемешивание. 3.9. Вероятностные свойства детерминированных систем. 3.10. Детерминированный хаос – математическая экзотика или типичное свойство материального мира? 3.11. Понятие странного аттрактора. 3.12. Размерности аттрактора. 3.13. Выводы. Литература.

**Глава 4. Аттракторы динамических систем.** 4.1. Введение. 4.2. Что такое аттрактор? 4.3. Регулярные аттракторы. 4.4. Странные (хаотические) аттракторы. 4.4.1. Грубые гиперболические аттракторы. 4.4.2. Квазигиперболические аттракторы. Аттракторы типа Лоренца. 4.4.3. Квазиаттракторы и их свойства. 4.5. Странные нехаотические и хаотические нестранные аттракторы. 4.5.1. Хаотические нестранные аттракторы. 4.5.2. Странные нехаотические аттракторы. 4.6. Выводы. Литература.

**Глава 5. Базовые модели динамического хаоса.** 5.1. Введение. 5.2. Дифференциальные системы. 5.2.1. Общие уравнения генератора с 1,5 степенями свободы. 5.2.2. Модели Лоренца и Ресслера. 5.2.3. Модифицированный генератор с инерционной нелинейностью. 5.2.4. Генератор Чуа. 5.3. Дискретные системы. 5.4. Неавтономные и связанные динамические системы. 5.5. Выводы. Литература.

**Глава 6. Бифуркационные механизмы перехода к хаосу.** 6.1. Введение. 6.2. Переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума. 6.3. Жесткие переходы к хаосу. Кризис и перемежаемость. 6.4. Переход к хаосу через разрушение двухчастотных колебаний. 6.4.1. Теорема о разрушении двумерного резонансного тора. 6.4.2. Отображение окружности. Универсальные закономерности мягкого перехода от квазипериодических колебаний к хаосу. 6.5. Переход к хаосу через трехмерный тор. Хаос на трехмерном торе. Хаотические нестранные аттракторы. 6.6. Переход к хаосу через разрушение эргодического тора. Странные нехаотические аттракторы. 6.7. Выводы. Литература.

**Глава 7. Синхронизация хаоса.** 7.1. Введение. 7.2. Классический подход к хаотической синхронизации. Полная и частичная синхронизации хаоса и их количественные характеристики. 7.3. Особенности взаимодействия осцилляторов с фейгенбаумовским сценарием развития хаоса. Фазовая мультистабильность в области синхронизации. 7.4. Бифуркационные механизмы разрушения полной и частичной синхронизации хаоса. 7.5. Особенности хаоса и возможность частотно-фазовой синхронизации. 7.6. Синхронизация в ансамбле хаотических осцилляторов. 7.7. Выводы. Литература.

**Глава 8. Управление хаосом.** 8.1. Введение. 8.2. Управление и синхронизация хаоса в системе взаимно связанных осцилляторов. 8.3. Управляемая синхронизация хаоса методом периодической модуляции параметра связи. 8.4. Стабилизация пространственно-однородных движений посредством параметрического воздействия. 8.5. Управление хаосом в решетках связанных отображений. 8.6. Выводы. Литература.

**Глава 9. Реконструкция динамических систем.** 9.1. Введение. 9.2. Реконструкция аттракторов по временным рядам. 9.2.1. Анализ непрерывных сигналов. 9.2.2. Анализ последовательностей межпиковых интервалов. 9.3. Глобальная реконструкция динамической системы. 9.3.1. Историческая справка и постановка задачи. 9.3.2. Описание алгоритма реконструкции. 9.3.3. Особенность реконструкции ДС по существенно неоднородным реализациям. 9.3.4. Примеры реконструкции динамических систем по данным медико-биологических экспериментов. 9.3.5. Особенности и недостатки алгоритма реконструкции. 9.4. Метод реконструкции в приложении к задаче защиты передаваемой информации. 9.5. Выводы. Литература.

**Глава 10. Стохастический резонанс.** 10.1. Введение. 10.1.1. Физические основы эффекта СР. 10.1.2. Характеристики эффекта СР. 10.2. Отклик на слабый сигнал. Теоретические подходы. 10.2.1. Теория двух состояний. 10.2.2. Теория линейного отклика. 10.3. Стохастический резонанс для сигналов сложного спектрального состава. 10.3.1. Отклик стохастической бистабильной системы на многочастотный сигнал. 10.3.2. Стохастический резонанс для сигналов с конечной шириной спектральной линии. 10.4. Когерентный стохастический резонанс. Стохастический резонанс в хаотических системах. 10.4.1. Когерентный резонанс вблизи бифуркаций периодических решений динамической системы. 10.4.2. Стохастический резонанс в хаотических системах. 10.5. Физический эксперимент. 10.6. Выводы. Литература.

**Глава 11. Синхронизация стохастических систем.** 11.1. Введение. 11.2. Теория стохастической синхронизации бистабильного осциллятора. 11.2.1. Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмита. 11.2.2. Взаимная стохастическая синхронизация связанных бистабильных систем. 11.3. Внешняя и взаимная синхронизации переключений в хаотических системах. 11.3.1. Внешняя синхронизация. 11.3.2. Взаимная синхронизация. 11.4. Стохастический резонанс и синхронизация ансамблей стохастических осцилляторов. 11.4.1. Теория линейного отклика для ансамблей стохастических резонаторов. 11.4.2. Стохастический резонанс в ансамбле. 11.4.3. Синхронизация ансамбля стохастических резонаторов слабым периодическим сигналом. Численное моделирование. 11.5. Стохастическая синхронизация как индуцированный шумом порядок. 11.6. Выводы. Литература.

**Предметный указатель.**

**Лаборатория нелинейной динамики Саратовского государственного университета.**



**ПОЗДРАВЛЯЕМ**

зав. кафедрой радиофизики  
Саратовского университета,  
Заслуженного деятеля науки РФ,  
профессора

Вадима Семеновича  
**АНИЩЕНКО**

с присвоением звания  
*Лауреата премии фонда  
Александра Гумбольдта  
(Германия) за 1999 год*