В Саратове с 4 по 8 сентября 1997 года прошла Международная межвузовская конференция «Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ». Конференция была посвящена памяти члена–корреспондента Академии наук Льва Альбертовича Вайнштейна, который скончался 8 сентября 1989 года. Раздел «Журнал в журнале», содержащий статьи по некоторым докладам конференции, открывается неопубликованной ранее статьей Л.А. Вайнштейна по переходным процессам в волноводе. Появилась она так. Мой тогда аспирант С.П. Кузнецов (ныне доктор, профессор, известный специалист в области нелинейной динамики) и я занимались нестационарной теорией генераторов обратной волны и написали нестационарные уравнения возбуждения волновода, следуя методике, предложенной Львом Альбертовичем для резонаторов. Все было правильно, но нестрого. «Вы последовали моему дурному примеру», – сказал Лев Альбертович при встрече и протянул мне рукопись статьи, которая и публикуется сейчас в журнале в ее первозданном виде. В рукописи рядом с его фамилией стояла и моя. Разумеется, я отказался, но и Лев Альбертович не стал публиковать работу, считая, что идея данной задачи принадлежит не ему.

Д.И. Трубецков

Изв.вузов «ПНД», т.6, № 1, 1998 УДК 537.874.6+621.371

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛНОВОДОВ

Л.А. Вайнштейн

Задача о возбуждении произвольного однородного волновода заданными токами для гармонических (монохроматических) процессов имеет, как известно [1–3], общее и довольно простое решение, для произвольных процессов решение можно получить с помощью преобразования Фурье. Обычно, однако, приходится иметь дело с переходными процессами, спектр которых сосредоточен в окрестности несущей частоты ω_0 (в полосе шириной $2\Delta\omega$, где $\Delta\omega \ll \omega_0$). Для таких процессов достаточно знать *главную часть* поля, обусловленную частотами $\omega \approx \omega_0$ (точнее, $|\omega-\omega_0| \lesssim \Delta\omega$), а побочными частями вследствие их малой интенсивности можно пренебречь. Ниже дан вывод основных соотношений для главных частей волн, возбуждаемых в волноводе; в области, где токов нет, эти соотношения совпадают с известными соотношениями [4] для свободно распространяющихся волн.

Рассмотрим возбуждение однородного и бесконечного по оси z волновода заданным электрическим током с плотностью

$$\mathbf{j}(x,y,z,t) = \mathbf{J}(x,y,z,t)e^{-i\omega_0 t}, \qquad (1)^*$$

где $\mathbf{J}$ – медленно изменяющаяся (по сравнению с $e^{-i\omega_0 t}$) функция t. Здесь физическая плотность тока вводится как $\mathrm{Re}\,\mathbf{j}$, а комплексная величина $\mathbf{j}$ связана со своей трансформантой Фурье $\tilde{\mathbf{j}}$ соотношениями

$$\mathbf{j}(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathbf{j}}(x,y,z,\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \quad \tilde{\mathbf{j}}(x,y,z,\omega) = 1/(2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{j}(x,y,z,t)e^{i\omega t}dt, \qquad (2)$$

аналогичные обозначения применяются и для других физических величин. Забегая вперед, отметим, что для расчета возбуждения s–й волны в волноводе (с комплексным волновым числом $h_s(\omega)$) плотность тока удобно представлять не в виде (1), а в виде

$$\mathbf{j}(x,y,z,t) = \mathbf{J}_s(x,y,z,\theta_s)e^{i[h_s(\omega_0)z-\omega_0 t]}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{J}_s$ – медленно изменяющаяся функция четвертого аргумента $\theta_s = t - h_s'(\omega_0)z$, а h_s' – производная h_s по ω. Наиболее интересные результаты получаются тогда, когда $\mathbf{J}_s$ есть медленно изменяющаяся функция третьего аргумента z (по сравнению с

* Здесь и далее жирным выделены векторные величины. (*Прим. ред.*)

$e^{ih_s(\omega_0)z}$), то есть при синхронизме тока с s волной, но в общем случае мы этого не предполагаем.

Для трансформант Фурье теория возбуждения волноводов [1–3] дает выражения

$$\tilde{\mathbf{E}} = \Sigma_{s,-s}\tilde{c}_s\tilde{\mathbf{E}}_s + 4\pi/(i\omega\varepsilon)\,\tilde{\mathbf{j}}^l, \qquad \tilde{\mathbf{H}} = \Sigma_{s,-s}\tilde{c}_s\tilde{\mathbf{H}}_s, \tag{4}$$

где значок $s,-s$ означает суммирование по волнам обоих направлений, $h_{-s}(\omega)=-h_s(\omega)$, а $\tilde{\mathbf{j}}^l$ – проекция $\mathbf{j}$ на ось z. Если в выражениях (4) считать $\tilde{\mathbf{E}}_s$, $\tilde{\mathbf{H}}_s$ зависящими только от x,y,ω, то есть включить множитель $e^{ih_s(\omega)z}$ в коэффициент $\tilde{c}_s=\tilde{c}_s(z,\omega)$, то последний будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d\tilde{c}_s}{dz} - ih_s(\omega)\tilde{c}_s = \tilde{i}_s, \qquad \tilde{i}_s(z,\omega) = \frac{1}{N_s}\int \tilde{\mathbf{j}}\,\tilde{\mathbf{E}}_{-s}ds, \tag{5}$$

где $N_s=N_s(\omega)$ – норма s–й волны, а интегрирование производится по всему поперечному сечению z=const.

Обозначим $\Omega=\omega-\omega_0$ и введем вместо $\tilde{c}_s$ и $\tilde{i}_s$ новые функции $\tilde{C}_s$ и $\tilde{I}_s$ по формулам

$$\tilde{c}_s(z,\omega) = \tilde{C}_s(z,\Omega)e^{i[h_s(\omega_0)+h_s'(\omega_0)\Omega]z}, \quad \tilde{i}_s(z,\omega) = \tilde{I}_s(z,\Omega)e^{i[h_s(\omega_0)+h_s'(\omega_0)\Omega]z}, \tag{6}$$

тогда уравнение (5) примет вид

$$\frac{d\tilde{C}_s}{dz} - i[h_s(\omega) - h_s(\omega_0) - h_s'(\omega_0)\Omega]\tilde{C}_s = \tilde{I}_s. \tag{7}$$

Аппроксимируем в нем функцию $h_s(\omega)=h_s(\omega_0+\Omega)$ при $|\Omega|\lesssim\Delta\omega$ несколькими членами ряда Тейлора, в результате чего получаем уравнение

$$\frac{d\tilde{C}_s}{dz} - i[\frac{h_s''(\omega_0)}{2}\Omega^2 + \frac{h_s'''(\omega_0)}{6}\Omega^3 + \ldots]\tilde{C}_s = \tilde{I}_s, \tag{8}$$

и если вычислить функции

$$c_s(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{c}_s(z,\omega)e^{-i\omega t}d\omega = C_s(z,\theta_s)e^{i[h_s(\omega_0)z-\omega_0 t]},$$

$$i_s(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{i}_s(z,\omega)e^{-i\omega t}d\omega = I_s(z,\theta_s)e^{i[h_s(\omega_0)z-\omega_0 t]}, \tag{9}$$

$$C_s(z,\theta_s) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{C}_s(z,\Omega)e^{-i\Omega\theta_s}d\Omega, \quad I_s(z,\theta_s) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{I}_s(z,\Omega)e^{-i\Omega\theta_s}d\Omega,$$

то C_s и I_s – медленно изменяющиеся функции θ_s – будут связаны уравнением в частных производных

$$\frac{\partial C_s}{\partial z} + \frac{ih_s''(\omega_0)}{2}\frac{\partial^2 C_s}{\partial\theta_s^2} - \frac{h_s'''(\omega_0)}{6}\frac{\partial^3 C_s}{\partial\theta_s^3} + \ldots = I_s, \tag{10}$$

причем C_{-s} и I_{-s} – связаны таким же уравнением, в котором h_s заменено на $h_{-s}=-h_s$. Ниже будут выписаны выражения для функции C_s, соответствующей волне, которая распространяется в положительном направлении оси z, для функции C_{-s} справедливы аналогичные выражения.

Общее решение уравнения (10) есть сумма общего решения однородного уравнения $C_s^0(z,\theta_s)$ и частного решения неоднородного уравнения. Если частное решение удовлетворяет условию излучения, то мы будем иметь

$$C_s(z,\theta_s) = C_s^0(z,\theta_s) + \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} G_s(z-\zeta,\theta_s-\theta)I_s(\zeta,\theta)d\theta, \tag{11}$$

где при удержании первых двух членов в левой части (10) функция Грина G_s равна [4]

$$G_s(z,\theta_s) = \frac{1}{[-2i\pi h_s''(\omega_0)z]^{1/2}}\exp[-\frac{i\theta_s^2}{2h_s''(\omega_0)z}], \tag{12}$$

а при $h_s''(\omega_0)=0$ и учете только первого и третьего членов

$$G_s(z,\theta) = \frac{1}{\pi^{1/2}[h_s'''(\omega_0)z/2]^{1/3}}\,V(-\frac{\vartheta}{[h_s'''(\omega_0)z/2]^{1/3}}) \tag{13}$$

(где $V(\tau)$ – функция Эйри), а если в левой части (10) учитывать только член $\partial C_s/\partial z$, то формула (11) примет вид

$$C_s(z,\theta_s) = C_s^0(\theta_s) + \int_{-\infty}^{z} I_s(\zeta,\theta_s)d\zeta, \tag{14}$$

причем C_s^0 не зависит от z. Значения $C_s^0(z,\theta_s)$ при $z\geq z_0$, зная $C_s^0(z_0,\theta_s)$, можно вычислить по формуле

$$C_s^0(z,\theta_s) = \int_{-\infty}^{\infty}G_s(z-z_0,\theta_s-\theta)C_s^0(z_0,\theta)d\theta, \tag{15}$$

выведенной ранее [4] и применимой к C_s, если $I_s=0$ при $z\geq z_0$. Существенно, что одна и та же функция G_s определяет изменение комплексной огибающей C_s как в процессе свободного распространения волны, так и процессе ее возбуждения сторонними токами. При достаточно малых z и вещественном значении $h_s'(\omega_0)$ выражения (12) и (13) можно заменить дельта–функцией

$$G_s(z,\vartheta) = \delta(\vartheta) \quad (z > 0), \tag{16}$$

приводящей к формуле (14).

Непосредственный физический интерес представляет, однако, не функция C_s, а поле s–й волны

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_s(x,y,z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{c}_s(z,\omega)\tilde{\mathbf{E}}_s(x,y,\omega)e^{-i\omega t}dt = \mathbf{E}_s(x,y,z,\theta_s)e^{i[h_s(\omega_0)z-\omega_0 t]}, \\ \mathbf{E}_s(x,y,z,\theta_s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{C}_s(z,\Omega)\tilde{\mathbf{E}}_s(x,y,\omega_0+\Omega)e^{-i\Omega\theta_s}d\Omega \end{aligned} \tag{17}$$

и, кроме того, нужно связать «возбуждающую» функцию I_s в правой части (10) с векторной функцией $\mathbf{J}_s$, см. формулу (3). Полагая $N_s\equiv1$, введем векторные функции

$$\mathbf{E}_{\pm s}^0(x,y,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_{\pm s}(x,y,\omega_0+\Omega)e^{-i\Omega\theta}d\Omega, \tag{18}$$

тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(x,y,z,\theta_s) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_s(z,\theta_s-\theta)\mathbf{E}_s^0(x,y,\theta)d\theta, \\ I_s(z,\theta_s) &= \int ds \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_s(x,y,z,\theta_s-\theta)\mathbf{E}_{-s}^0(x,y,\theta)d\theta. \end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, поле s–й волны получается в результате свертки функции C_s с векторной функцией $\mathbf{E}_s^0$ по «групповому» времени $\theta=t-h_s'(\omega_0)z$, а возбуждающая функция I_s – в результате такой же свертки векторных функций $\mathbf{J}_s$ и $\mathbf{E}_{-s}^0$ и интегрирования по поперечному сечению. Зависимость $\mathbf{E}_s^0$ и $\mathbf{E}_{-s}^0$ от θ различна для различных волн: так, для чисто поперечных волн в свободном пространстве, в плоскопараллельном волноводе или в коаксиальной линии $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{E}_{-s}$ и N_s не зависят от ω, и мы получаем

$$\mathbf{E}_{\pm s}^0 = \tilde{\mathbf{E}}_{\pm s}(x,y)\delta(\theta), \tag{20}$$

так что выражения (19) упрощаются к виду

$$\mathbf{E}_s(x,y,z,\theta_s) = C_s(z,\theta_s)\tilde{\mathbf{E}}_s(x,y), \quad \mathbf{I}_s(z,\theta_s) = \int \mathbf{J}_s(x,y,z,\theta_s)\mathbf{E}_{-s}(x,y)ds. \tag{21}$$

Другие волны характеризуются конечным «временем поперечного установления» Δt_s**. Если $\Delta t_s \ll \Delta\theta$, где $\Delta\theta \sim 1/\Delta\omega$ – характерное время для комплексных огибающих токов и полей (то есть $\mathbf{J}_s$ и C_s), то формулы (21) остаются справедливыми при условии, что $\mathbf{E}_s$ и $\tilde{\mathbf{E}}_{-s}$ взяты на несущей частоте ω_0; последнее вытекает из соотношений

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\pm s}^0(x,y,\theta)d\theta = \tilde{\mathbf{E}}_{\pm s}(x,y,\omega_0). \tag{22}$$

Если $I_s(z,\theta_s)$ есть медленно изменяющаяся функция z, то есть если возбуждающий ток находится в синхронизме с данной волной, то согласно формулам (11) и (14) по мере распространения волны (с ростом z) происходит накопление возбуждений, благодаря чему $C_s(z,\theta_s)$ может достичь больших значений (пространственный резонанс!). При отсутствии синхронизма $I_s(z,\theta_s)$ есть быстро изменяющаяся функция z, такой же – и при том малой – получается функция C_s (если $C_s^0=0$). Влияние второго и третьего члена в левой части (10) тем меньше, чем больше характерное время $\Delta\theta$, то есть чем меньше $\Delta\omega$.

Выведенные соотношения могут быть, в частности, применены к электронным приборам – ЛБВ и ЛОВ. Так, в книге [5], по–существу, использовались соотношения (21) и (22) и уравнение (10) с одним первым членом в левой части: при этом мнимая часть $h_s'(\omega_0)$, ответственная за изменение формы энергетического спектра волны и его смещение по оси частот (то есть за сдвиг несущей частоты [4]), не учитывалась. Второй член в левой части (10) позволяет учесть деформацию комплексной огибающей при распространении волны, например растяжение и сжатие импульса [4].

Библиографический список

1. *Вайнштейн Л.А.* // ЖТФ. 1953. Т. 23, № 4. С. 653–666.

2. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957. Гл. XIV, §79–82.

3. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973. Лекция V.

4. *Вайнштейн Л.А.* // УФН. 1976. Т. 118, №2. С. 339–367.

5. Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В.Н. Шевчика и Д.И. Трубецкова. Саратов: Изд–во Сарат. ун–та, 1975. Гл.III.

Институт физических проблем АН СССР *Осень, 1975*

** Для волн в пустом волноводе с идеально проводящими стенками $\Delta t_s \sim 1/\omega_s$, где ω_s – критическая частота (*Прим. авт*).