



ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РЕКУРСИВНОЙ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НАСЫЩЕНИЯ

Ю.А. Брюханов

Исследованы свободные колебания в системе, сумматор которой имеет характеристику с насыщением. Для двух областей параметров рассмотрены процессы установления движений с периодами один, два и четыре.

Рекурсивная система второго порядка, являющаяся одним из базовых элементов для построения сложных фильтрующих систем [1], при определённых значениях параметров может использоваться и для генерации периодических колебаний. Рассмотрим систему, сумматор которой имеет характеристику с насыщением. Считаем, что эффекты квантования отсутствуют.

Свободные колебания такой системы описываются разностным уравнением

$$x(n+2) = f(ax(n+1) + bx(n)),$$

где

$$f(\varphi) = \begin{cases} \varphi, & |\varphi| < 1, \\ \text{sign}(\varphi), & |\varphi| \geq 1, \end{cases}$$

a и b – параметры системы. Это уравнение сводится к эквивалентному ему отображению

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(n) \\ f(bx(n) + ay(n)) \end{pmatrix}$$

на плоскости (x, y) . Пары последовательных итераций $(x(n), y(n))$ отображения определяют точки траектории движения системы на фазовой плоскости (x, y) .

Известно [2–5], что для параметров системы в секторе gdc (рис. 1) при ненулевых начальных условиях стационарный режим характеризуется аттрактором с периодом $T=1$ или $T=2$. Причем первый из них имеет траекторию движения $\rightarrow(1,1)\rightarrow(1,1)\rightarrow$ или $\rightarrow(-1,-1)\rightarrow(-1,-1)\rightarrow$, а траектория движения второго $\rightarrow(-1,1)\rightarrow(1,-1)\rightarrow$. При выборе параметров в секторе hei стационарный режим характеризуется аттрактором с периодом $T=4$ и траекторией движения

$$\rightarrow(1,1) \rightarrow (1,-1) \rightarrow (-1,-1) \rightarrow (-1,1) \rightarrow. \quad (1)$$

Для практического использования периодических колебаний, генерируемых системой, необходимо знать переходные режимы.

Целью настоящей работы является исследование характера и получение выражений для расчёта длительности переходных процессов при выборе параметров системы в вышеуказанных областях.

Учитывая вид нелинейности, фазовую плоскость разобьём на три области, характеризующиеся уравнениями движения:

область D_{-1}

$$x(n+2) = -1,$$

область D_0

$$x(n+2) = ax(n+1) + bx(n), \quad (2)$$

область D_1

$$x(n+2) = 1.$$

Решение уравнения (2) выражается зависимостью [6]

$$x(n) = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n, \quad (3)$$

где

$$C_1 = [x(0)q_2 - x(1)] / (q_2 - q_1), \quad C_2 = [x(1) - x(0)q_1] / (q_2 - q_1), \quad (4)$$

$x(0), x(1)$ – начальные условия, q_1, q_2 – корни характеристического уравнения

$$q_{1,2} = [a \pm (a^2 + 4b)^{1/2}] / 2.$$

Соотношения между q_1 и q_2 следующие: в секторе bdc $q_1 > 1, q_2 < -1, q_1 > |q_2|$, в секторе gdb $q_1 > 1, q_2 < -1, q_1 < |q_2|$, в секторе hei корни комплексно сопряженные, $|q_{1,2}| > 1$.

Граница между областями D_{-1} и D_0 представляет собой прямую MN , описываемую уравнением

$$y = -(b/a)x - 1/a,$$

а граница между D_0 и D_1 – прямую PG с уравнением

$$y = -(b/a)x + 1/a.$$

1. Пусть параметры системы выбраны внутри сектора bdc . Разбиение фазовой плоскости на области D_{-1}, D_0 и D_1 показано на рис. 2, а. Здесь и ниже прямая MN пересекает стороны DA и BC квадрата $ABCD$ в точках

$$x_{гр1} = -(a+1)/b, \quad x_{гр2} = (a-1)/b, \quad (5)$$

соответственно. Координаты точек $x_{гр4}$ и $x_{гр3}$ пересечения прямой PG с квадратом отличаются от соответствующих (5) только знаками.

Проведем луч EF параллельно оси абсцисс через точку E_1 , причем $AE_1 = x_{гр3}A$. Поскольку отображение в области D_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(n) \\ 1 \end{pmatrix},$$

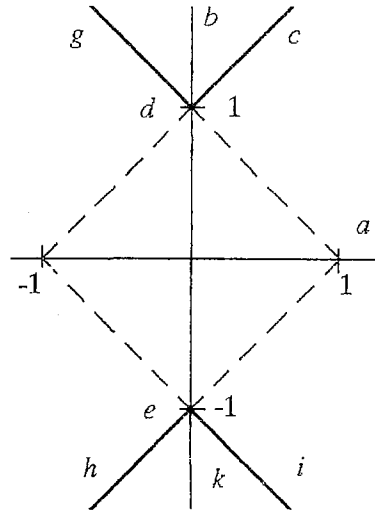


Рис. 1

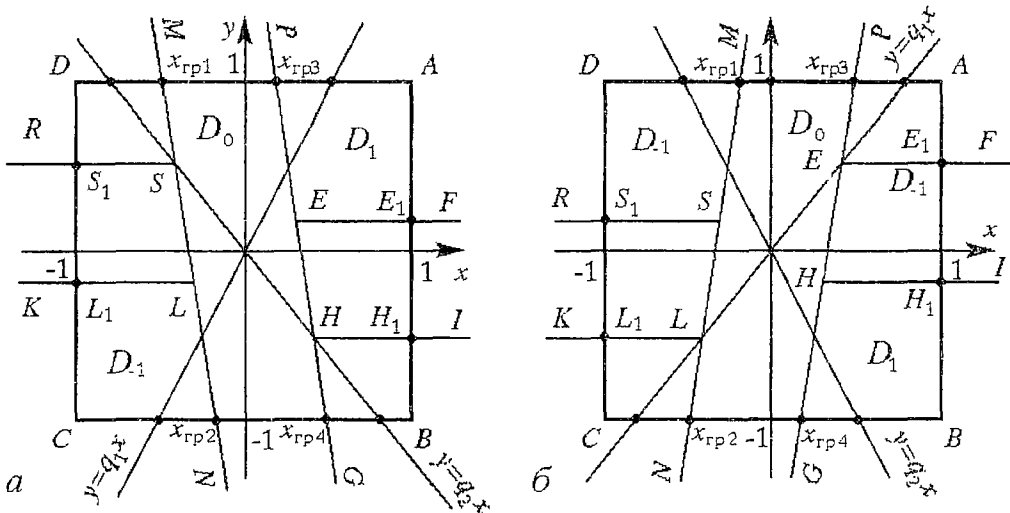


Рис. 2

то сектор PEF (кроме луча $x_{гр3}A$) отображается в луч $x_{гр3}A$ (кроме точки A), а луч $x_{гр3}A$ (кроме точки A) отображается в точку A . Следовательно, если движение начинается из вышеуказанного сектора (кроме луча $x_{гр3}A$), то после второй итерации устанавливаются колебания с периодом $T=1$. При старте с вышеуказанного луча эти колебания устанавливаются после первой итерации.

Выполним аналогичные построения лучей LK ($CL_1=x_{гр2}C$), HI ($H_1B=Dx_{гр1}$), SR ($S_1D=Bx_{гр4}$) и образуем секторы KLN , GHI , RSM . Используя рассуждения, приведенные выше, и учитывая вид отображения в области D_{-1} :

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(n) \\ -1 \end{pmatrix},$$

утверждаем, что если движение начинается из секторов KLN (кроме луча $x_{гр2}C$) или GHI (кроме луча $x_{гр4}B$), RSM (кроме луча $x_{гр1}D$), то в системе устанавливаются колебания с периодом $T=1$ или $T=2$, соответственно, также после второй итерации. При старте с вышеуказанных лучей эти колебания устанавливаются после первой итерации.

Если движение начинается из сектора $FEHI$, то последовательность отображений может иметь вид

$$FEHI \rightarrow x_{гр1}x_{гр3} \rightarrow E_1H_1 \rightarrow x_{гр1}x_{гр3} \rightarrow \dots$$

Изменение абсциссы изображающей точки, когда последняя находится на стороне DA , описывается линейным разностным уравнением

$$x_1(m+1) = bx_1(m) + a, \quad (6)$$

где

$$m = (n-1)/2, \quad x_1(0) = y(0), \quad (7)$$

которое можно рассматривать как линейное одномерное отображение. Решение этого уравнения имеет вид

$$x_1(m) = zb^m - a_1,$$

где $z=x_1(0)+a/(b-1)$, $a_1=a/(b-1)$. При $z>0$ с ростом m величина $x_1(m)$ возрастает. Линейный процесс (6) прекращается при $x_1(m) \geq x_{гр3}$. Соответствующее число итераций m_0 является ближайшим сверху целым значением величины

$$m = \ln[(x_{гр3} + a_1)/z]/\ln b.$$

Это правило используется и ниже.

При $z < 0$ процесс (6) прекращается, если $x_1(m) \leq x_{гр1}$. Величина m определяется по формуле

$$m = \ln[(x_{гр1} + a_1)/z]/\ln b.$$

При $z = 0$ в системе существуют колебания с периодами $T = 2: \rightarrow(1, -a_1) \rightarrow (-a_1, 1) \rightarrow$. Например, при $y(0) = -0.4$, $a = 0.1$, $b = 1.2$ имеем $a_1 = 0.5$, $z = 0.1$, $m_0 = 14$, соответственно $n_0 = 29$. В качестве иллюстрации на рис. 3 изображены диаграмма Кенигса – Ламерея и лестница Ламерея [7] для $y(0) = 0.1$, $a = 0.1$, $b = 1.2$. Здесь $y_1(m) = x_1(m+1)$. После окончания процесса (6) изображающая точка через одну итерацию оказывается в точке А (при $z > 0$) или В (при $z < 0$).

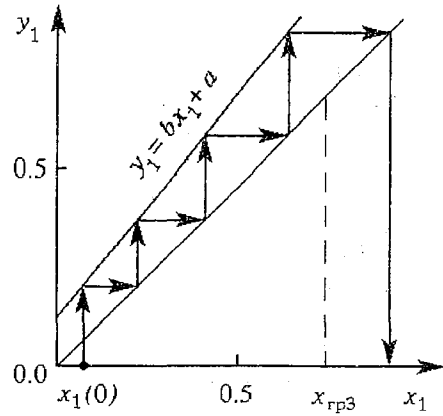


Рис. 3

Если движение начинается из сектора $RSLK$, то изменение координаты x_1 , когда изображающая точка находится на стороне BC , выражается зависимостью

$$x_1(m+1) = bx_1(m) - a, \quad (8)$$

где m и $x_1(0)$ находятся из (7). Решение этого уравнения имеет вид

$$x_1(m) = z_1 b^m + a_1,$$

где $z_1 = x_1(0) - a_1$. Процесс (8) прекращается после m_0 итераций, причем

$$m = \ln[(x_{гр4} - a_1)/z_1]/\ln b, \quad z_1 > 0,$$

$$m = \ln[(x_{гр2} - a_1)/z_1]/\ln b, \quad z_1 < 0.$$

При $z_1 = 0$ в системе существуют движения с периодом $T = 2: \rightarrow(-1, a_1) \rightarrow (a_1, -1) \rightarrow$. После окончания процесса (8) изображающая точка через одну итерацию оказывается в точках D (при $z_1 > 0$) или C (при $z_1 < 0$).

Если движение начинается в области D_0 , то оно описывается уравнением (2) с решением (3). Соотношение между корнями характеристического уравнения таково, что главным является решение

$$x^{(1)}(n) = C_1 q_1^n, \quad (9)$$

то есть при достаточно больших n движение системы описывается этой функцией. Направление движения (к области D_1 или D_{-1}) зависит от знака C_1 . Из (4) имеем, что при старте из области выше прямой

$$y^{(2)} = q_2 x \quad (10)$$

изображающая точка стремится к D_1 , а ниже – к D_{-1} . Функции (9) на фазовой плоскости соответствует прямая

$$y^{(1)} = q_1 x. \quad (11)$$

Огибающая траектории движения имеет вид совокупности гипербол, асимптотами которых являются прямые (10), (11) (см. рис. 2, а). Число итераций N от старта до достижения области D_1 находится из условия

$$y(N) \geq -(b/a)x(N) + 1/a,$$

это означает, что

$$C_1(q_1+bla)q_1^N + C_2(q_2+bla)q_2^N \geq 1/a. \quad (12)$$

Например, при $x(0)=0.25$, $y(0)=-0.2$, $a=0.1$, $b=1.2$ имеем $N=20$. Выражение для определения N при старте из области ниже прямой (10) и достижении области D_{-1} отличается от (12) только знаком правой части. После попадания изображающей точки в область D_1 или D_{-1} справедливы закономерности, приведенные выше.

2. Пусть параметры системы выбраны внутри сектора gdb . Разбиение фазовой плоскости показано на рис. 2, б.

При старте из областей D_1 или D_{-1} движение системы подчиняется закономерностям, установленным в п. 1. Стоит лишь отметить уменьшение областей притяжения точек A , C и увеличение областей притяжения точек B , D .

Если движение начинается из области D_0 , то вследствие соотношения между q_1 и q_2 главным решением уравнения (2) является знакопеременная функция

$$x^{(2)}(n) = C_2 q_2^n.$$

На рис. 2, б показаны графики асимптот (10), (11). При достаточно больших n изображающая точка находится поочередно во втором и четвертом квадрантах. Число итераций N от старта до достижения области D_1 или D_{-1} находится из условия

$$|C_1(q_1+bla)q_1^N + C_2(q_2+bla)q_2^N| \geq -1/a.$$

3. Пусть параметры системы выбраны внутри сектора kei . Разбиение фазовой плоскости показано на рис. 4, а.

Если движение начинается из секторов MEF , IHN , KLG , RSP , кроме лучей $x_{гр1}A$, $x_{гр2}B$, $x_{гр3}C$, $x_{гр4}D$, соответственно, то после второй итерации в системе устанавливаются колебания с периодом $T=4$ (имеется в виду, что $AE_1=Bx_{гр2}$, $H_1B=x_{гр3}C$, $CL_1=Dx_{гр4}$, $S_1D=x_{гр1}A$). При старте с вышеуказанных лучей эти колебания устанавливаются после первой итерации. Это происходит потому, что сектор MEF (кроме луча $x_{гр1}A$) отображается в луч $x_{гр2}B$ (кроме точки B), а луч $x_{гр2}B$ (кроме точки B) отображается в точку B и т.д.

Если движение начинается из сектора $FEHI$, то последовательность отображений может выглядеть следующим образом

$$FEHI \rightarrow x_{гр2}x_{гр4} \rightarrow L_1S_1 \rightarrow x_{гр3}x_{гр1} \rightarrow E_1H_1 \rightarrow x_{гр2}x_{гр4} \rightarrow \dots$$

Изменение абсциссы изображающей точки, когда последняя находится на сторонах BC или DA , описывается линейным разностным уравнением

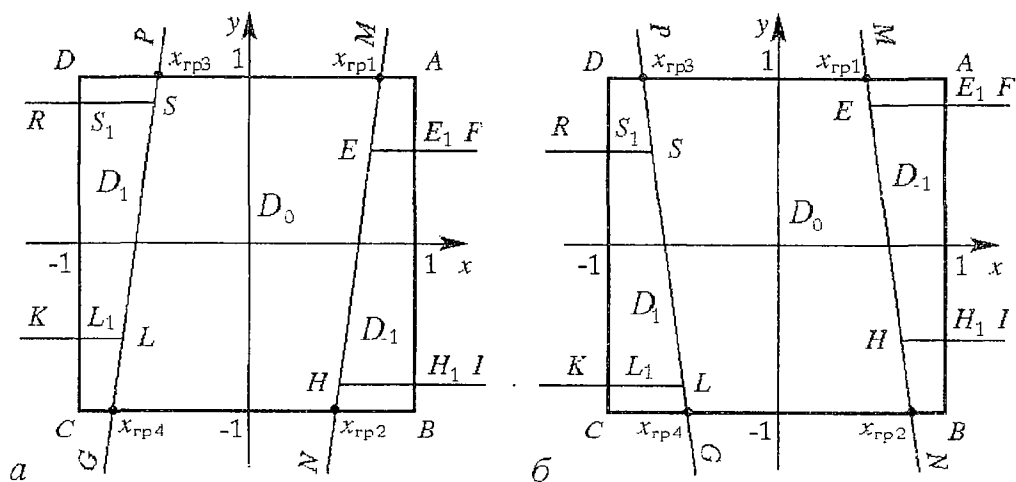


Рис. 4

$$x_1(m+1) = bx_1(m) - (-1)^m a, \quad (13)$$

где m и $x_1(0)$ находятся из (7). Решение этого уравнения имеет вид

$$x_1(m) = z_2 b^m + (-1)^m a_2, \quad (14)$$

где $z_2 = x_1(0) - a_2$, $a_2 = a/(1+b)$. При $z_2 > 0$ процесс (13) прекращается, если при четных m имеем $x_1(m) \geq x_{rp2}$, а при нечетных имеем $x_1(m) \leq x_{rp3}$. Соответствующее число итераций m_0 находится по вышеуказанному правилу с помощью равенства

$$m = \ln[(x_{rp2} - a_2)/z_2] / \ln(-b).$$

Когда $z_2 < 0$, то процесс прекращается, если при четных m имеем $x_1(m) \leq x_{rp4}$, а при нечетных $-x_1(m) \geq x_{rp1}$. Соответственно,

$$m = \ln[(x_{rp4} - a_2)/z_2] / \ln(-b).$$

При $z_2 = 0$ в системе существуют колебания с периодом $T=4$

$$\rightarrow (1, a_2) \rightarrow (a_2, -1) \rightarrow (-1, -a_2) \rightarrow (-a_2, 1) \rightarrow \dots \quad (15)$$

Например: при $y(0) = -0.4$, $a = 0.1$, $b = -1.2$ имеем $m_0 = 14$, то есть $n_0 = 29$.

Если движение начинается из сектора $RSLK$, то последовательность отображений может иметь вид

$$RSLK \rightarrow x_{rp3}x_{rp1} \rightarrow E_1H_1 \rightarrow x_{rp2}x_{rp4} \rightarrow L_1S_1 \rightarrow x_{rp3}x_{rp1} \rightarrow \dots$$

При этом вместо (13), (14) имеем

$$\begin{aligned} x_1(m+1) &= bx_1(m) + (-1)^m a, \\ x_1(m) &= z_3 b^m - (-1)^m a_2, \end{aligned} \quad (16)$$

где $z_3 = x_1(0) + a_2$. Процесс (16) прекращается после m_0 итераций, причем

$$m = \ln[(x_{rp1} - a_2)/z_3] / \ln(-b), \quad z_3 > 0,$$

$$m = \ln[(x_{rp3} - a_2)/z_3] / \ln(-b), \quad z_3 < 0.$$

В случае $z_3 = 0$ существуют колебания с периодом $T=4$ вида (15). По окончании процессов (13), (16) через одну итерацию в системе устанавливаются колебания с периодом $T=4$ вида (1).

Если движение начинается из области D_0 , то оно описывается уравнением (2) с решением (3), где однако

$$q_{1,2} = [a \pm j(-a^2 - 4b)^{1/2}] / 2.$$

Число итераций N от старта до достижения области D_1 или D_{-1} находится из условия

$$2|\operatorname{Re}[C_1 q_1^N (q_1 + b/a)]| \geq 1/a. \quad (17)$$

Например: при $x(0) = 0.2$, $y(0) = -0.2$, $a = 0.1$, $b = -1.2$ имеем $N = 14$.

4. Пусть параметры системы выбраны внутри сектора hek . Разбиение фазовой плоскости показано на рис. 4, б. Здесь $AE_1 = Bx_{rp2}$, $H_1B = x_{rp4}C$, $CL_1 = Dx_{rp3}$, $S_1D = x_{rp1}A$.

При старте из областей D_1 или D_{-1} движение системы подчиняется закономерностям, установленным в п.3.

Если движение начинается из области D_0 , оно развивается как и в п.3, а формула для нахождения числа N отличается от (17) только знаком правой части.

Заключение

В статье исследованы процессы установления свободных колебаний с периодами $T \in \{1; 2; 4\}$, в системе, сумматор которой имеет характеристику с насыщением. Определены этапы движения в переходном режиме, получены выражения для расчета их длительности. Предложенную методику исследования характера переходных процессов целесообразно использовать и для других областей параметров системы с насыщением. Результаты могут использоваться при разработке цифровых систем генерации сигналов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17388).

Библиографический список

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
2. Ogorzalek M.J. Complex behaviour in digital filters // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol.2, № 1. P. 11.
3. Брюханов Ю.А., Глызин С.Д., Рахманова Н.К. Динамические свойства разностной модели цифрового фильтра с кусочно-линейной характеристикой типа насыщения. Препринт № 91. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1993. 20 с.
4. Брюханов Ю.А., Глызин С.Д., Рахманова Н.К. Динамика цифрового фильтра с кусочно-линейной характеристикой типа насыщения. Аналитическое исследование. Препринт № 17. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1994. 30 с.
5. Брюханов Ю.А., Глызин С.Д. Устойчивые периодические режимы одной разностной модели цифрового фильтра с характеристикой насыщения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 4. С. 53.
6. Брюханов Ю.А. Свободные колебания в линейном цифровом осцилляторе // Радиотехника. 1996. № 5. С. 46.
7. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.

Ярославский государственный
университет

Поступила в редакцию 2.12.97
после переработки 13.05.98

TRANSIENT PROCESSES IN RECURSIVE DIGITAL SECOND-ORDER SYSTEM WITH NONLINEARITY OF SATURATION

Yu.A. Bruhanov

Free oscillations in a system with saturation type of adder characteristic are investigated. At parameters chosen inside two areas, processes of development of motions of periods one, two and four are considered. Phases of motions at transient regime are determined. Expressions for calculating of their duration are obtained.



Брюханов Юрий Александрович – родился в 1941 году в Красноярске, окончил Красноярский политехнический институт (1967). Работает в Ярославском государственном университете. Защитил кандидатскую диссертацию (1971) и докторскую диссертацию (1989) в области применения теории колебаний в задачах радиофизики и электроники. Автор монографии «Управление динамическим режимом колебательных систем» и более 140 статей.