



## **БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА В СЛУЧАЕ КОЛЬЦЕВОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА С ЖИДКИМ КРИСТАЛЛОМ: ВЛИЯНИЕ ДИФфуЗИИ**

*А.Л. Магазинников, Б.Н. Пойзнер*

На основе компьютерного моделирования изучены явления бифуркаций в оптическом кольцевом интерферометре, содержащем нелинейную (керровскую) среду – жидкий кристалл. Установлено, что при увеличении коэффициента диффузии точки бифуркации на бифуркационной диаграмме смещаются в сторону большего параметра нелинейности. Для наглядного описания явлений гистерезиса и бифуркаций построено распределение интенсивности в поперечном сечении лазерного пучка на выходе системы.

### **Введение**

Явление бифуркации встречается в нелинейных физических системах разнообразной природы: лазерах, неавтономных системах маятникового типа, нейронных системах и др. [1–3]. В последние два – три года исследования условий появления бифуркаций предпринимались по различным поводам, но главным образом в связи с изучением причин и обстоятельств смены одного динамического режима другим. Так, в работе [1] моделировалось поведение лазера с насыщающимся поглотителем для того, чтобы выяснить механизмы формирования хаотических аттракторов. В частности, установлено, что к хаотическим режимам приводят каскад бифуркаций удвоения периода либо гетероклиническая бифуркация к седло–фокусной стационарной точке.

В работе [2] качественно–численным методом с использованием компьютерного моделирования проведен бифуркационный анализ нелинейной системы маятникового типа. В ходе компьютерного моделирования выделены области с хаотическим поведением различного типа, изучен случай возникновения в системе двух устойчивых периодических движений колебательного типа. В [3] представлен краткий обзор работ по изучению поперечной и поперечно–поляризационной структуры поля излучения в лазерах с резонаторами линейного и кольцевого типа. Указано, в частности, что режимы генерации лазера разделяются на два типа: стационарные и динамические режимы. При увеличении усиления может произойти смена одного режима другим, то есть бифуркация.

Анализ бифуркаций представляет также интерес в контексте изучения процессов в нелинейном кольцевом интерферометре (интерферометре Физо). В данной системе экспериментально обнаружены явления самоорганизации структур в поперечном сечении лазерного пучка: бистабильность, мультистабильность, вращение структур, оптический хаос. Изучение подобных явлений ведется с конца 1980–х С.А. Ахмановым, М.А. Воронцовым [4–6], В.И. Шмальгаузенем и

А.В. Ларичевым с коллегами [7,8] а также зарубежными авторами В. Фирфом, Ф. Арекки и др. [9,10]. Указанными авторами, в частности, затрагиваются следующие аспекты:

- построение и анализ бифуркационных диаграмм;
- выявление динамики структур в нелинейном интерферометре Физо;
- ослабление фазовых искажений за счет фурье-фильтрации в цепи обратной связи;
- составление и изучение «точечных» моделей нелинейного интерферометра Физо.

Установлено, что в нелинейном интерферометре Физо могут наблюдаться многочисленные бифуркации. Они возникают при изменении параметров системы (например, параметра нелинейности), когда возможны скачкообразные изменения интенсивности выходного излучения [4], а также смена динамических режимов [11]. Общепринятым приемом для изучения бифуркационного поведения служит так называемая бифуркационная диаграмма. Она строится на плоскости: стационарное решение уравнения – параметр, вызывающий бифуркацию решения. Насколько можно судить по литературе [4,12], бифуркационная диаграмма остается главным способом описания бифуркационного поведения системы.

С учетом имеющихся в литературе результатов целесообразным видится исследование, осуществляемое в два этапа. Сначала проводится изучение закономерностей бифуркационного поведения нелинейного интерферометра Физо при изменении диффузионного и нелинейного фактора, вызванного нелинейным электрооптическим эффектом, что составляет предмет данной статьи. Затем анализируется устойчивость стационарных решений, найденных на первом этапе. Результаты анализа устойчивости предполагается систематизировать и изложить в следующей статье. По мнению авторов, такая постановка задачи имеет смысл как с точки зрения изучения особенностей совместного влияния на процессы структурообразования рассеивающего и нелинейного факторов [13], так и с точки зрения применения оптической системы в адаптивной оптике [14].

### Физическая и математическая модели

В качестве физической модели выбран кольцевой интерферометр Физо с керровской нелинейностью (рис. 1). Диффузия молекул нелинейной среды и/или дифракция света приводят к возникновению локальной (мелкомасштабной) поперечной взаимосвязи световых полей. Мелкомасштабная связь означает, что изменение траектории луча после обхода через интерферометр много меньше диаметра пучка. В математической модели мелкомасштабная связь учитывается феноменологически введением оператора Лапласа по поперечным координатам [4]. Основное уравнение записано для нелинейной фазовой модуляции  $u(\mathbf{r},t)$ , пропорциональной интенсивности выходного излучения

$$\tau \text{div}(\mathbf{r},t)/\partial t + u(\mathbf{r},t) = D\Delta_{\perp}u(\mathbf{r},t) + K(\mathbf{r})[1 + \gamma \cos(u(\mathbf{r},t) + \varphi_0)], \quad (1)$$

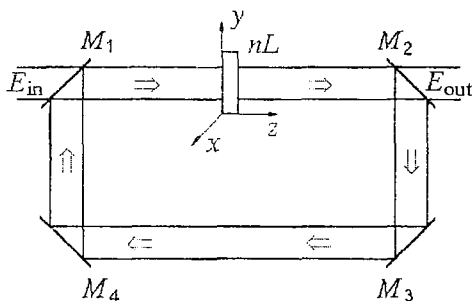


Рис. 1. Схема нелинейного кольцевого интерферометра Физо.  $M_1 \dots M_4$  – зеркала ( $M_1, M_2$  – полупрозрачные зеркала);  $nL$  – слой нелинейного жидкого кристалла

где  $D$  – коэффициент диффузии;  $\tau$  – время релаксации нелинейной части показателя преломления;  $\varphi_0$  – невозмущенный фазовый набег;  $\gamma$  – контрастность интерференционной картины;  $K$  – коэффициент нелинейности, пропорциональный интенсивности входного излучения;  $K(\mathbf{r}) = kl(1-R)n_2I_{in}(\mathbf{r})$ ;  $k$  – волновое число;  $l$  – толщина слоя нелинейной среды;  $R$  – коэффициент отражения по интенсивности зеркал  $M_1$  и  $M_2$ ;  $n_2$  – коэффициент нелинейной рефракции. Координаты  $\mathbf{r} = (x, y)$  нормированы к

эффективному радиусу входного лазерного пучка, коэффициент  $D$  – к квадрату радиуса.

В литературе часто рассматривается случай пространственно однородного светового поля (то есть,  $K(\mathbf{r})=\text{const}$ ). Так, в работе [4] исследовалась система, когда входное излучение имело вид тонкого кольца. А между тем представляют интерес системы с  $K(\mathbf{r})\neq\text{const}$ , когда характер процессов, протекающих в системе, принципиально меняется [9]. Поэтому в данной работе будет использоваться гауссово распределение интенсивности излучения входного пучка, то есть для коэффициента нелинейности  $K$  можно записать выражение

$$K = K_0 \exp[(x^2+y^2)/r_0^2]. \quad (2)$$

Величину стационарной фазы  $u_{\text{st}}(r)$  и распределение интенсивности на выходе интерферометра  $I_{\text{out}}(r)$  определим из уравнений

$$\begin{aligned} u_{\text{st}}(r) &= D[d^2u_{\text{st}}(r)/dr^2 + (1/r)du(r)/dr] + I_{\text{out}}(r)/\alpha, \\ I_{\text{out}}(r) &= \alpha K(r)(1 + \gamma \cos(u_{\text{st}}(r) + \varphi_0)) \end{aligned} \quad (3)$$

с граничными условиями

$$u(r = r_0) = \text{const}, \quad du(r = 0)/dr = 0, \quad (4)$$

где  $r$  – полярная координата;  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от коэффициента отражения зеркал в контуре обратной связи.

Уравнение (3) с граничными условиями (4) решено нами при различных значениях коэффициента диффузии  $D$ . Это позволило исследовать влияние коэффициента диффузии на строение бифуркационной диаграммы, то есть на зависимость  $u_{\text{st}}(K)$ . Для численного решения (3) применялась равномерная сетка с постоянным шагом по координате. Полученная система конечноразностных уравнений решалась методом прогонки [15].

### Графическое представление явления бифуркации и учет влияния диффузии

Численное моделирование и компьютерная графика позволили наглядно продемонстрировать оптический гистерезис и бифуркации. Для описания явления бифуркации построено распределение интенсивности выходного излучения при увеличении интенсивности входного излучения (рис. 2, а) и при ее уменьшении (рис. 2, б). Как видно из рисунков, при учете диффузионной взаимосвязи световых полей переходы из одного состояния в другое остаются резкими. Для  $D=0.1$  в диапазоне значений параметра  $K_0$  от 7.59 до 9.01 наблюдается гистерезис строения оптической структуры. Это означает, что в пределах указанных значений  $K_0$  возможны две качественно различные интерференционные картины. При изменении величины  $K_0$  в сторону уменьшения (рис. 2, б) размер ярко освещенной области интерференционной картины уменьшается, однако при этом растет интенсивность излучения в центральной области лазерного пучка. При критическом значении  $K_0=7.59$ , соответствующем точке бифуркации, яркое пятно исчезает. Напомним, что величина  $K_0$  пропорциональна интенсивности входного излучения.

Чтобы выяснить влияние диффузии молекул нелинейной среды на строение бифуркационной диаграммы, необходимо решить дифференциальное уравнение (3). Для симметричного пучка, распространяющегося вдоль оси  $z$ , зависимости  $u_{\text{st}}(K_0)$  при различных значениях коэффициентов диффузии показаны на рис. 3. Здесь величина  $K_0$  соответствует максимальному значению параметра нелинейности  $K$ . По сравнению со случаем отсутствия поперечных взаимодействий, бифуркация

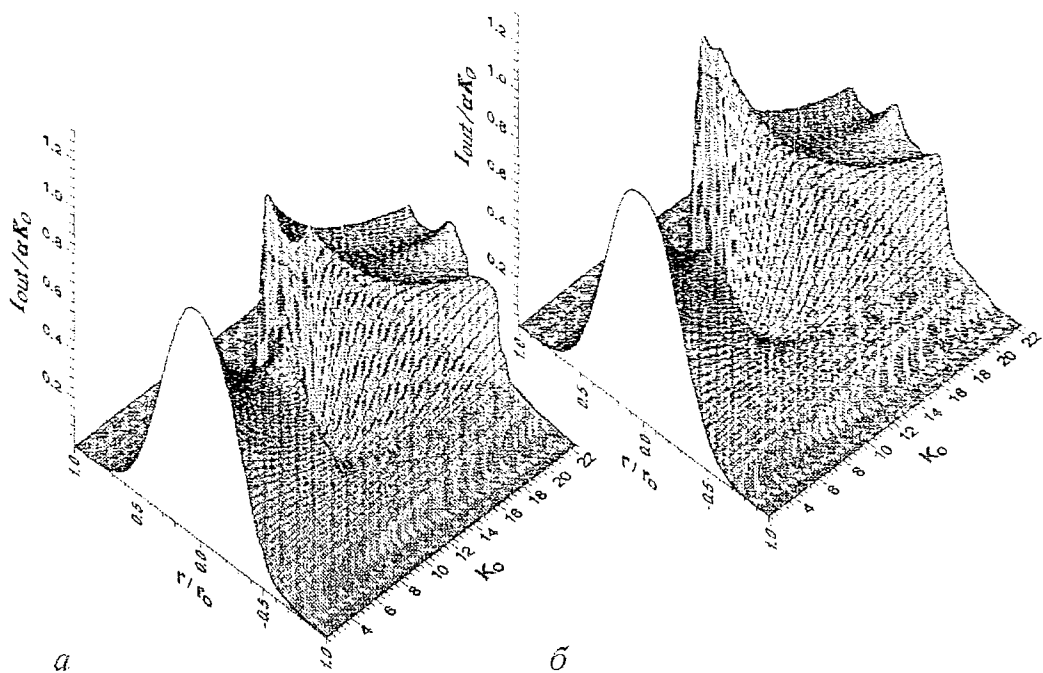


Рис. 2. Изменение распределения интенсивности излучения в поперечном сечении лазерного пучка на выходе интерферометра Физо при увеличении (а) и при уменьшении (б) параметра  $K_0$ ; величина  $K_0$  пропорциональна интенсивности входного излучения,  $I_{out}/\alpha K_0$  – нормированная интенсивность,  $r/r_0$  – нормированная координата;  $\gamma=0.5$ ,  $\varphi_0=0$

происходит при большем значении параметра нелинейности. Для осуществления перехода из одного устойчивого состояния в другое достаточно изменить условия освещения (увеличить интенсивность входного излучения), либо использовать импульсную подсветку слоя нелинейной среды.

При некоторых значениях параметра  $K_0$  (на рис. 3 эти значения помечены знаками 1, 2, 3,  $2L$  и  $3L$ ) наблюдается переход системы с одного стационарного состояния на другое, то есть бифуркация. Из рис. 3 видно, что при увеличении коэффициента диффузии  $D$  точки бифуркации смещаются в сторону большего значения параметра нелинейности  $K_0$ . Для анализа совместного влияния диффузии и нелинейности на бифуркационное поведение целесообразно строить так называемый бифуркационный портрет: кривая в пространстве параметров динамической системы, каждая точка которой соответствует наступлению бифуркации [16]. В данном случае бифуркационный портрет строится в плоскости  $(D, K_0)$  и отражает относительное влияние  $K_0$  и  $D$  на бифуркационное поведение.

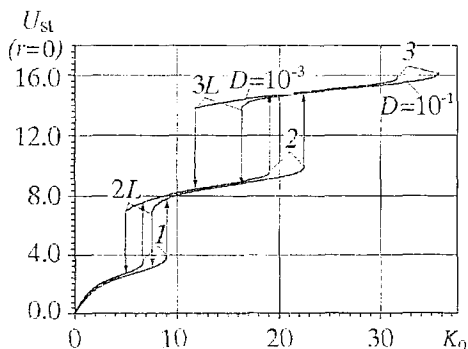


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы стационарных решений при разных значениях коэффициента диффузии  $D$ : зависимость стационарного фазового набег  $u_{st}$  от максимального значения  $K_0$ , коэффициента нелинейности  $K$ ;  $\gamma=0.5$ ,  $\varphi_0=0$

Для сравнения на рис. 4 приведены кривые для точек бифуркации, лежащих на различных ветвях бифуркационной диаграммы. Например, кривая 1 на рис. 4, а соответствует точке бифуркации 1 (см. рис. 3). В нелинейном интерферометре Физо скачкообразные изменения интенсивности излучения возможны не только при увеличении, но и при

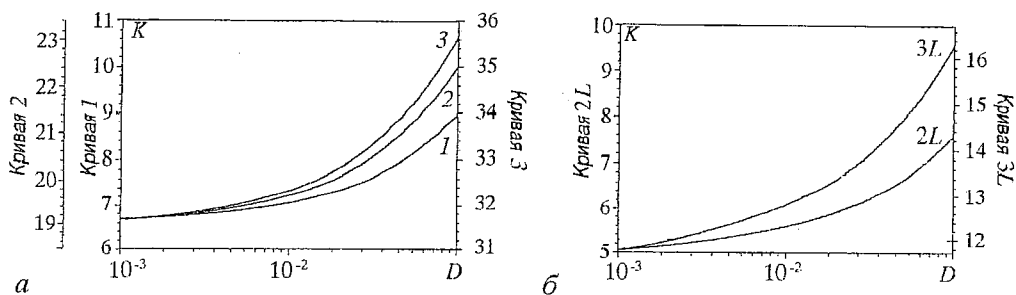


Рис. 4. Бифуркационные портреты для бифуркаций, наступающих при увеличении (а) и при уменьшении (б) параметра нелинейности: зависимость бифуркационных значений параметра  $K_0$ , обозначенных на рис. 3 как 1, 2, 3, 2L, 3L, от коэффициента диффузии  $D$

уменьшении параметра нелинейности. Соответствующие бифуркационные значения обозначены на рис. 3 как 2L и 3L. Для данных точек также построен бифуркационный портрет (рис. 4, б). Зависимости на рис. 4 с высокой степенью точности аппроксимируются полиномом четвертой степени

$$K_0 = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + a_3 D^3 + a_4 D^4. \quad (5)$$

Константы  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  в (5) имеют следующие значения для кривых:

1	–	$a_0=17.17,$	$a_1=13.96,$	$a_2=7.51,$	$a_3=1.90,$	$a_4=0.19;$
2	–	$a_0=34.34,$	$a_1=20.24,$	$a_2=10.86,$	$a_3=2.74,$	$a_4=0.27;$
3	–	$a_0=50.01,$	$a_1=24.68,$	$a_2=13.40,$	$a_3=3.42,$	$a_4=0.34;$
2L	–	$a_0=15.23,$	$a_1=12.81,$	$a_2=6.67,$	$a_3=1.65,$	$a_4=0.16;$
3L	–	$a_0=30.91,$	$a_1=25.53,$	$a_2=14.28,$	$a_3=3.80,$	$a_4=0.39.$

Таким образом, с увеличением номера (порядка) ветви влияние диффузии на положение точек бифуркации увеличивается, то есть крутизна кривой на бифуркационном портрете возрастает. Диапазон изменения коэффициента диффузии в пределах  $10^{-3} \div 10^{-1}$  является наиболее часто используемым как в натуральных, так и численных экспериментах [4–6].

С помощью уравнения (3) построено распределение интенсивности для различных значений коэффициентов диффузии. Для большей наглядности графики распределения интенсивности выходного излучения выполнены в трехмерном варианте. Характер поведения интенсивности излучения на выходе интерферометра Физо в зависимости от значения коэффициента диффузии показан на рис. 5. Распределение построено для второй ветви бифуркационной диаграммы, изображенной на рис. 3. При этом значение амплитуды входного излучения выбиралось близким к точке бифуркации. Распределение интенсивности показано также на плоскости при фиксированных значениях  $D$  (рис. 6). Из построенных зависимостей (см. рис. 5, б) видно появление максимумов интенсивности излучения при увели-

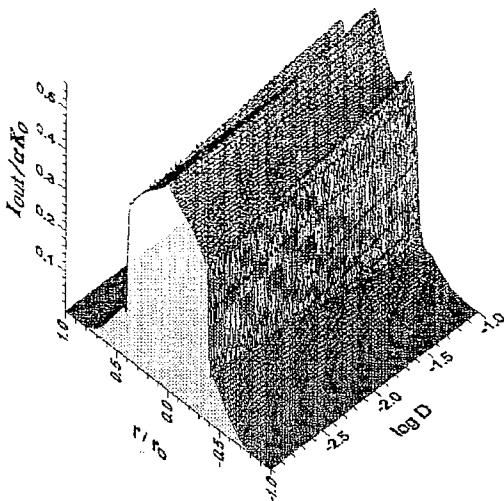


Рис. 5. Распределение интенсивности в поперечном сечении лазерного пучка на выходе интерферометра Физо в зависимости от значения логарифма коэффициента диффузии  $D$ ;  $\gamma=0.5, \varphi_0=0$

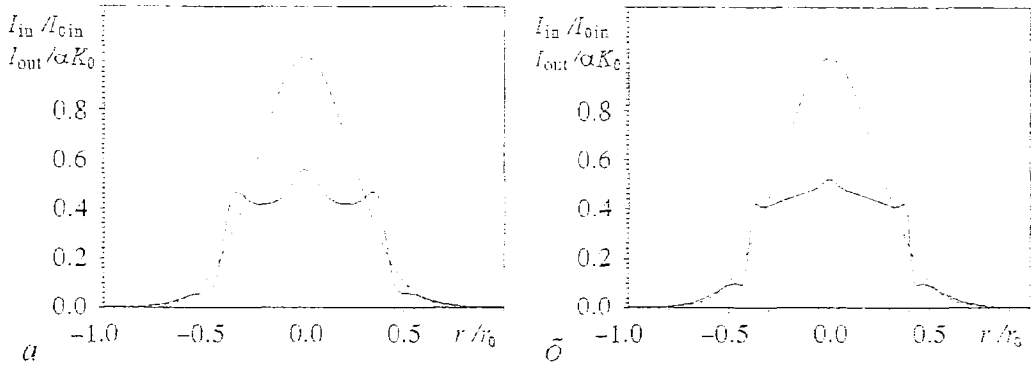


Рис. 6. Распределения интенсивности на выходе (сплошная кривая) и на входе (штриховая кривая) интерферометра Физо для различных значений коэффициента диффузии  $D$ :  $a - 0.1$ ,  $b - 0.01$ ;  $\gamma=0.5$ ,  $\varphi_0=0$

чении коэффициента диффузии  $D$  молекул нелинейной среды. Кроме того, учет диффузии молекул жидкого кристалла приводит к падению контрастности интерференционной картины, что согласуется с результатами натурального эксперимента (рис. 6.23,  $a$ ,  $b$  в [4]). Этот факт также коррелирует с утверждением Е.Н.Князевой и С.П.Курдюмова о влиянии рассеивающего фактора (в частности, диффузионного) на структурообразование, когда «распад структуры сменяется объединением, максимальное развитие неоднородностей – их замыванием, сглаживанием» [13].

### Заключение

На основании проведенного математического моделирования и анализа бифуркационных диаграмм можно заключить.

1. В результате скачка стационарного решения, наступающего при бифуркационном значении произведения интенсивности входного излучения  $I_{in}$  на параметр нелинейности жидкого кристалла  $K$  основная энергия излучения локализуется в центральной области поперечного сечения лазерного пучка.

2. При увеличении коэффициента диффузии  $D$  жидкого кристалла точки бифуркации на бифуркационной диаграмме смещаются в сторону большего значения параметра нелинейности  $K_0$ .

3. Учет совместного влияния нелинейности  $K_0$  и диффузии  $D$  молекул жидкого кристалла на возникновение бифуркации обеспечивается построением кривой на плоскости  $(D, K_0)$ , каждая точка которой соответствует наступлению бифуркации.

4. Темп изменения бифуркационного значения параметра нелинейности  $K_0$  с ростом диффузии  $D$  тем больше, чем выше порядок ветви бифуркационной диаграммы.

Авторы выражают благодарность А.М.Тимохину за ценные советы математического характера.

### Библиографический список

1. Татаркова С.А., Тучин В.В. Механизмы бифуркаций, структура и свойства хаотических аттракторов в модели лазера с насыщающимся поглотителем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т.3, № 6. С. 24.
2. Кивелева К.В., Фрайман Л.А. Бифуркационный анализ нелинейной

динамики неавтономной системы маятникового типа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 4, 5. С. 13.

3. Баженов М.В., Рабинович М.И., Рубчинский Л.Л. Простая модель нейрона, обладающего сложной осцилляторной активностью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 1. С. 33.

4. Новые физические принципы оптической обработки информации / Под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990. С. 263.

5. Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu., Larichev A.V., Zheleznykh N.I. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatio-temporal structures // Opt. Soc. Am. 1992. Vol. 9, № 1. P. 78.

6. Воронцов М.А. Нелинейная волновая пространственная динамика световых полей // Изв. РАН. Сер. Физическая. 1992. Т. 56, № 4. С. 7.

7. Ларичев А.В., Николаев И.П., Шмальгаузен В.И. Жесткий режим возбуждения в нелинейной оптической системе с распределенной обратной связью // Квантовая электроника. 1996. Т. 23, № 3. С. 255.

8. Larichev A.V., Nikolaev I.P., Chulichkov A.L. Spatio-temporal period doubling in a nonlinear interferometer with distributed optical feedback // Opt. Lett. 1996. Vol. 21, № 15. P. 1180.

9. Papoff F., D'Alessandro G., Oppo G.-L., Firth W.J. Local and global effects of boundaries on optical-pattern formation in Kerr media // Phys. Rev. 1994. Vol. 48, № 1. P. 634.

10. Arecci F.T. Space-time complexity in nonlinear optics // Physica D. 1991. Vol. 51. P. 450.

11. Аршинов А.И., Мударисов Р.Р., Поизнер Б.Н. Тройка керровских сред в кольцевом интерферометре: роль неидентичности // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т.3, № 1. С. 20.

12. Магазинников А.Л. Бифуркационная диаграмма стационарных состояний нелинейного оптического интерферометра с двумерной обратной связью / ТГУ. Томск, 1997. 9 с. Деп. в ВИНТИ 1.08.97. № 2575-В97.

13. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. М.: Наука, 1994. 239 с.

14. Воронцов М.А., Корябин А.В., Шмальгаузен В.И. Управляемые оптические системы. М.: Наука, 1989. С. 216.

15. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. С. 34.

16. Аршинов А.И., Мударисов Р.Р., Поизнер Б.Н. Механизм формирования структур в нелинейном интерферометре Физо: роль двумерности и понятие бифуркационного портрета // Изв. вузов. Физика. 1997. Т.4, № 3. С. 10.

Томский государственный  
университет

Поступила в редакцию 6.01.98  
после переработки 2.04.98

## BIFURCATION DIAGRAM IN CASE OF RING INTERFEROMETER CONTAINING LIQUID CRYSTAL: EFFECT OF DIFFUSION

A.L. Magazinnikov, B.N. Poizner

The bifurcation phenomena in optical ring interferometer containing nonlinear (Kerr) medium – liquid crystal – are investigated by means of a computer simulation. It has been found out that bifurcation points on a bifurcation diagram are displaced to area of greater parameter of medium nonlinearity when the diffusion factor increases. The distribution of intensity in cross section of output laser beam of system is constructed for the more evident description of hysteresis and bifurcations phenomena.



*Магазинников Антон Леонидович* – родился в 1974 году в Томске. Окончил с отличием радиофизический факультет ТГУ (1997). В настоящее время является аспирантом кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Области научных интересов: оптическая синергетика, моделирование процессов оптического формообразования. Автор 3 работ по данной тематике.



*Пойзнер Борис Николаевич* – родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Имеет много статей по указанной тематике. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучаемого»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов.



Вышел в свет журнал

ISSN: 1026-0226 DDNSFA

**DISCRETE DYNAMICS IN NATURE AND SOCIETY**

**An International Multidisciplinary Research and Review Journal**

**Editors-in-Chief**

Vladimir Gontar and Michael Sonis

**Contents**

Vol. 1, N 4 (1998) 243–320

Predictability Problems of Global Change as Seen through Natural Systems Complexity Description: 1. General Statements. <i>V.V. Kozoderov, V.A. Sadovnichii, S.A. Ushakov and O.A. Timoshin</i> . . .	243
Predictability Problems of Global Change as Seen through Natural Systems Complexity Description: 2. Approach. <i>V.V. Kozoderov, V.A. Sadovnichii, S.A. Ushakov and O.A. Timoshin</i> . . . . .	255
Necessary and Sufficient Conditions for Oscillations of Linear Delay Partial Difference Equations. <i>B.G. Zhang and S.T. Liu</i> . . . . .	265
Discrete Dynamics in Transitional Economies. <i>J.B. Rosser, Jr. and M.V. Rosser</i> . . . . .	269
Nonlinear Feedback Control of Spatiotemporal Chaos in Coupled Map Lattices. <i>J.-Q. Fang and M.K. Ali</i> . . . . .	283
Absorbers: Definitions, Properties and Applications. <i>G. Belitskii</i> . . . . .	307
Book Review . . . . .	315

