

ДИСКРЕТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – АНАЛОГ ПОТОКОВОЙ СИСТЕМЫ

А.А. Короновский

В настоящей работе предлагается и исследуется одномерное двухпараметрическое отображение, которое в своем поведении на плоскости управляющих параметров качественно повторяет динамику потоковой системы – радиотехнического генератора, который описывается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведено сравнительное исследование поведения потоковой системы и дискретного отображения на плоскости управляющих параметров, получены соответствующие фазовые портреты. Показано значительное совпадение поведения отображения и потоковой системы, а также сходство с результатами экспериментального исследования радиотехнического генератора, полученными ранее.

Генератор на туннельном диоде был сконструирован, исследован и описан С.В. Кияшко, А.С. Пиковским и М.И. Рабиновичем [1–3]. В натурном и численном экспериментах ими было показано, что в данном генераторе имеют место хаотические колебания. В [4] экспериментальным путем была впервые получена подробнейшая карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров «инкремент затухания – параметр нелинейности» для генератора с туннельным диодом (рис. 1), показывающая пути возникновения хаоса и закономерности переходов между различными типами сложнопериодических колебаний при изменении управляющих параметров.

В [5] было проведено исследование той же системы, с одним лишь отличием, что вместо реального туннельного диода был использован его кусочно–линейный аналог, реализованный с помощью операционных усилителей. В ходе численного и

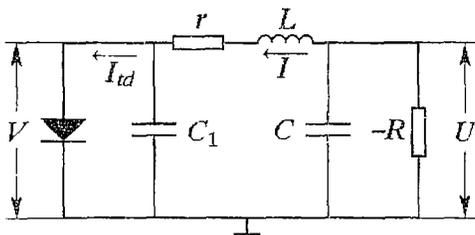


Рис. 1. Эквивалентная схема генератора на туннельном диоде

натурного экспериментов было показано, что замена нелинейного элемента его кусочно–линейным аналогом не ведет к качественному изменению динамики данной системы.

Стоит отметить, что главным образом описание рассматриваемой системы строилось на основе потоковой модели, то есть в качестве базовой модели выбиралась система обыкновенных дифференциальных уравнений. Тем не менее, в [6,7] предлагалось отображение, полученное на базе исходных

дифференциальных уравнений¹, которое несмотря на то, что было в неявном виде, позволяло наглядно объяснить сущность происходящих в системе процессов: раскручивание системы на одной ветви вольт–амперной характеристики (ВАХ) туннельного диода; скачкообразный переход на другую ветвь и последующее возвращение в состояние, близкое к первоначальному. Однако, вопрос, насколько поведение этого отображения повторяет на плоскости управляющих параметров поведение потоковой системы, детально не рассматривался, да и неявный вид этого отображения затруднял исследование системы.

Следует отметить, что попытка описания систем с помощью дискретных отображений имеет ряд достоинств, к которым относятся прежде всего простота и быстрота анализа отображений по сравнению с анализом потоковых систем. К сожалению, несмотря на всю привлекательность и продуктивность этого метода, не существует каких–либо общих формальных рецептов, каким образом можно перейти от потоковой системы к дискретному отображению², записанному аналитически в явном виде, хотя иногда для отдельных потоковых систем такой переход осуществить удается, как это было сделано, например, в [8] для неавтономного релаксационного генератора³.

Для кусочно–линейных систем также иногда удается найти отображение, которое описывало бы их динамику [9], однако, как правило, эти отображения задаются с помощью неявных функций, но, тем не менее, на основе анализа подобных отображений удается выявить интересные закономерности поведения изучаемых объектов [10].

Возможен еще один подход к описанию потоковых систем с помощью отображений, когда отображения не выводятся аналитически, а «конструируются», исходя из каких–либо соображений, основанных на анализе поведения системы. Безусловно, при таком подходе можно говорить, прежде всего, о качественном подобии исходной системы и полученного отображения, но, тем не менее, этот способ дает иногда хорошие результаты [11].

В настоящей работе предложено одномерное двухпараметрическое отображение, которое является дискретным аналогом вышеописанного генератора с кусочно–линейным аналогом туннельного диода. Сразу следует отметить, что это отображение не выводится из системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику генератора [5], а именно «конструируется». В качестве базового было выбрано отображение, предложенное в [7], затем оно было аппроксимировано явно заданной непрерывной функцией⁴, зависящей от двух параметров таким образом, чтобы при изменении значений этих параметров построенное отображение демонстрировало динамику, аналогичную динамике генератора с кусочно–линейным аналогом туннельного диода:

$$x_{n+1} = f_{\varphi}(\varepsilon, x_n). \quad (1)$$

Сущность данного типа отображений заключается в том, что одним из параметров, от которых зависит отображение, является угол поворота φ графика отображения относительно какой–либо опорной точки (например (0;0), как в рассматриваемом случае). Для «нулевого» угла поворота описываемое отображение имеет вид

$$f_0(\varepsilon, x) = y_1(x)\sigma(y_2(\varepsilon, x) - y_1(x)) + y_2(\varepsilon, x)\sigma(y_1(x) - y_2(\varepsilon, x)), \quad (2)$$

¹ Характеристика туннельного диода аппроксимировалась кусочно–линейной функцией, правда, эта функция была гораздо более идеализированной и менее приближена к реальной, нежели описываемая в [5].

² Здесь не имеется в виду получение отображений численными методами, как, например, получение сечения Пуанкаре или диаграммы Ламерея из решения системы дифференциальных уравнений, полученного каким–либо численным методом (допустим, методом Рунге – Кутты).

³ Поведение системы удалось описать с помощью несколько модифицированного отображения окружности на себя.

⁴ Сама функция непрерывна, но ее первая производная имеет разрыв первого рода.

где функции $y_1(x)$, $y_2(\epsilon, x)$ определены как

$$y_1(x) = 125x, \quad (3)$$

$$y_2(\epsilon, x) = 2.85[(0.45 + \epsilon)^2 + (x - 0.85)^2]^{1/2} - 0.3, \quad (4)$$

а $\sigma(x)$ – функция Хевисайда:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Несмотря на сложный вид отображения (2), принцип, по которому это отображение устроено, довольно прозрачен: (3) описывает линейный участок отображения, который соответствует нахождению потоковой системы на α -ветви характеристики кусочно-линейного аналога туннельного диода, (4) представляет собой ветвь гиперболы и соответствует нахождению генератора на β -ветви характеристики, а (5) «сшивает» $y_1(x)$ и $y_2(\epsilon, x)$ в точке их пересечения и обеспечивает непрерывность функции (2). Численные значения в соотношениях (3), (4) подобраны таким образом, чтобы обеспечить сходство динамики отображения и исходной потоковой системы.

Теперь для того, чтобы получить одномерное отображение $f_\varphi(\epsilon, x)$ при другом значении параметра φ , необходимо осуществить поворот графика отображения $f_0(\epsilon, x)$ на этот угол φ относительно начала координат. В соответствии с общепринятой терминологией, угол поворота φ считается положительным, если вращение осуществляется против часовой стрелки. Ясно, что для любого угла поворота $\varphi \neq 0$ отображение $f_\varphi(\epsilon, x)$ в явном виде (в общем случае) записано быть не может. Более того, при поворотах на угол φ ($\varphi < 0$, $|\varphi| > |\varphi^*|$, $\varphi^* = \text{arccotg}(\partial f_0(x^*, \epsilon) / \partial x)$, где x^* определяется из соотношения $y_1(x^*) = y_2(x^*)$), функция $f_\varphi(\epsilon, x)$ становится неоднозначной (рис. 2). В этом случае возможны два варианта.

1. Исследовать поведение $f_\varphi(\epsilon, x)$ как поведение отображения с гистерезисом. Заметим, что подобные отображения, графики которых содержат неоднозначности, имеют под собой реальную «физическую» основу и исследуются в литературе (см., например, [12]).

2. Рассматривать поведение $f_\varphi(\epsilon, x)$ как однозначного отображения, выбрав какую-либо одну ветвь функции, как было сделано в данном случае: если для отображения $f_\varphi(\epsilon, x)$ при некотором значении x возможно два значения $f_\varphi(\epsilon, x)$, соответствующие ветвям $y_1(x)$ и $y_2(\epsilon, x)$, то в качестве значения $f_\varphi(\epsilon, x)$ выбирается минимальное значение, соответствующее ветви $y_2(\epsilon, x)$. Подобный выбор ветви отображения обусловлен видом одномерного отображения, полученного из численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода (см. [5]).

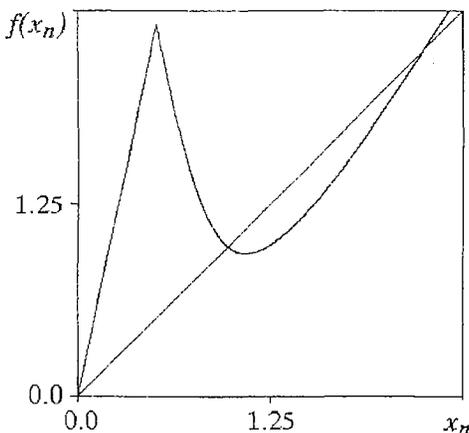


Рис. 2. Отображение (1) для угла поворота $\varphi = -0.2$ ($\epsilon = 0.05$)

Рис. 3 иллюстрирует график отображения (1), повернутого на отрицательный угол поворота φ относительно начала координат, причем функция $f_\varphi(\epsilon, x)$ сохраняет однозначность, а рис. 4 показывает то же самое отображение для большего по абсолютному значению угла поворота, при котором $f_\varphi(\epsilon, x)$ становится неоднозначной. Понятно, что внешний вид отображения

Рис. 3 иллюстрирует график отображения (1), повернутого на отрицательный угол поворота φ относительно начала координат, причем функция $f_\varphi(\epsilon, x)$ сохраняет однозначность, а рис. 4 показывает то же самое отображение для большего по абсолютному значению угла поворота, при котором $f_\varphi(\epsilon, x)$ становится неоднозначной. Понятно, что внешний вид отображения

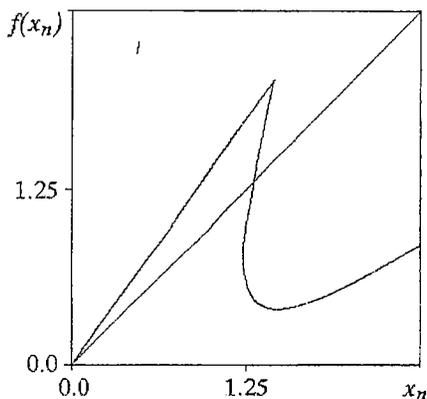


Рис. 3. Отображение (1) для угла поворота $\varphi = -0.5$ ($\epsilon = 0.05$). Видно, что функция $f_\varphi(\epsilon, x)$ становится неоднозначной

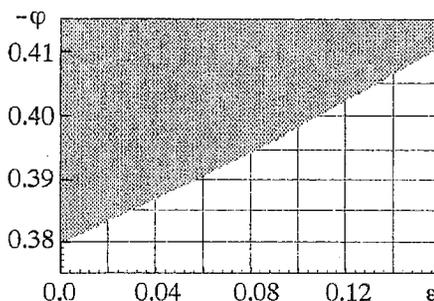


Рис. 4. Значения угла поворота φ , при котором отображение $f_\varphi(\epsilon, x)$ становится неоднозначным (показаны серым цветом)

(1), приведенный на рис. 3 и 4, качественно подобен отображению, описанному в [7].

Поскольку говорится, что отображение (1) должно в какой-то мере соответствовать генератору с кусочно-линейным аналогом туннельного диода, то возникает вполне резонный вопрос: какая физическая сущность стоит за «поворотом» графика отображения, и изменению какого параметра потоковой системы соответствует изменение угла поворота φ . Понятно, что поскольку туннельный диод (или его кусочно-линейный аналог) является единственным нелинейным элементом в генераторе, то все особенности поведения потоковой системы в значительной мере определяются свойствами этого нелинейного элемента. Ясно, что дискретное отображение должно нести на себе отпечаток нелинейного элемента системы. И, по сути дела, так оно и происходит: достаточно лишь взглянуть на график отображения, предложенного в [7], чтобы увидеть сходство между этим отображением и ВАХ туннельного диода (или же его кусочно-линейного аналога). Если в качестве переменной, на основании наблюдений за которой будет строиться одномерное отображение, выбрать значение тока, протекающего через диод (туннельный или его аналог), то одномерное отображение, иллюстрирующее зависимость, скажем, локального максимума значения тока на n -ом шаге от максимального значения на предыдущем ($n-1$) шаге, будет качественно повторять ВАХ диода.

Одним из главных управляющих параметров в генераторе с кусочно-линейным аналогом туннельного диода является величина сопротивления r , включенного, по сути дела, последовательно с диодом (см. рис. 1). Тогда диод и линейное сопротивление r можно рассматривать как один нелинейный элемент, ВАХ которого при $r=0$ совпадает с ВАХ диода (который, однако, имеет свое собственное сопротивление). В свою очередь, вид отображения (1) тогда будет определяться характеристикой именно этого «виртуального» нелинейного элемента. Как же будет трансформироваться ВАХ этого элемента с увеличением значения сопротивления r ? Нетрудно видеть, что с ростом величины сопротивления r ВАХ будет поворачиваться по часовой стрелке (следовательно, угол поворота φ должен быть отрицательным) и искажаться. Поскольку речь идет всего лишь о качественном соответствии поведения отображения динамике рассматриваемой системы, в первом приближении можно пренебречь искажением ВАХ нелинейного элемента (состоящего из диода и резистора), а, следовательно, и искажением отображения (1), и предположить, что именно поворот является доминирующим фактором, определяющим свойства отображения системы. Естественно, это всего лишь предположение, но, как будет видно из дальнейшего рассуждения, это предположение оправдывается с хорошей степенью точности.

Для изучения поведения вышеописанного отображения (1) и сопоставления полученных результатов с поведением генератора на туннельном диоде была построена

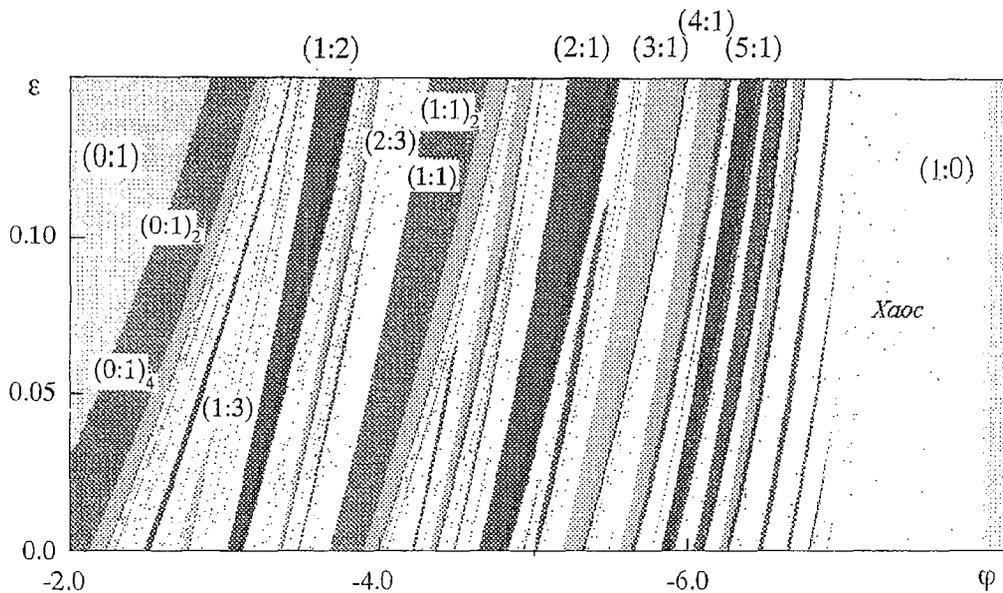


Рис. 5. Карта режимов для отображения (1), построенная на плоскости управляющих параметров $(\varphi; \epsilon)$. Поскольку изменению сопротивления r в генераторе с кусочно-линейным аналогом туннельного диода соответствует нелинейное изменение угла поворота φ , на карте режимов параметр φ отложен в нелинейном масштабе

карта режимов на плоскости управляющих параметров $(\varphi; \epsilon)$, показанная на рис. 5.

Совершенно справедливо встает вопрос о классификации периодических колебательных режимов. По аналогии с классификацией режимов генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода (см. [5]), колебательные режимы идентифицируются с помощью двух целых чисел $(m:n)$. Первое число m обозначает число точек последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{n+m}$, лежащих на линейном участке⁵

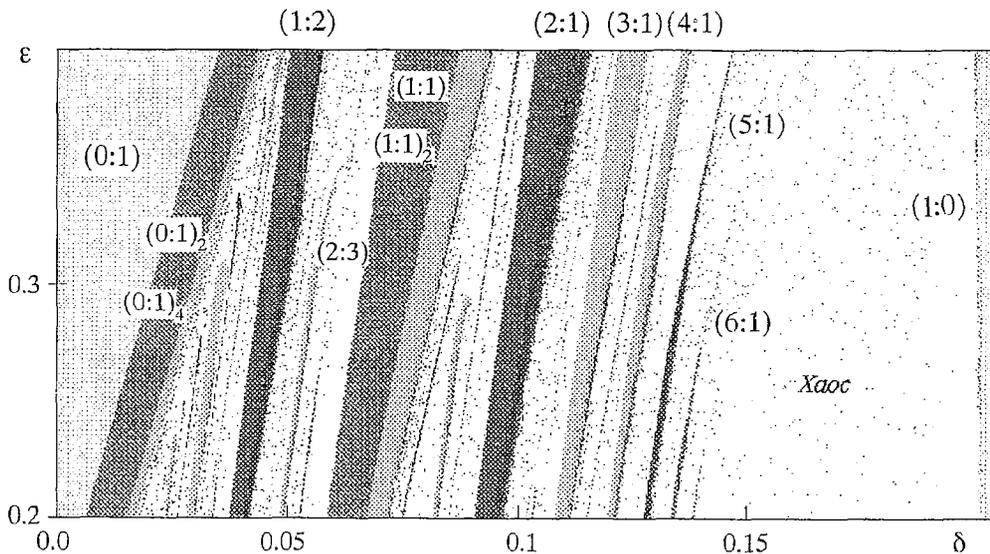


Рис. 6. Карта режимов колебаний генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода на плоскости управляющих параметров $(\delta; \epsilon)$, полученная в ходе численного эксперимента. Параметр является, фактически, безразмерным сопротивлением r ; смысл и численные значения всех остальных параметров, при которых была построена эта карта, см. в [5]

⁵ При $r=0$ для отображения (2) этот участок описывается функцией (3).

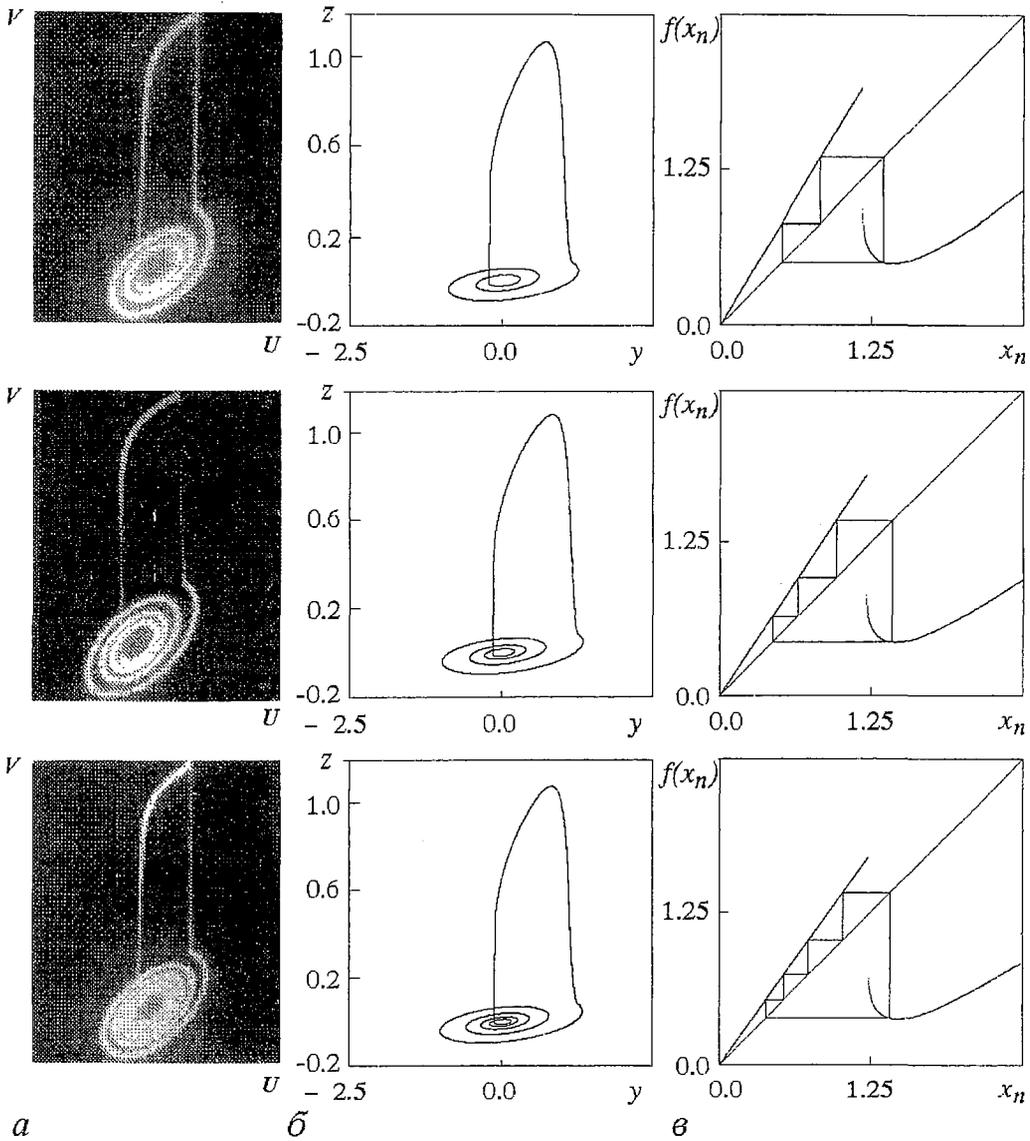


Рис. 7. Периодические режимы, соответствующие основным базовым циклам для: *a* – натурального эксперимента; *б* – потоковой системы {режим (2:1): $\delta=0.091$, $\epsilon=0.2$; режим (3:1): $\delta=0.107$, $\epsilon=0.2$; режим (4:1): $\delta=0.119$, $\epsilon=0.2$ }; *в* – дискретного отображения (1) {режим (2:1): $\varphi=-0.543$, $\epsilon=0.05$; режим (3:1): $\varphi=-0.585$, $\epsilon=0.05$; режим (4:1): $\varphi=-0.619$, $\epsilon=0.05$ }

отображения (1), и соответствует полному числу оборотов фазовой траектории в плоскости $(I_{td}(V), U)$ для генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода. Число n определяется количеством точек, лежащих на втором участке

отображения (1) и принадлежащих последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{i+n}$, которая является периодом колебаний дискретного отображения. Для генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода n соответствует полному числу выходящих в пространство витков фазовой траектории аттрактора.

Как видно из простого сопоставления рис. 5 и рис. 6, сходство динамики потоковой системы и дискретного отображения оказывается на редкость хорошим. На карте режимов отображения повторяются не только основные базовые циклы $(m:1)$, $m=1, 2, \dots$ (рис. 7), но и окна периодичности в областях, соответствующих

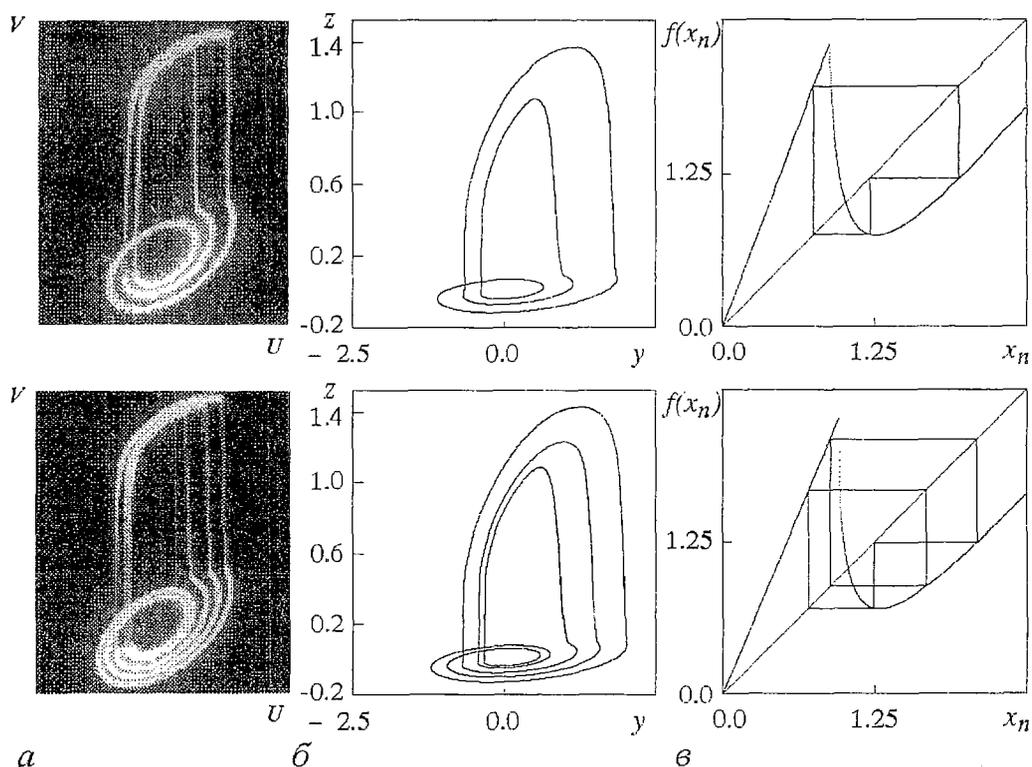


Рис. 8. Периодические режимы, соответствующие окнам периодичности в хаосе для *a* – натурального эксперимента; *b* – генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода [режим (1:2): $\delta=0.0385$, $\epsilon=0.2$; режим (2:3): $\delta=0.0478$, $\epsilon=0.2$]; *в* – дискретного отображения (1): [режим (1:2): $\phi=-0.359$, $\epsilon=0.05$; режим (2:3): $\phi=-0.392$, $\epsilon=0.05$]

хаотическим колебаниям (рис. 8)⁶. Также отчетливо просматривается для дискретного отображения сценарий перехода от периодических колебаний к хаотическим. Рис. 9 иллюстрирует этот сценарий на базе режима (1:1).

Предложенное отображение (1), обеспечивает хорошее качественное совпадение поведения генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода (поточной системы) с динамикой этого отображения. Представляется весьма перспективным применение подобных дискретных отображений для качественного изучения потоковых систем, в которых одним из управляющих параметров является параметр диссипации: с помощью таких отображений можно быстро конструировать дискретную модель – аналог исходной системы, с тем, чтобы за короткое время получить полную качественную картину поведения потоковой системы в зависимости от значений управляющих параметров. Хотя, безусловно, предлагаемый новый тип отображения не является панацеей и, конечно же, не подойдет для всех без исключения радиофизических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, простота анализа дискретной системы на плоскости управляющих параметров по сравнению с таким же исследованием потоковых систем делает использование подобных отображений весьма привлекательным.

В заключение выражаю глубокую признательность А.А. Кипчатову за внимание к этой работе, ряд ценных советов и плодотворные обсуждения.

⁶ Для построения фазовых портретов потоковой системы на рис. 7 и 8 использовалась система дифференциальных уравнений и численные значения параметров, приведенные в [5].

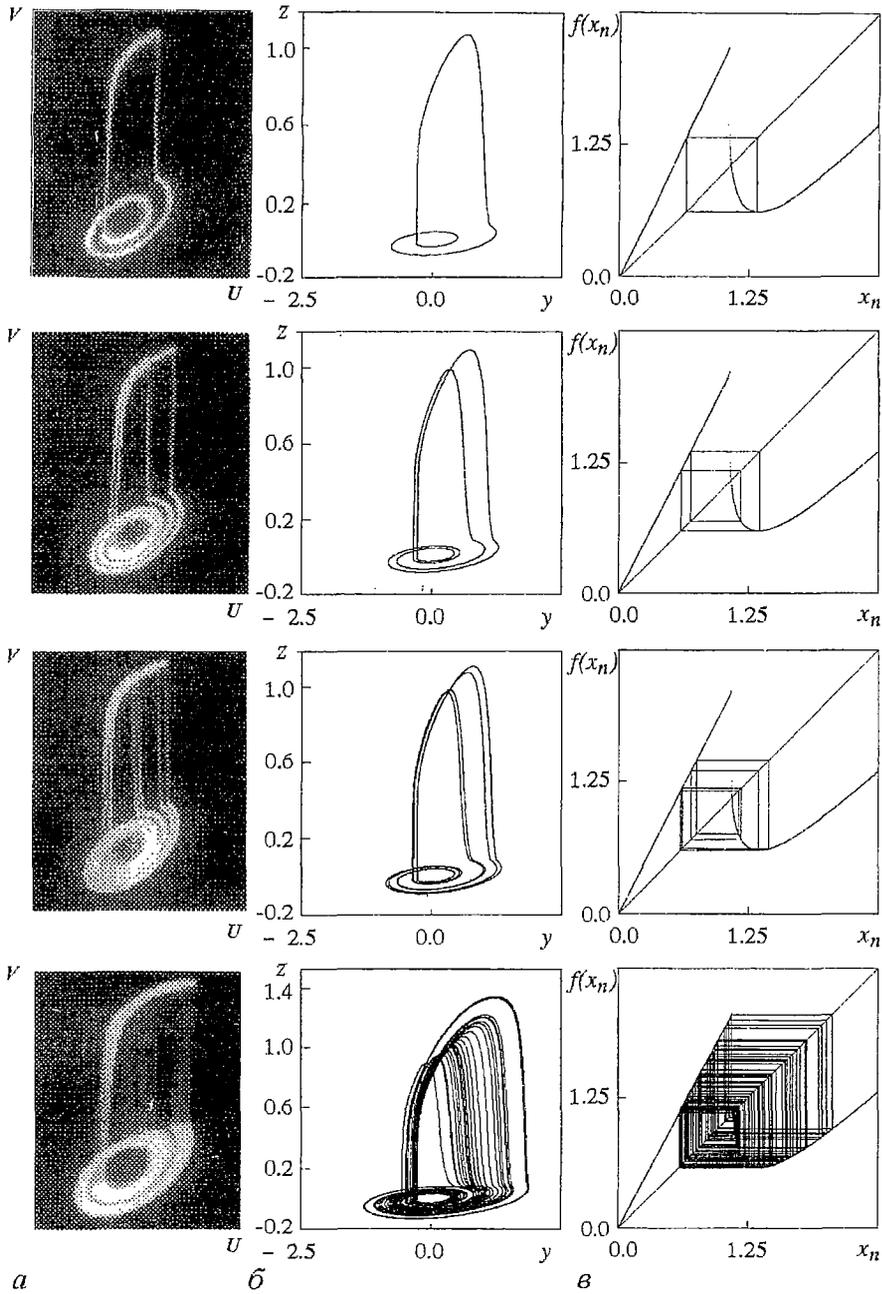


Рис. 9. Фазовые портреты поведения генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода и переход к хаосу на базе режима (1:1): а – натурный эксперимент; б – численный эксперимент ($\epsilon=0.2$) (1:1) $\delta=0.06$, (1:1)₂ $\delta=0.069$, (1:1)₄ $\delta=0.0705$, (1:1)_{хаос} $\delta=0.078$; в – одномерное отображение ($\epsilon=0.05$) (1:1) $\varphi=-0.442$, (1:1)₂ $\varphi=-0.464$, (1:1)₄ $\varphi=-0.469$, (1:1)_{хаос} $\varphi=-0.479$

Библиографический список

1. *Pikovsky A.S., Rabinovich M.I.* Stochastic oscillations in dissipative systems // *Physica*. 1981. Vol. 2D. P. 8.
2. *Рабинович М.И.* Стохастические автоколебания и турбулентность // *УФН*. 1978. Т. 125. С. 123.

3. Пиковский А.С. О статистических свойствах простейшей модели стохастических автоколебаний // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 7. С. 823.
4. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А. Хаос и периодичность в генераторе на туннельном диоде // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 4. С. 431.
5. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А. Путь к хаосу в кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. ПНД. 1993. Т. 1, № 1,2. С. 93.
6. Пиковский А.С., Рабинович М.И. Простой генератор со стохастическим поведением // Докл. ДАН СССР. 1978. Т. 239, № 2. С. 301.
7. Кияшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И. Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // РЭ. 1980. Т. 25. С. 336.
8. Кипчатов А.А., Подин С.В. Исследование поведения неавтономного релаксационного генератора в пространстве параметров // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4, 5. С. 30.
9. Genot M. Applications of 1-D map from Chua's circuit: a pictorial guide // Journal of Circuits, Systems and Computers. 1993. Vol. 3, № 2. P. 375.
10. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Self-similarity and universality in Chua's circuit via the approximate Chua's 1-D map // Journal of Circuits, Systems and Computers. 1993. Vol. 3, № 2. P. 431.
11. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Zhalnin A.U. Map modelling of non-autonomous LR-diode circuit complicated behaviour // Proc. of the 5th International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. NDES'97. Moscow. Russia. 26-27 June. 1997. P. 431.
12. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 29.07.97
после переработки 8.12.97

DISCRETE MAP – FLOW SYSTEM ANALOG

A.A.Koronovskiy

This work deals with the one-dimensional two-parametric map the dynamics of which is very much like the dynamics of radioengineering oscillator described by the system of three differential ordinary equations. It has been shown that the behaviours of the oscillator and of the discrete map agree very closely.



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Ассистент кафедры электроники и волновых процессов СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Опубликовал в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым монографию «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996). Автор ряда статей в центральной печати.