



## О СИНХРОНИЗАЦИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПЕРИОДИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

*Л. А. Синицкий, О. А. Цвигун*

Рассматривается диссипативная система, описываемая системой обычных дифференциальных уравнений третьего порядка. В отсутствие внешнего сигнала все решения системы стремятся к единственному квазипериодическому двухчастотному решению. При расстройке внешнего сигнала (относительно высокочастотной составляющей квазипериодического сигнала), стремящейся к нулю, порог синхронизации отсутствует. При этом сохраняется режим квазипериодических колебаний. Рост амплитуды внешнего сигнала вызывает разрушение квазипериодического режима: возникают одночастотные колебания, совпадающие по частоте с внешним сигналом.

Воздействие периодического сигнала на автоколебательные системы третьего порядка рассматривается в работах [1–3]. Исследованная в [4] система имеет чрезвычайно много различных типов режимов, и действие внешнего периодического сигнала еще в большей степени увеличивает в ней количество разнообразных стационарных режимов. В предлагаемой работе анализируется более простая автоколебательная система третьего порядка, в которой в отсутствие внешнего сигнала возможно единственное семейство стационарных режимов – квазипериодические колебания на частотах  $\omega_0$ ,  $\omega_\epsilon$ . Отличие между составляющими семейства – в фазовых соотношениях, то есть все квазипериодические решения в фазовом пространстве непрерывно заполняют поверхность двумерного тора. Такого типа поведение характерно для сверхрегенеративного приемника до подачи внешнего сигнала.

При подаче внешнего периодического сигнала на частоте  $\omega$  возможны следующие типы стационарных режимов.

*Режим 1.* Отсутствие синхронизации, то есть существуют квазипериодические колебания с тремя базисными частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_\epsilon$ ,  $\omega$ .

*Режим 2.* При частоте  $\omega$  близкой к  $\omega_0$  имеет место синхронизация колебаний на частоте  $\omega$ , колебания остаются квазипериодическими с базисными частотами  $\omega$ ,  $\omega_\epsilon$ .

*Режим 3.* Синхронизация низкочастотных колебаний  $\omega_\epsilon$  разностной частотой  $\omega - \omega_0$ , ее субгармониками, либо внешним сигналом близким по частоте к  $\omega_\epsilon$ .

*Режим 4.* Разрушение квазипериодических колебаний и возникновение периодических колебаний на частоте  $\omega$ .

Для изучения поведения сверхрегенеративного приемника наиболее интересны режимы 2 и 4, поэтому им уделено значительное внимание.

Исследование приведенных выше режимов производилось на следующей математической модели:

$$\dot{x}_1 = \omega_0 x_2 + \varepsilon \nu x_1, \quad (1a)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_0 x_1 + \varepsilon \nu x_2 + A \nu \sin \omega t, \quad (1б)$$

$$\dot{\varepsilon} = (\varepsilon/\tau) [1 - 1/3(\varepsilon/\varepsilon_0)^2] - (\nu/2) \ln(r/r_0), \quad (1в)$$

где  $r = x_1^2 + x_2^2$ ,  $\tau$ ,  $\nu$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $r_0$  – параметры.

В отсутствие внешнего сигнала ( $A=0$ ) в системе (1) возникают квазипериодические колебания на частотах  $\omega_0$ ,  $\omega_\varepsilon = \nu$  для  $\nu\tau \gg 1$ . Это следует из вида общего решения системы (1). Замена переменных

$$x_1 = r^{1/2} \sin \varphi, \quad x_2 = r^{1/2} \cos \varphi$$

дает

$$dr/dt = 2\varepsilon \nu r, \quad (2)$$

$$d\varphi/dt = \omega_0.$$

Тогда уравнения (1в) и (2) приводят к уравнению Ван-дер-Поля для переменной  $\varepsilon$

$$\ddot{\varepsilon} - (1/\tau) [1 - (\varepsilon/\varepsilon_0)^2] \dot{\varepsilon} + \nu^2 \varepsilon = 0, \quad (3)$$

которое при  $\nu\tau \gg 1$  дает периодическое решение

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \sin(\nu t + \alpha), \quad (4)$$

где  $\alpha$  – произвольная фаза.

После подстановки (4) в (1) и пренебрежения высшими гармониками получим

$$r = r_0 \exp[-4\varepsilon_0 \cos(\nu t + \alpha)].$$

Следовательно,

$$x_1 = r_0^{1/2} \exp[-2\varepsilon_0 \cos(\nu t + \alpha)] \sin(\omega_0 t + \beta), \quad (5)$$

$$x_2 = r_0^{1/2} \exp[-2\varepsilon_0 \cos(\nu t + \alpha)] \cos(\omega_0 t + \beta).$$

Таким образом, независимо от начальных условий устанавливается квазипериодический режим с базисными частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_\varepsilon = \nu$ . Разумеется, при  $\nu\tau$  порядка 1 и ниже базисная частота  $\omega_\varepsilon$  отличается от  $\nu$  в сторону уменьшения, а колебания  $\varepsilon$  отличаются от гармонических. Однако квазипериодический режим не исчезает. Изменения  $x_1$ ,  $x_2$  во времени качественно полностью воспроизводят колебания, имеющие место в сверхрегенеративном приемнике (рис. 1).

При ненулевом внешнем сигнале ( $A \neq 0$ ) применим к уравнениям (1а), (1б) метод медленно меняющихся амплитуд. Решение ищем в виде

$$x_1 = b_1 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t, \quad (6)$$

$$x_2 = b_1 \cos \omega t - b_2 \sin \omega t.$$

После подстановки (6) в уравнения (1а), (1б) и пренебрежения гармоникой с частотой  $2\omega$  получим систему

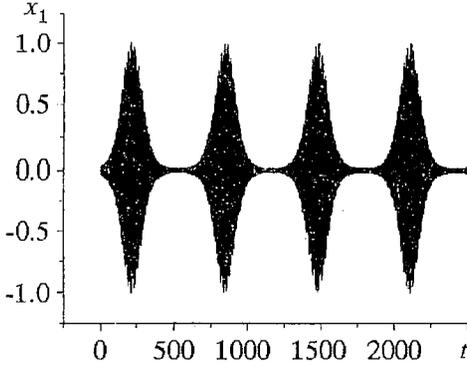


Рис. 1. Изменение  $x_1$  для системы (1) во времени при отсутствии внешнего сигнала и значениях параметров  $\tau=500$ ,  $\epsilon_0=1.15$ ,  $\nu=10^{-2}$ ,  $\omega_0=1$ ,  $r_0=10^{-2}$

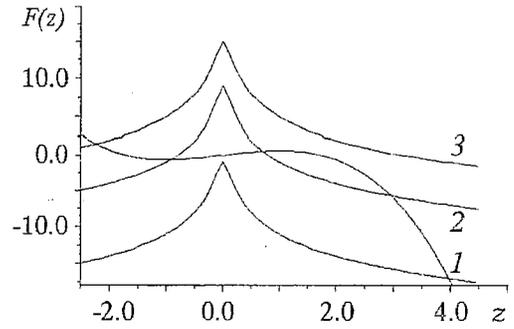


Рис. 2. Графическое решение уравнения (8) для случаев одного неустойчивого (кривая 1), трех (кривая 2) и одного (кривая 3) устойчивых положений равновесия. Здесь  $F(z)$  – правая часть уравнения (8) при различных значениях  $C$

$$\dot{b}_1 = \delta b_2 + \epsilon \nu b_1,$$

$$\dot{b}_2 = -\delta b_1 + \epsilon \nu b_2 + A \nu / 2, \quad (7)$$

$$\dot{\epsilon} = (\epsilon / \tau) [1 - 1/3(\epsilon / \epsilon_0)^2] - (\nu / 2) \ln(r / r_0),$$

где  $r = b_1^2 + b_2^2$ ,  $\delta = \omega - \omega_0$ .

Исследуем положения равновесия в системе (7), приравняв производные к нулю. В результате получим одно уравнение для определения стационарного значения  $\epsilon = \epsilon_s$

$$z(1 - z^2/3) = C - \mu \ln(\rho^2 + z^2), \quad (8)$$

где  $z = \epsilon_s / \epsilon_0$ ,  $C = [(\nu \tau) / (2 \epsilon_0)] \ln[A^2 / (4 r_0 \epsilon_0^2)]$ ,  $\mu = \nu \tau / (2 \epsilon_0)$ ,  $\rho = \delta / (\epsilon_0 \nu)$ .

При достаточно малом значении амплитуды  $A$  уравнение (8) имеет единственное решение  $\epsilon_s > \epsilon_0$  (рис. 2, кривая 1). При возрастании амплитуды  $A$  и превышении значения  $A_1 = f_1(\delta)$  возникают три решения (см. рис. 2, кривая 2). Причем, для значений параметра  $\rho \ll 1$  имеем

$$f_1 = (2 r_0^{1/2} / \nu) \delta,$$

а для значений  $\rho \gg 1$  –

$$f_1 = (2 r_0^{1/2} / \nu) \exp[-2 \epsilon_0 / (3 \nu \tau)] \delta.$$

При дальнейшем увеличении  $A$  и превышении значения  $A_2 = f_2(\delta)$  уравнение (8) снова имеет единственный корень при  $\epsilon_s < 0$  (см. рис. 2, кривая 3). В этом случае для значений  $\rho \gg 1$

$$f_2 = (2 r_0^{1/2} / \nu) \exp[2 \epsilon_0 / (3 \nu \tau)] \delta.$$

Рассмотрим линеаризованные уравнения системы (7)

$$\dot{b}_1 = \delta b_2 + \epsilon_s \nu b_1 + \epsilon \nu b_{1s},$$

$$\dot{b}_2 = -\delta b_1 + \epsilon_s \nu b_2 + \epsilon \nu b_{2s}, \quad (9)$$

$$\dot{\epsilon} = (\epsilon / \tau) [1 - (\epsilon_s / \epsilon_0)^2] - (\nu / r_s) (b_{1s} b_1 + b_{2s} b_2),$$

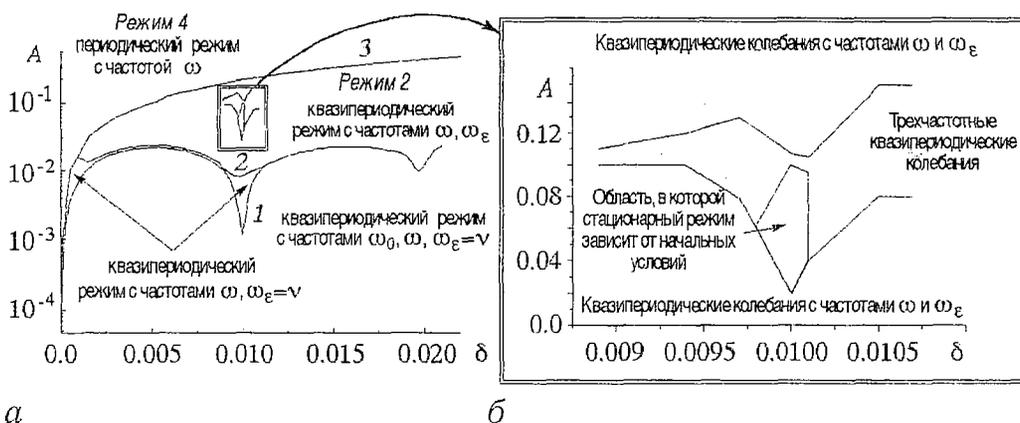


Рис. 3. а – разбиение плоскости  $(A, \delta)$  в зависимости от режима, который устанавливается в системе (1):  $A=A_1$  – кривая 1,  $A=A_2$  – кривая 2,  $A=A_3$  – кривая 3; б – увеличенный фрагмент, выделенный рамкой на рис. 3, а. Результаты получены численным интегрированием

где  $r_s = b_{1s}^2 + b_{2s}^2$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $b_{1s}$ ,  $b_{2s}$  – стационарные значения;  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\varepsilon$  – малые отклонения динамических переменных от стационарных значений. Решение (9) показывает, что единственное положение равновесия устойчиво при  $\varepsilon_s < -\varepsilon_0$  и неустойчиво при  $\varepsilon_s > \varepsilon_0$ . При наличии трех решений уравнения (8) система линеаризованных уравнений (9) имеет три положения равновесия, одно из которых устойчиво.

Обратимся теперь к динамике системы. При малых значениях амплитуды  $A \ll A_1$  в системе (7) имеется единственное неустойчивое положение равновесия и сохраняется квазипериодический режим с базисными частотами близкими к  $\delta$  и  $\nu$ . Это соответствует тому, что в системе (1) отсутствует синхронизация внешним сигналом, и существуют квазипериодические колебания с тремя базисными частотами  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\nu$ . В этом режиме амплитуды колебаний составляющих примерно такие же, как и в отсутствие внешнего сигнала ( $A=0$ ).

Однако при достижении амплитудой  $A$  некоторого значения  $A_\nu$  ( $A_\nu < A_1$ ) в системе (7) возникает периодический режим с частотой  $\omega_\varepsilon$ . Экспериментально установлено, что значение  $A_\nu$  тем меньше, чем ближе значение  $\delta$  к  $k\nu$ , где  $k=0, \pm 1, \pm 2 \dots$  (рис.3, а, кривая 1).

Рассмотрим сначала явление синхронизации при  $\delta \ll \nu$ . Значение  $A$ , при котором происходит синхронизация высокочастотных колебаний внешним сигналом (режим 2) обозначим  $A_\nu$ . Подобно синхронизации генератора периодических колебаний  $A_1$  и  $A_\nu$  стремятся к нулю одновременно с  $\delta$ , то есть порог синхронизации отсутствует (рис. 3, а).

При этом частота огибающей  $\omega_\varepsilon$  сохраняется равной  $\nu$ . Отметим, что в отличие от режима синхронизации генератора Ван-дер-Поля возрастание амплитуды внешнего сигнала вызывает уменьшение амплитуды колебаний  $x_1$ ,  $x_2$ , в то время как для генератора Ван-дер-Поля амплитуда синхронизированных колебаний возрастает. Форма огибающей при режиме 2 качественно сохраняется, однако среднее значение  $r$  во времени сильно зависит от амплитуды  $A$  и расстройки  $\delta$ . Эти зависимости проиллюстрированы на рис. 4. Отметим, что

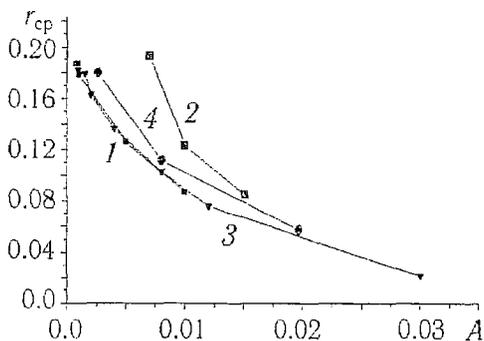


Рис. 4. Зависимость среднего значения  $r$  от параметра  $A$  для системы (7) при различных значениях параметра  $\delta$ : 1 –  $10^{-4}$ ; 2 –  $10^{-3}$ ; 3 –  $10^{-2}$ ; 4 –  $1.02 \cdot 10^{-2}$ ; значения остальных параметров те же, что и для рис. 1

изменения  $r_{cp}$  в зависимости от  $A$  для случаев  $\delta \approx 0$  и  $\delta = \nu$  практически совпадают. Такой режим сохраняется при возрастании  $A$  вплоть до значения  $A = A_1$ , при котором в системе (7) появляется устойчивое положение равновесия. В системе (1) возникает режим периодических колебаний на частоте  $\omega$  (режим 4), то есть квазипериодический режим разрушен. При этом амплитуда синхронизированных колебаний резко падает и принимает значение порядка  $A$ .

Описанный характер поведения справедлив для значений  $\delta < 0.2\nu$  (см. рис. 3, а). При  $\delta > 0.2\nu$ , прежде всего, наблюдается отклонение частоты огибающей в сторону возрастания, однако при росте  $A$  не наблюдалось бифуркаций вплоть до разрушения квазипериодического режима.

Было также изучено поведение системы (7) при  $\delta$  близких  $\nu$ , то есть в области первого минимума (см. рис. 3, а). При  $A > A_\nu$  в системе (7) устанавливается единственный периодический режим с частотой  $\omega_e = \nu$ . Этот режим существует, пока значения  $A < A_\delta$ . При превышении амплитудой  $A$  значения  $A_\delta$  ( $A > A_\delta$ ) частота периодического режима  $\omega_e$  начинает отклоняться от  $\nu$ . Причем  $\omega_e$  зависит от  $A$  и разности  $(\nu - \delta)$ . Существует также некоторая область параметров на плоскости  $(A, \delta)$ , в которой наблюдаются два устойчивых периодических режима, либо один периодический и один квазипериодический режимы, установление которых зависит от начальных условий (см. рис. 3, б).

Синхронизации колебаний огибающей (режим 3) разностной частотой  $\omega - \omega_0$  (так же как и гармониками разностной частоты  $\omega - \omega_0$ ) не наблюдалось.

При возникновении в (7) периодического режима возможны две ситуации.

1. Частота  $\omega_e$  несоизмерима с частотой  $\omega$ . Тогда в (1) существуют квазипериодические колебания при синхронизации колебаний на высокой частоте внешним сигналом.

2. Возможно также, что эти частоты соизмеримы. Тогда режим, строго говоря, периодический, но формы кривых для  $x_1, x_2$  подобны тем, что наблюдаются в первом случае.

Во втором случае можно говорить о том, что происходит одновременная синхронизация как высокочастотных колебаний  $\omega_0$ , так и низкочастотных  $\omega_e$  одним и тем же сигналом с частотой  $\omega$ . Отметим, что в силу того, что  $\omega/\omega_e$  имеет порядок  $10^2$  и выше, достаточно точно идентифицировать кратность частот  $\omega, \omega_e$  затруднительно. Тем не менее можно утверждать, что подобная синхронизация наблюдается и она аналогична синхронизации частот  $\omega_0, \omega_e$  в отсутствие внешнего сигнала.

При  $A > A_1$  в системе (7) появляется устойчивое положение равновесия. Независимо от того, существуют ли неустойчивые положения равновесия, все траектории (кроме соответствующих неустойчивым положениям равновесия) при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к нему. Последнее означает, что переход  $A$  через значение  $A_2$  не отражается на характере процессов в системах (7) и (1). Теоретически доказать этот факт не удалось, однако многочисленные расчеты при  $A > A_1$  и различных начальных условиях позволяют сделать приведенное утверждение. Во всяком случае, если и существуют какие-либо другие установившиеся режимы, кроме положений равновесия, то их области притяжения достаточно малы.

Существование одного устойчивого положения равновесия  $e_s$ , если оно устойчиво в целом, свидетельствует, что квазипериодический режим разрушен, и в системе (1) возникают колебания на частоте внешнего сигнала.

Отметим, что амплитуда синхронизированных колебаний порядка  $A$ ; поэтому при значениях  $A \approx A_1$  синхронизированные автоколебания значительно меньше амплитуды квазипериодических колебаний в отсутствие внешнего сигнала. (Это типично для подавления.)

Предложенная модель позволяет также рассмотреть режим синхронизации на частоте огибающей  $\omega_\epsilon$  (режим 3), если ввести внешний сигнал иным образом

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega_0 x_2 + \epsilon \nu x_1, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0 x_1 + \epsilon \nu x_2,\end{aligned}\tag{10}$$

$$\dot{\epsilon} = (\epsilon/\tau)[1 - 1/3(\epsilon/\epsilon_0)^2] - (\nu/2)\ln(r/r_0) + A\nu\sin\omega t.$$

Тогда (10) сводится в режиме внешней синхронизации к уравнению Ван-дер-Поля

$$\ddot{\epsilon} - (1/\tau)[1 - (\epsilon/\epsilon_0)^2]\dot{\epsilon} + \nu^2\epsilon = A\nu\omega\cos\omega t\tag{11}$$

и к нему применима известная теория [5]. Отметим, что в этом случае режим квазипериодических колебаний в системе (10) до прекращения режима синхронизации полностью сохраняется с тем отличием, что частота огибающей  $\omega_\epsilon = \omega$ .

Показано, что режим синхронизации высокочастотной составляющей квазипериодических колебаний внешним сигналом сохраняет в некотором отношении одно из свойств синхронизации гармонического генератора, а именно, отсутствие порога синхронизации при расстройке, стремящейся к нулю. Однако амплитуда высокочастотных колебаний сильно зависит от амплитуды и частоты синхронизирующего сигнала, что используется при сверхрегенеративном приеме. Для больших сигналов происходит разрушение квазипериодического режима.

### Библиографический список

1. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
2. Ланда П.С., Перминов С.М., Шаталова Г.Г., Дамгов В.Н. Стохастические автоколебания в генераторе с дополнительной запаздывающей обратной связью // РЭ. 1986. Т.31, №4. С.730.
3. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
4. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах: механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
5. Андронов А.А. Собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1956.

Львовский государственный  
университет, Украина

Поступила в редакцию 6.01.98

### ON SYNCHRONIZATION OF THE THIRD ORDER QUASI-PERIODIC SYSTEMS BY A PERIODIC SIGNAL

L.A. Sinitsky, O.A. Tsvigun

The dissipative system described by a system of the ordinary differential equations of the third order is considered. In the absence of an exterior signal all solutions of the system converge to a unique quasi-periodic two-frequency solution. When derivation of an input signal frequency tends to zero (relatively to a high-frequency component of a quasi-periodic signal) the synchronization threshold is absent. The input signal amplitude growth causes destruction of a quasi-periodic solution: one-frequency oscillations exist on the frequency of an input signal.



*Синицкий Лев Аронович* – доктор технических наук, профессор Львовского государственного университета. Окончил Ленинградский институт авиационного приборостроения (1948). Автор 150 научных работ, в том числе 7 монографий. Область научных исследований – теория электрических цепей.



*Цигун Олег Алексеевич* – аспирант Львовского государственного университета. Окончил физический факультет Львовского государственного университета (1996). Автор 3 научных работ. Область научных исследований – теория электрических цепей.