



КЛАСТЕРНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЦЕПОЧКЕ БИСТАБИЛЬНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.А. Макаров, В.И. Некоркин

Исследуется феномен синхронизации колебаний в цепочке бистабильных автоколебательных элементов. Обнаружено, что взаимная синхронизация колебаний происходит с образованием либо фазовых, либо частотных кластеров. Обсуждается связь между положением кластеров в цепочке и пространственной динамикой системы.

Введение

Синхронизация колебаний является одним из наиболее фундаментальных явлений, наблюдаемых в природе и широко используемых в технике. В той или иной мере проблемы, связанные с достижением синхронных режимов работы, возникают в самых различных областях науки. Например, в радиотехнике синхронизация используется для повышения стабильности частоты генераторов, демодуляции сигналов; в радиофизике ее используют для повышения мощности лазерного излучения, соединяя лазеры в сети; в механике на основе этого явления построены различные вибромеханизмы и т.д. Поэтому исследование данной проблемы является традиционной задачей во многих отраслях науки.

В последнее время большой интерес исследователей привлекает проблема взаимной синхронизации большого числа активных автоколебательных объектов, объединенных в единый коллектив с помощью различного рода связей. К такого типа объектам относятся: сети фазовой синхронизации [1], массивы лазерных диодов [2,3], системы с джозефсоновскими контактами [4], некоторые простейшие биологические системы [5,6], цепочки и решетки электронных систем [7] и др.

Многие из этих систем построены из элементов, обладающих автоколебательными свойствами. Исследованию коллективной динамики систем из автоколебательных элементов (далее для краткости будем называть такие элементы осцилляторами) посвящены работы [8–13]. К работам этого направления относятся также многочисленные публикации, посвященные исследованию динамики фазовых осцилляторов (см., например, [14,15]). Интуитивно понятно представление о синхронизации колебаний, как об одновременном изменении одноименных переменных различных осцилляторов, в то же время допускает несколько уровней степени синхронизации. В настоящей работе мы рассматриваем следующие уровни синхронизации.

а. *Синфазная синхронизация* – наиболее сильная форма синхронизации, когда разность фаз между осцилляторами с течением времени исчезает.

б. *Фазовая синхронизация* – более слабая, чем предыдущая форма синхронизации, при которой разность фаз между осцилляторами остается постоянной, не равной нулю.

в. *Синхронизация в среднем* – наиболее общий вид синхронизации, для которой характерно невозрастание разности фаз осцилляторов. Другими словами, разность фаз может быть произвольной ограниченной функцией времени и, следовательно, средние частоты колебаний осцилляторов являются одинаковыми.

Здесь необходимо добавить, что установление единого ритма колебаний в смысле «а», «б» или «в» может произойти не во всем ансамбле осцилляторов, а лишь в некоторой его части. В этом случае принято говорить (см., например, [14]) о кластерной синхронизации.

В литературе достаточно полно изучено явление синхронизации в цепочечных системах, у которых в фазовом пространстве каждого элемента существует единственный предельный цикл. С другой стороны, сравнительно недавно было установлено [16–18], что для цепочечных систем, состоящих из бистабильных элементов, характерно существование пространственного беспорядка амплитуд колебаний. Поэтому для таких систем чрезвычайно интересно и принципиально важно исследовать взаимную синхронизацию колебаний, происходящую на «фоне» амплитудного беспорядка. В настоящей работе рассматривается цепочка, состоящая из бистабильных осцилляторов с различными парциальными частотами «вдоль» цепочки.

При отсутствии связей каждый элемент может находиться в двух состояниях, соответствующих генерации автоколебаний с «малой» либо «большой» амплитудой. В полярных координатах динамика индивидуального осциллятора может быть описана системой уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{r} = rF(r), \\ \dot{\phi} = \omega(r), \end{cases} \quad (1)$$

где r, ϕ – амплитуда и фаза колебаний; $\omega(r)$ – частота колебаний, вообще говоря, зависящая от амплитуды; $F(r) = (a_1 - r)(a_2 - r)(a_3 - r)$; $a_{1,2,3}$ – амплитуды предельных циклов ($a_1 < a_2 < a_3$, $a_{1,3}$ соответствуют устойчивым, а a_2 – неустойчивому циклам). Уравнения, описывающие цепочку, состоящую из N осцилляторов вида (1) с различными собственными частотами, в комплексной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= z_j(F(|z_j|) + i\omega_j(|z_j|)) + d(z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}), \\ j &= 1, 2, \dots, N, \quad z_0 = z_1, \quad z_{N+1} = z_N. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $z_j = r_j \exp(i\phi_j)$, d – коэффициент связи между осцилляторами. Далее мы будем полагать его чисто действительным.

1. Распределение мгновенных амплитуд колебаний

Пусть параметры системы (2) принадлежат области D (рис. 1). Как установлено в Приложении, в этом случае в фазовом пространстве системы (2) существует 2^N изолирующих блоков J_s . Зададим произвольную последовательность S «длины» N , состоящую из символов двух типов «0» и «1», и поставим в соответствие этой последовательности изолирующий блок J_s (см. Приложение). Выберем начальные условия в системе (2) внутри блока J_s . Поскольку траектории

¹ Кластер – группа соседних элементов, имеющих одинаковые (или почти одинаковые) некоторые характеристики колебаний, например, фазы.

системы (2) не могут покинуть J_s , то можно утверждать, что в J_s существует некоторое предельное множество траекторий, характеризуемое ограниченностью всех переменных $r_j(t)$ во времени. В зависимости от того, какой символ (0 или 1) расположен в j -ой позиции последовательности S , компонента $r_j(t)$ локализована либо в Ω_j^0 , либо в Ω_j^1 . Из геометрического положения этих областей в фазовом пространстве следует, что в первом случае амплитуда колебаний существенно меньше, чем во втором. Поэтому ставит последовательности S соответствует некоторое распределение мгновенных амплитуд колебаний вдоль цепочки, состоящее из «малых» и «больших» величин. При этом, фазы колебаний могут быть произвольными функциями времени. Поскольку распределение символов в последовательности S может быть произвольным, то и распределение мгновенных амплитуд колебаний может быть чрезвычайно разнообразным – от пространственно однородного (все элементы последовательности равны) до пространственно беспорядочного. Таким образом, при значениях параметров из области D в системе (2) существует, по крайней мере, 2^N различных распределений мгновенных амплитуд колебаний.

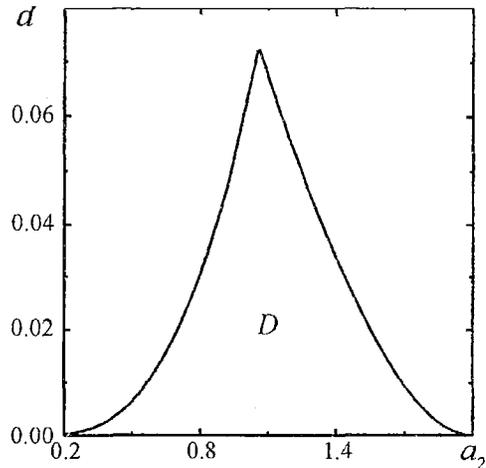


Рис. 1. Область параметров, выделяемая неравенством (П.11), построенная при $a_1=0.1, a_3=2.0$

2. Синхронные режимы колебаний

Введение связи между осцилляторами в принципе создает предпосылки для взаимной синхронизации колебаний элементов цепочки. Мы покажем, что в зависимости от коэффициента связи d , распределения частот² ω_j и распределения мгновенных амплитуд колебаний (будем рассматривать значения параметров из области D) в цепочке возможно установление колебаний с различной степенью синхронизации, соответствующей уровням «а», «б» или «в» (см. Введение).

2.1. Синфазная синхронизация. Рассмотрим систему уравнений для разностей фаз колебаний $\psi_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j$, вытекающую из системы (2),

$$\dot{\psi}_k = \omega_{k+1} - \omega_k + d[(r_{k+2}/r_{k+1})\sin\psi_{k+1} - (r_k^2 + r_{k+1}^2)/(r_k r_{k+1}) \sin\psi_k + (r_{k-1}/r_k)\sin\psi_{k-1}], \quad (3)$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1, \quad \psi_0 = 0, \quad \psi_N = 0.$$

Предположим, что в цепочке осцилляторов, описываемой системой (2), возможны синфазные колебания. Этот тип синхронизации соответствует условию $\psi_j=0$. Из уравнений (3) имеем

$$\dot{\psi}_j|_{\psi_j=0} = \omega_{j+1} - \omega_j. \quad (4)$$

Таким образом, синхронизация фаз возможна лишь когда парциальные частоты осцилляторов одинаковы во всей цепочке ($\omega_j = \omega$). В этом случае система (2) с помощью замены переменных $\varphi'_j = \varphi_j - \omega$ может быть приведена к градиентному виду. Следовательно, стационарными движениями являются лишь колебания у

² Далее ограничимся случаем изохронных колебаний, то есть $\omega_j(r_j) = \omega_j = \text{const}$.

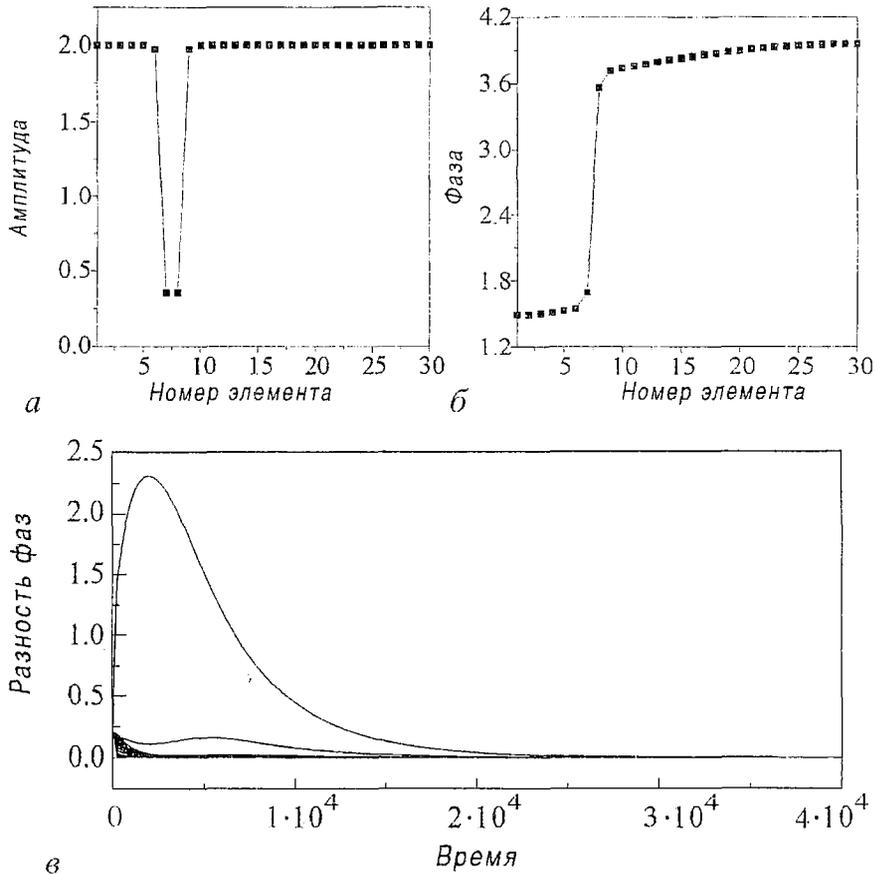


Рис. 2. Синфазная синхронизация ($\omega_j=1$, $d=0.05$): а – финальное распределение амплитуд колебаний вдоль цепочки; б – распределение фаз при $t=4000$; в – зависимость разностей фаз ψ_j от времени

которых $r_j, \phi'_j = \text{const}$. Причем, как было показано в [12], режим синфазной синхронизации устанавливается для любых начальных условий независимо от пространственного распределения амплитуд колебаний.

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования цепочки из 30 осцилляторов. В начальный момент времени фазы были равномерно распределены по окружности, а амплитудное распределение было выбрано пространственно неоднородным, принадлежащим одному из блоков J_s . В цепочке наблюдался достаточно быстрый процесс формирования практически неменяющегося распределения амплитуд колебаний. После этого в цепочке происходило образование двух фазовых кластеров (рис. 2, б). Далее в результате взаимодействия кластеров разности фаз между соседними осцилляторами уменьшались с течением времени и в системе устанавливались синфазные колебания (рис. 2, в), а распределение амплитуд колебаний становилось стационарным во времени ($r_j = \text{const}$) и неоднородным вдоль цепочки (рис. 2, а). Принципы формирования и взаимодействия кластеров в данном случае аналогичны описанным в [17,19]. Заметим, что возникновение фазовых кластеров непосредственно связано с неоднородностью пространственного распределения амплитуд колебаний и в данном случае является переходным процессом к установлению синфазных колебаний во всей цепочке.

2.2. Фазовая синхронизация. Из (4) следует, что введение любой, даже очень малой, неоднородности распределения частот приводит к нарушению

режима синфазной синхронизации и появлению других синхронных режимов. В случае, если неоднородность достаточно мала, разности фаз ψ_j остаются постоянными, не зависящими от времени величинами, и в цепочке может реализоваться режим фазовой синхронизации.

По-прежнему в фазовом пространстве системы (2) существует, по крайней мере, 2^N устойчивых предельных циклов, у которых значения амплитуд колебаний r_j являются постоянными величинами и подчиняются символическому описанию, изложенному в предыдущем параграфе. Разности фаз $\psi_j = \text{const}$; однако, в отличие от синфазного случая, $\psi_j \neq 0$. Из уравнений для разностей фаз колебаний относительно $\sin \psi_j$ мы имеем систему $N-1$ линейных неоднородных уравнений. Разрешив ее, получим

$$\sin \psi_j = [\sum_{i=1}^j r_i^2 \sum_{i=j+1}^N \omega_i r_i^2 - \sum_{i=j+1}^N r_i^2 \sum_{i=1}^j \omega_i r_i^2] / (d r_{j+1} r_j \sum_{i=1}^N r_i^2). \quad (5)$$

Из (5) следует, что стационарные значения разностей фаз могут принимать различные значения в зависимости от распределений ω_j и r_j вдоль цепочки. Частоту синхронных колебаний ω_s находим, используя одно из уравнений (П.2) для фаз колебаний и выражения (5), для стационарных разностей фаз

$$\omega_s = \sum_{i=1}^N \omega_i r_i^2 / \sum_{i=1}^N r_i^2. \quad (6)$$

Пусть $\omega_j = \omega_0$, $j \neq 1$, $\omega_1 = \omega_0 + \alpha$, то есть все осцилляторы, за исключением первого, имеют одинаковые парциальные частоты. В этом случае из (5) имеем

$$\sin \psi_j = -\alpha r_1^2 \sum_{i=j+1}^N r_i^2 / (d r_j r_{j+1} \sum_{i=1}^N r_i^2). \quad (7)$$

Из (7) следует, что разность фаз между соседними осцилляторами существенно зависит от распределения амплитуд. Для распределений (000...0) и (111...1) можно считать $r_j \approx \text{const}$. Отсюда $\sin \psi_j \approx -\alpha(N-j)/dN$, то есть $\sin \psi_j$ является линейной функцией координаты. При этом частота синхронизации $\omega_s = \omega_0 + \alpha/N$. В случае произвольного распределения амплитуд частота синхронных колебаний $\omega_s = \omega_0 + \alpha r_1^2 / \sum_{i=1}^N r_i^2$ может быть как больше, так и меньше, чем в однородном случае. Кроме того, в системе могут наблюдаться резкие скачки фазы между соседними осцилляторами. На рис. 3 представлены графики, иллюстрирующие этот эффект. После переходных процессов в цепочке происходит установление стационарных

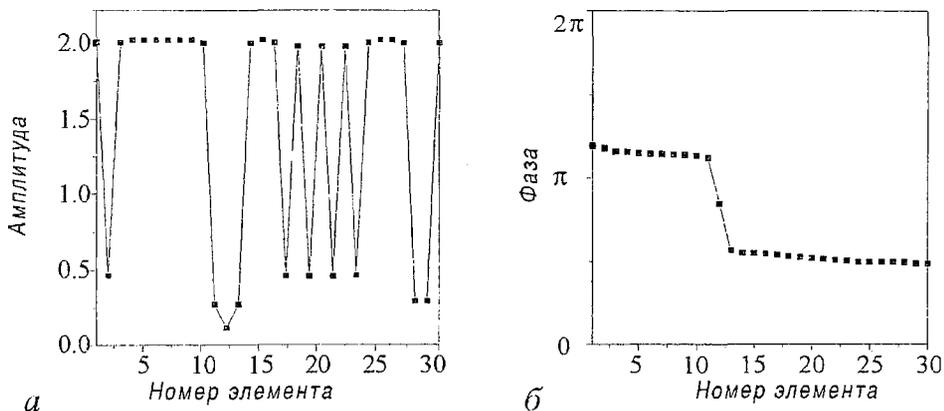


Рис. 3. Фазовая синхронизация ($\alpha=7 \cdot 10^{-4}$, $d=0.05$): а – стационарное распределение амплитуд колебаний; б – соответствующее ему распределение фаз

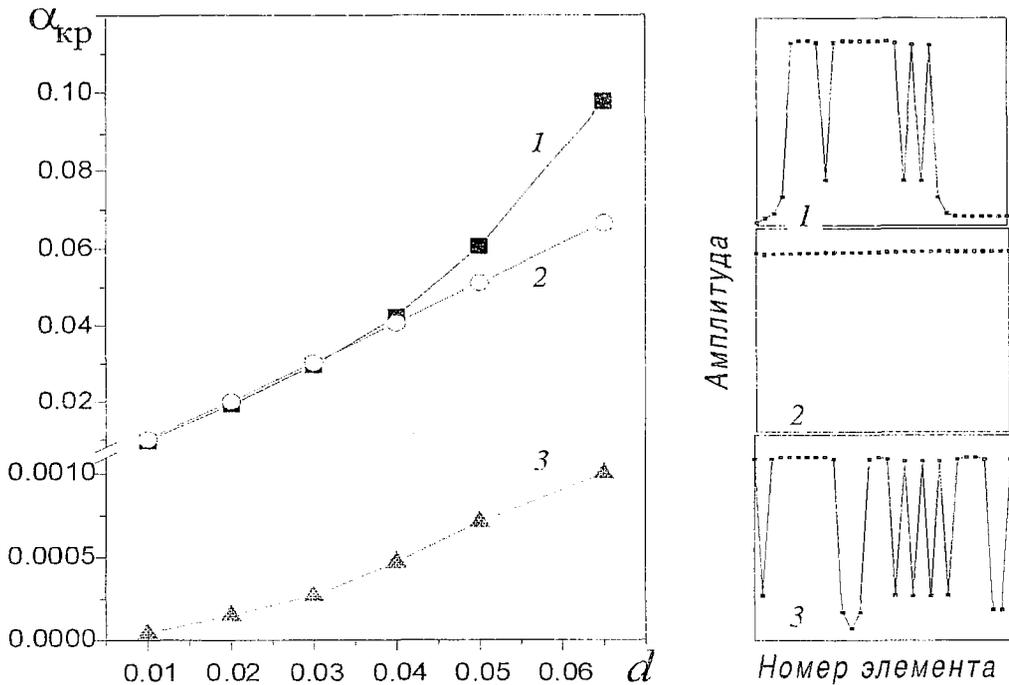


Рис. 4. Зависимость критического значения α от коэффициента связи d для трех различных пространственных распределений амплитуд колебаний

распределений амплитуд колебаний. При этом фазы осцилляторов разделились на три группы (одна из групп состоит из одного элемента), в каждой из которых колебания практически синфазны. Таким образом, в отличие от предыдущего случая, введение малой расстройки частоты приводит к формированию стационарных фазовых кластеров или, другими словами, к кластерной синфазной синхронизации. Как видно из (7), максимальный скачок фазы (деление цепочки на кластеры) происходит между элементами у которых r_j и r_{j+1} малы, то есть соответствуют последовательности символов 00. Причем, при прочих равных условиях надо выбрать участок последовательности, где кусок 00 встречается впервые (на рис. 3, a это элементы с номерами 11,12).

На рис. 4 представлены зависимости критического значения параметра α , при котором в системе нарушается режим фазовой синхронизации, от коэффициента связи d . В случае пространственно-однородного распределения (кривая 2) зависимость $\alpha_{кр}$ от d является линейной функцией $\alpha_{кр} \equiv d$, что совпадает с результатами, полученными для цепочки моностабильных осцилляторов в [8]. Для пространственно-неоднородного распределения амплитуд область фазовой синхронизации может быть как больше, чем в однородном случае (кривая 1), так и меньше (кривая 3). Таким образом, сложная пространственная динамика амплитуд колебаний может привести к следующему интересному эффекту. При значениях параметров, когда в цепочке из моностабильных элементов синхронный режим отсутствует, в цепочке из бистабильных элементов существует режим фазовой синхронизации.

2.3. Синхронизация в среднем. Как было установлено выше, при $\alpha > \alpha_{кр}$ режим фазовой синхронизации нарушается. Поскольку образом фазовой синхронизации в фазовом пространстве системы (П.1),(3) является устойчивое состояние равновесия, рассинхронизация колебаний происходит через бифуркации состояний равновесия. Для изучения путей разрушения режима фазовой синхронизации были проведены численные эксперименты. Мы обнаружили два характерных пути исчезновения режима фазовой синхронизации.

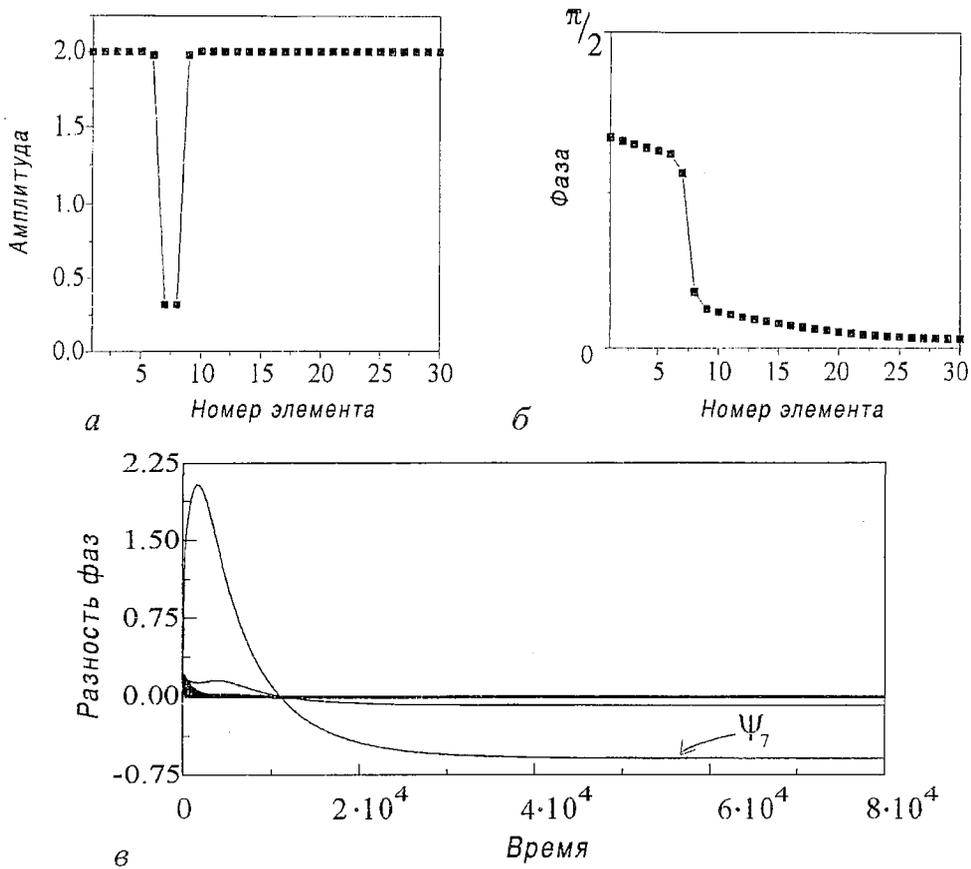


Рис. 5. Фазовая синхронизация при $\alpha < \alpha_{кр}$ ($\omega_1 = 1.0009$, $\omega_j = 1$, $j = 2, 3, \dots, N$, $d = 0.05$): а – финальное распределение амплитуд; б – установившееся распределение фаз при $t = 7 \cdot 10^4$; в – зависимость разности фаз от времени

1. С увеличением параметра α два состояния равновесия сливаются в одно при $\alpha = \alpha_{кр}$ и далее исчезают, то есть происходит бифуркация «двукратное равновесие». На рис. 5 приведены распределения амплитуд, фаз колебаний и зависимость разностей фаз от времени при $\alpha < \alpha_{кр}$. С течением времени разности фаз выходят на свои стационарные значения (рис. 5, в). Существует резкий скачок фазы между 7 и 8 осцилляторами. Следовательно, существует два фазовых кластера. Первый кластер состоит из осцилляторов 1–7, а второй содержит все остальные (рис. 5, б). При увеличении α стационарное значение разности фаз ψ_7 непрерывно растет и при $\alpha = \alpha_{кр}$ достигает значения $-\pi/2$ ($\sin \psi_7 = -1$). При $\alpha > \alpha_{кр}$

состояние равновесия исчезает. В результате этого $\dot{\psi}_7(t) < 0$ и разность фаз между 7 и 8 осцилляторами непрерывно нарастает, в то время как остальные ψ_j остаются ограниченными во времени (рис. 6, а). Мгновенные значения амплитуд колебаний – величины $r_j(t)$ – уже не являются константами, а совершают малые колебания внутри изолирующего блока J_s . Таким образом, в цепочке формируется два частотных кластера (рис. 6, б). Внутри кластеров средняя по времени частота колебаний одинакова для всех осцилляторов. Другими словами, цепочка разделилась на две части, в каждой из которых реализуется режим синхронизации в среднем.

2. Нарушение фазовой синхронизации происходит через потерю устойчивости состояния равновесия, связанную с бифуркацией Андронова – Хопфа. Заметим, что этот случай возможен только при пространственно–

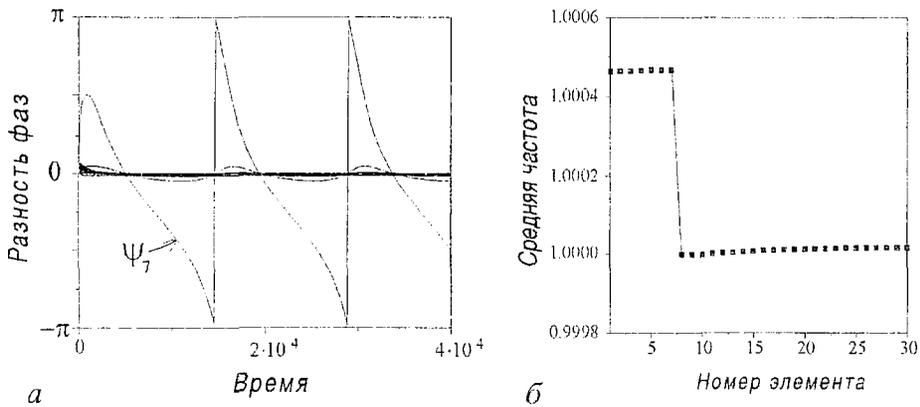


Рис. 6. Частотные кластеры при $\alpha > \alpha_{кр}$ ($\omega_1=1.003$, $\omega_j=1$, $j=2,3,\dots,N$, $d=0.05$): а – зависимость разностей фаз ψ_j от времени; б – распределение усредненной по времени частоты колебаний вдоль цепочки

неоднородном распределении мгновенных амплитуд колебаний, то есть, если индивидуальный элемент обладает свойством бистабильности. При $\alpha < \alpha_{кр}$, как и в предыдущем случае, наблюдается фазовая синхронизация. Однако, устойчивое состояние равновесия может существовать и при $|\psi_j| > \pi/2$, что невозможно для цепочки из моностабильных элементов. При $\alpha > \alpha_{кр}$ состояние равновесия становится неустойчивым и в системе возникают колебания переменных $r(t)$ и $\psi(t)$ (рис. 7). Если при этом разности фаз не возвращаются (реализуется колебательный

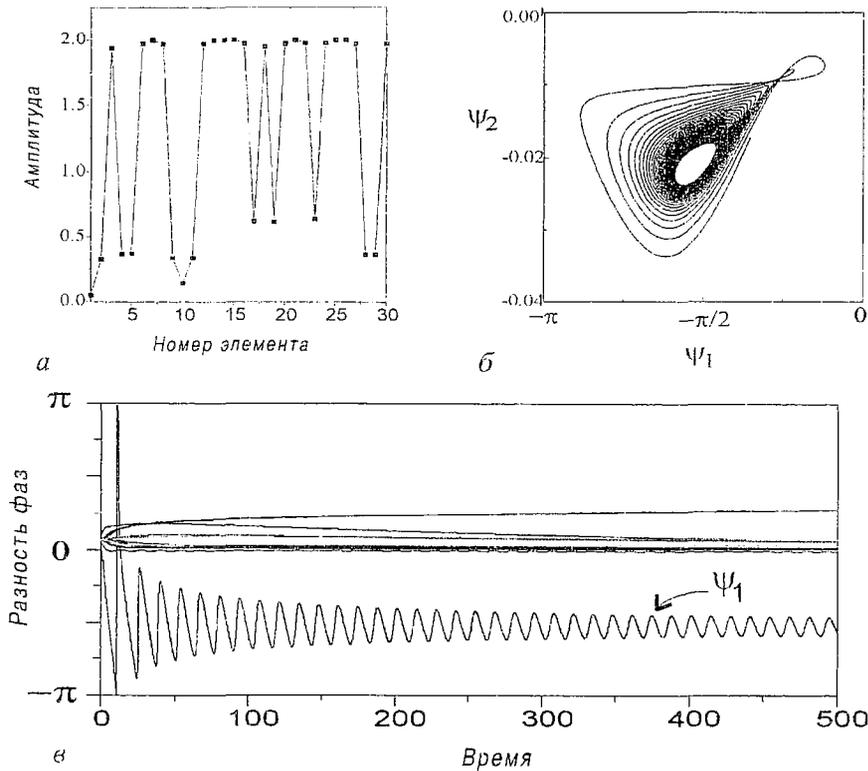


Рис. 7. Синхронизация в среднем всех осцилляторов при $\alpha > \alpha_{кр}$ ($\omega_1=1.49$, $\omega_j=1$, $j=2,3,\dots,N$, $d=0.065$): а – распределение мгновенных амплитуд колебаний; б – проекция колебательной траектории системы (2) на плоскость (ψ_1, ψ_2) ; в – зависимость разностей фаз от времени

тип движений), как это показано на рис. 7, б, в, цепочка переходит от режима фазовой синхронизации к синхронизации в среднем. Все осцилляторы группируются в один частотный кластер. При дальнейшем увеличении α амплитуды колебаний разностей фаз ψ_j нарастают и при некотором α^* происходит переход от колебательного к вращательному типу движений. Вращение ψ_1 приводит к «делению» элементов цепочки на два частотных кластера.

Заключение

В настоящей работе проведено исследование синхронных состояний, реализующихся в цепочке бистабильных осцилляторов. Установлены параметры (обл. D на рис. 1), для которых в системе существует 2^N качественно различных распределений мгновенных амплитуд колебаний, то есть система обладает сложной пространственной динамикой. Обнаружено, что пространственная динамика амплитуд существенно влияет на формирование синхронных режимов системы и приводит к новым эффектам, существование которых принципиально невозможно в цепочке из моностабильных автоколебательных элементов.

Установлено, что можно выделить два временных интервала с различными временными масштабами. На первом, быстром, этапе в системе устанавливается некоторое распределение амплитуд колебаний (переменные $i_j(t)$ принадлежат одному из изолирующих блоков J_s), которое далее меняется незначительно. На втором этапе происходит формирование синхронных режимов, которое происходит через эволюцию фаз колебаний. Мы обнаружили, что «спектр» синхронных режимов в цепочке бистабильных осцилляторов весьма широк – от полностью синфазных до частотных кластеров.

В последнее время появилось большое количество работ, посвященных исследованию феномена образования фазовых кластеров. Например, в [14] для системы глобально связанных фазовых осцилляторов было продемонстрировано образование фазовых кластеров за счет разброса собственных частот. Характерной особенностью такого состояния является равенство частот колебаний для всех осцилляторов, небольшой фазовый сдвиг внутри кластеров и резкий скачок фазы между кластерами. В нашем случае при определенном выборе параметров (см. рис. 4) также образуются фазовые кластеры. Однако, их происхождение вызвано бистабильностью отдельного осциллятора, а принадлежность осциллятора к определенному кластеру определяется стационарным распределением амплитуд колебаний.

Кроме образования фазовых кластеров в системе (2) возможно формирование частотных кластеров, то есть групп осцилляторов, для которых разности фаз колебаний ψ_j (номер j принадлежит k -му кластеру) являются ограниченными функциями времени, в то время как разность фаз между соседними кластерами непрерывно растет. Таким образом, внутри кластеров средние частоты колебаний одинаковы. Подобный режим синхронизации наблюдался при исследовании цепочки генераторов Ван-дер-Поля под воздействием белого шума [8]. Здесь длина синхронного кластера зависела от интенсивности шума. В нашем случае деление цепочки на кластеры вызвано бистабильностью осцилляторов, входящих в цепочку, а длины кластеров определяются пространственной динамикой амплитуд колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-16550, программа «Ведущие научные школы», грант № 96-15-96593).

Построение изолирующих блоков

Перейдем в уравнениях (2) к действительным переменным

$$\dot{r}_j = r_j F(r_j) + d(r_{j-1} \cos \psi_{j-1} - 2r_j + r_{j+1} \cos \psi_j), \quad j=1,2,\dots,N, \quad r_0=r_1, \quad r_{N+1}=r_N, \quad (\text{П.1})$$

$$r_j \dot{\varphi}_j = r_j \omega_j + d[r_{j+1} \sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j) - r_{j-1} \sin(\varphi_j - \varphi_{j-1})], \quad j=1,2,\dots,N, \quad \varphi_0=\varphi_1, \quad \varphi_{N+1}=\varphi_N. \quad (\text{П.2})$$

Опираясь на технику работы [18], построим в фазовом пространстве системы (П.1),(П.2) области – так называемые «изолирующие» блоки, с помощью которых можно локализовать (изолировать) некоторые семейства траекторий системы (П.1),(П.2).

Введем в фазовом пространстве системы семейство областей

$$\Omega_A = \{r : 0 \leq r_j \leq A, \quad j=1,2,\dots, N\},$$

где $A>0$ – произвольный параметр. Зафиксируем параметр A . Граница $\partial\Omega_A$ области Ω_A – цилиндрическая поверхность. Установим ориентацию векторного поля системы на $\partial\Omega_A$. Поскольку при $r_j=0$ значение φ_j не определено, доопределим φ_j так, чтобы, за исключением точек множества $K=\{r_j=0, \quad j=1,2,\dots,N\}$, выполнялось неравенство

$$\dot{r}_j|_{r_j=0} = d(r_{j-1} \cos \psi_{j-1} + r_{j+1} \cos \psi_j) > 0. \quad (\text{П.3})$$

На остальной части границы $\partial\Omega_A$ имеем

$$\dot{r}_j|_{r_j=A} = AF(A) + d(r_{j-1} \cos \psi_{j-1} - 2A + r_{j+1} \cos \psi_j) \leq AF(A). \quad (\text{П.4})$$

Пусть $A>a_3$, тогда, принимая во внимание свойства функции $F(r)$, получим

$$\dot{r}_j|_{r_j=A} < 0. \quad (\text{П.5})$$

Из (П.4), (П.5) следует, что для любого $A>a_3$ на границе $\partial\Omega_A$, за исключением множества K , векторное поле системы (П.1),(П.2) ориентировано внутрь Ω_A , а на K – касательно к Ω_A . Следовательно, все траектории системы с начальными условиями вне области $\Omega_{A=a_3}$ с течением времени попадают в эту область. Из области $\Omega_{A=a_3}$ траектории не выходят.

Построим в фазовом пространстве системы семейство областей J_s , каждая из которых обладает следующим свойством: если $\{r_j(0), \varphi_j(0)\} \in J_s, \quad j=1,2,\dots,N$, то $\{r_j(t), \varphi_j(t)\} \in J_s$ при любом $t>0$. Такая область «изолирует свои» траектории от всех других. Поэтому области J_s будем называть изолирующими блоками. Для их построения рассмотрим ориентацию векторного поля системы на поверхностях $\{r_k=c\}$, где $0<c=\text{const}<a_3$. Пусть $A>a_3$. Из (П.1),(П.2) имеем

$$\dot{r}_k|_{r_k=c} = cF(c) + d(r_{k-1} \cos \psi_{k-1} - 2c + r_{k+1} \cos \psi_k). \quad (\text{П.6})$$

Потребуем, чтобы

$$\dot{r}_k|_{r_k=c} < 0 \quad \text{для} \quad r_j \in \Omega_A, \quad \forall j \neq k. \quad (\text{П.7})$$

В свою очередь, неравенство (П.7) выполняется, если параметр c является решением следующего неравенства

$$cF(c) - 2d(c-A) < 0. \quad (\text{П.8})$$

Аналогично, потребовав выполнение неравенства

$$\dot{r}_k|_{r_k=c} > 0 \text{ для } r_j \in \Omega_A, \quad \forall j \neq k, \quad (\text{П.9})$$

приходим к неравенству

$$cF(c) - 2d(c+A) > 0. \quad (\text{П.10})$$

Неравенства (П.8),(П.10) будут иметь решения (рис. 8), если параметры системы (П.1),(П.2) принадлежат области

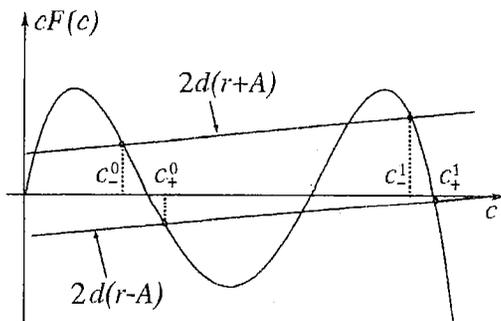


Рис. 8. Графическое решение неравенств (П.8), (П.10)

$$D = \{ d < \min[r_{\max}F(r_{\max})/[2(a_3+r_{\max})], -r_{\min}F(r_{\min})/[2(a_3-r_{\min})]] \}, \quad (\text{П.11})$$

где $r_{\min, \max}$ — координаты минимума и правого максимума функции $rF(r)$. Обозначим через c_+^0, c_+^1 решения неравенства (П.8), а через c_-^0, c_-^1 — неравенства (П.10), соответствующие падающим участкам функции $rF(r)$ (см. рис. 8). Введем в рассмотрение в фазовом пространстве системы следующие области

$$\Omega_j^0 = \{ c_-^0 \leq r_j \leq c_+^0, \quad 0 \leq r_k \leq A, \quad \forall k, \quad k \neq j \},$$

$$\Omega_j^1 = \{ c_-^1 \leq r_j \leq c_+^1, \quad 0 \leq r_k \leq A, \quad \forall k, \quad k \neq j \}.$$

Пусть S — последовательность «длины» N , состоящая из символов двух типов

$$S = \{ m_1 m_2 \dots m_N \}, \quad \text{где } m_i \in \{0,1\}.$$

Каждой такой последовательности поставим в соответствие область следующего вида:

$$J_s = \bigcap_j \Omega_j^{m_j}.$$

В силу неравенств (П.3),(П.5),(П.7), (П.9), J_s — изолирующий блок. Поскольку существует 2^N различных последовательностей S , при значениях параметров из области D существует 2^N изолирующих блоков.

Библиографический список

1. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1989.
2. Логинов А.С., Ржанов А.Г., Еленский В.Г. Многоэлементные полупроводниковые лазеры // Зарубежная электроника. 1986. № 8. С. 49.
3. Rappel W.-J. Dynamics of a globally coupled laser model // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49, № 4. P. 2750.
4. Watanabe S., van der Zant H.S.J., Strogatz S.H., Orlando T.P. Dynamics of circular arrays of josephson junctions and the discrete sine-Gordon equation // Physica D. 1996. Vol. 97. P. 429.
5. Борисюк Г.Н., Борисюк Р.Н., Казанович Я.Б., Лузянина Т.Б., Турова Т.С., Цембалюк Г.С. Осцилляторные нейронные сети. Математика и приложения // Математическое моделирование. 1992. Т. 4, № 1. С. 65.

6. Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Сельверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суццик М.М., Рубчинский Л.Л. Синхронизация в нейронных ансамблях // УФН. 1996. Т. 166, № 4. С. 363.

7. Chua's circuit: A paradigm for chaos // World Scientific Series on Nonlinear Science / Ed. R.N. Madan. Singapore: World Scientific, 1993. Series B. Vol. 1.

8. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975.

9. Ermentrout G.B., Kopell N. Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15. P. 215.

10. Ermentrout G.B. Synchronization in a pool of mutually coupled oscillators with random frequencies // J. Math. Biology. 1985. Vol. 22. P. 1.

11. Tass P., Haken H. Synchronization in networks of limit cycle oscillators // Z. Phys. B. 1996. Vol. 100. P. 303.

12. Макаров В.А. Некоркин В.И. Пространственно-временная динамика цепочки автоколебательных элементов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 2. С. 3.

13. Некоркин В.И., Казанцев В.Б., Веларде М.Г. Динамическое копирование в многослойных бистабильных решетках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 5. С. 56.

14. Tass P. Phase and frequency in a population of phase oscillators // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56, № 2. P. 2043.

15. Golomb D., Hansel D., Shraiman B., Sompolinsky H. Clustering in globally coupled phase oscillators // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45, № 6. P. 3516.

16. Mackay R.S., Sepulchre J.-A. Multistability in networks of weakly coupled bistable units // Physica D. 1995. Vol. 82. P. 243.

17. Nekorkin V.I., Makarov V.A. Spatial chaos in a chain of coupled bistable oscillators // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 74, № 24. P. 4819.

18. Nekorkin V.I., Makarov V.A., Kazantsev V.B., Velarde M.G. Spatial disorder and pattern formation in lattices of coupled bistable elements // Physica D. 1997. № 100. P. 330.

19. Макаров В.А. Фазовые кластеры в цепочке бистабильных осцилляторов с локальными связями // Современные проблемы радиофизики : Сб. научн. тр. / Под ред. А.В. Якимова. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1996. С. 94.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 16.01.98
после переработки 1.04.98

CLUSTER SYNCHRONIZATION IN A CHAIN OF BISTABLE SELF-EXCITED ELEMENTS

V.A. Makarov, V.I. Nekorkin

The phenomenon of synchronization of oscillations in a chain of bistable oscillators is investigated. It is revealed that the mutual synchronization of oscillations occurs to formation of phase or frequency clusters. The connection between sites of clusters in the chain and spatial dynamics of the system is discussed.



Некоркин Владимир Исаакович – родился на Украине в 1948 году, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (1981, ННГУ) и доктора физико–математических наук (1992, СГУ). С 1971 года работал в Нижегородском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 год в Нижегородском политехническом институте, с 1986 года и по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов – теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно–временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях, соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете.



Макаров Валерий Анатольевич – родился в Сыктывкаре, окончил радиофизический факультет Нижегородского госуниверситета (1992). Защитил кандидатскую диссертацию «Пространственный беспорядок и волны в сетях автоколебательных бистабильных систем» (1997). С 1997 года работает старшим преподавателем на кафедре теории колебаний Нижегородского госуниверситета. Автор 25 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.