



## ДИНАМИКА ВНЕОСЕВОГО ГАУССОВА ПУЧКА С АСТИГМАТИЗМОМ И КРУЧЕНИЕМ В ПРОЗРАЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНОВОДНОЙ СРЕДЕ

*Л.А. Мельников, В.Л. Дербов, А.И. Быченков*

С помощью модификации обобщенного метода моментов построена конечномерная динамическая модель, описывающая распространение разъюстированного астигматического гауссова пучка с кручением в аксиально симметричной нелинейной среде. Обнаружен ряд нетривиальных особенностей динамики пучка в параболическом волноводе с керровской нелинейностью (синхронизация переменных, рождение циклов, изменение симметрии тора и др.).

### Введение

Моделирование внеосевых пучков в поперечно–неоднородных нелинейных средах является необходимым элементом корректного описания лазеров и оптических волноводов при наличии разъюстировки [1–6]. Подобная задача разрешима аналитически лишь в упрощенной постановке, например такой, как в [7], где использовано безабберационное приближение, специальные граничные условия и частный вид восприимчивости.

Используя идеи обобщенного модифицированного метода моментов [8–10], удастся описать волновой пучок в аксиально–симметричной среде с произвольно зависящей от поля восприимчивостью при наличии астигматизма, отклонения от оси и кручения, системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Динамическими переменными являются усредненные по сечению параметры пучка (моменты), зависящие от продольной координаты. Осуществляемое таким образом сведение распределенной системы к конечномерной динамической системе позволяет применять к ней стандартные методы анализа. Для нелинейной динамики актуальной задачей является поиск новых физически содержательных моделей с нетривиальным поведением. Целью настоящей работы является построение такой модели в оптике обобщенных гауссовых пучков и анализ ее динамических свойств.

В разделе 1 выведены обыкновенные дифференциальные уравнения для параметров пучка. Раздел 2 посвящен анализу динамики обобщенного гауссова пучка со сдвигом и кручением в среде с квадратичной неоднородностью и керровской нелинейностью при условии, что мощность ниже порога самофокусировки. В разделе 3 проводится обсуждение результатов.

## 1. Построение динамической системы

Распространение пучка будем описывать с помощью скалярного параболического уравнения для комплексной амплитуды электрического поля  $\psi$  [11] в безразмерных переменных

$$\hat{H}\psi = [4i\partial/\partial z + \nabla_{\perp}^2 + \chi]\psi = 0, \quad (1)$$

где  $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ , поперечные координаты  $x, y$  нормированы на характерный радиус пучка  $a$ ; продольная координата  $z$  – на соответствующую дифракционную длину  $L = ka^2/2$ ,  $k = n_0\omega/c$  – волновое число,  $n_0$  – показатель преломления линейной однородной среды;  $\chi = \chi' + i\chi''$  – часть восприимчивости среды, зависящая от координат за счет неоднородности среды и от поля за счет нелинейности. Приближенное решение уравнения (1) ищем в виде обобщенной гауссовской моды

$$\psi_0 = A \exp[-(P_{1,2}^{(2)}(x, y) + iP_2^{(2)}(x, y))], \quad (2)$$

где  $P_{1,2}^{(2)}$  – положительно определенные квадратичные формы общего вида относительно лабораторных координат  $x$  и  $y$  с коэффициентами, зависящими от продольной координаты  $z$ .

Преобразованием координат

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi + x_0, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi + y_0, \quad (3)$$

$$x'' = x \cos \theta + y \sin \theta + x_1, \quad y'' = -x \sin \theta + y \cos \theta + y_1 \quad (4)$$

каждая из форм приводится к диагональному виду

$$\psi_0 = A \exp[-(\eta x'^2 + \beta y'^2 + i\xi x''^2 + i\epsilon y''^2)]. \quad (5)$$

Из (5) видно, что линии равной интенсивности и равной фазы в плоскости  $xOy$  лабораторной системы координат представляют собой эллипсы с центрами в точках  $(x_l = -x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi, y_l = -x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)$  и  $(x_p = -x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta, y_p = -x_1 \sin \theta - y_1 \cos \theta)$  с главными осями, повернутыми на углы  $\varphi$  и  $\theta$ , соответственно. Динамические переменные  $\eta$  и  $\beta$  суть обратные квадраты полуосей эллипса равной интенсивности на уровне  $e^{-1}$  от максимума, а  $\xi$  и  $\epsilon$  определяют кривизну волнового фронта в сечениях плоскостями  $(x''O''z)$  и  $(y''O''z)$ , где  $O''x''$  и  $O''y''$  – главные оси эллипса равной фазы. Кроме перечисленных переменных, пучок описывается интенсивностью в максимуме  $I = |\psi_0(x'=0, y'=0)|^2 = |A|^2$  и набегом фазы на оси.

Для определения зависимости перечисленных динамических переменных от  $z$ , воспользуемся обобщенным модифицированным методом моментов [8–10]. Наилучшее приближенное решение (5) уравнения (1) ищется из условия ортогональности невязки  $H\psi_0$  некоторому ортонормированному набору заданных функций (мод). Специфика подхода [8–10] заключается в использовании гибких мод, параметры которых сами являются искомыми функциями  $z$ . Это позволяет резко уменьшить необходимое число базисных функций. В нашем случае последние удобно выбрать в виде [1, 2]  $|m, n\rangle \equiv |m\rangle_x |n\rangle_y$ , где

$$|0\rangle_x = N_x \exp[-\eta x'^2 - i\xi x''^2], \quad |1\rangle_x = x'(4\eta)^{1/2} |0\rangle_x, \quad |2\rangle_x = [(1-4\eta x'^2)/2] |0\rangle_x, \quad (6)$$

$$|0\rangle_y = N_y \exp[-\beta y'^2 - i\epsilon y''^2], \quad |1\rangle_y = y'(4\beta)^{1/2} |0\rangle_y, \quad |2\rangle_y = [(1-4\beta y'^2)/2] |0\rangle_y. \quad (7)$$

Скалярное произведение определим как

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \phi dx dy. \quad (8)$$

При таком определении разумно вести дальнейшие расчеты в системе  $x'O'y'$ , диагонализующей вещественную часть показателя гауссовой экспоненты, что приводит к факторизации интегралов по поперечным координатам.

Каждое из условий ортогональности  $\langle mn|\hat{H}\psi_0\rangle=0$ , где  $mn=00,01,10,11,20,02$ , дает уравнение, включающее динамические переменные пучка, их производные по продольной координате и интегралы по поперечным координатам, легко вычисляемые явно. Вместо переменных сдвига  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  удобно ввести

$$x_l = -x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi, \quad y_l = -x_0 \sin\varphi - y_0 \cos\varphi,$$

$$\alpha = \xi((x_p - x_l)\cos\theta + (y_p - y_l)\sin\theta), \quad \gamma = \varepsilon((x_p - x_l)\sin\theta - (y_p - y_l)\cos\theta),$$

имеющие ясный физический смысл:  $x_l, y_l$  показывают положение центра пятна в лабораторной системе координат, а  $\alpha, \gamma$  – средний наклон пучка. Обозначая через  $\delta = \varphi - \theta$  угол поворота пятна относительно фазового фронта, окончательно получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для динамических переменных.

$$dI/dz = I[\xi + \varepsilon - \langle 20|\chi''|00\rangle/(2 \cdot 2^{1/2}) - \langle 02|\chi''|00\rangle/(2 \cdot 2^{1/2}) - \langle 00|\chi''|00\rangle/2], \quad (9)$$

$$d\eta/dz = \eta[2(\xi \cos^2\delta + \varepsilon \sin^2\delta) - \langle 20|\chi''|00\rangle/2^{1/2}], \quad (10)$$

$$d\beta/dz = \beta[2(\xi \sin^2\delta + \varepsilon \cos^2\delta) - \langle 02|\chi''|00\rangle/2^{1/2}], \quad (11)$$

$$d\xi/dz = \xi^2 - \eta^2 \cos^2\delta - \beta^2 \sin^2\delta + [\eta \langle 20|\chi''|00\rangle \cos^2\delta + \beta \langle 02|\chi''|00\rangle \sin^2\delta]/2^{1/2} + (\eta\beta)^{1/2}/2 \langle 11|\chi''|00\rangle \sin 2\delta, \quad (12)$$

$$d\varepsilon/dz = \varepsilon^2 - \eta^2 \sin^2\delta - \beta^2 \cos^2\delta + [\eta \langle 20|\chi''|00\rangle \sin^2\delta + \beta \langle 02|\chi''|00\rangle \cos^2\delta]/2^{1/2} - (\eta\beta)^{1/2}/2 \langle 11|\chi''|00\rangle \sin 2\delta, \quad (13)$$

$$d\varphi/dz = (\sin 2\delta)(\eta + \beta)(\varepsilon - \xi)/[2(\eta - \beta)] + (\eta\beta)^{1/2} \langle 11|\chi''|00\rangle/[2(\eta - \beta)], \quad (14)$$

$$d\theta/dz = (\sin 2\delta)(\beta^2 - \eta^2)/[2(\xi - \varepsilon)] - (\eta\beta)^{1/2} \langle \cos 2\delta \rangle \langle 11|\chi''|00\rangle/[2(\xi - \varepsilon)] - (\sin 2\delta)[\beta \langle 02|\chi''|00\rangle - \eta \langle 20|\chi''|00\rangle]/[2 \cdot 2^{1/2}(\xi - \varepsilon)], \quad (15)$$

$$dx_l/dz = \alpha \cos\theta + \gamma \sin\theta + \sin\varphi \langle 01|\chi''|00\rangle/(4\beta^{1/2}) - \cos\varphi \langle 10|\chi''|00\rangle/(4\eta^{1/2}), \quad (16)$$

$$dy_l/dz = \alpha \sin\theta - \gamma \cos\theta - \cos\varphi \langle 01|\chi''|00\rangle/(4\beta^{1/2}) - \sin\varphi \langle 10|\chi''|00\rangle/(4\eta^{1/2}), \quad (17)$$

$$d\alpha/dz = -\gamma d\theta/dz + \eta^{1/2} \cos\delta \langle 10|\chi''|00\rangle/4 - \beta^{1/2} \sin\delta \langle 01|\chi''|00\rangle/4 - \xi \sin\delta \langle 01|\chi''|00\rangle/(4\beta^{1/2}) + \xi \cos\delta \langle 10|\chi''|00\rangle/(4\eta^{1/2}), \quad (18)$$

$$d\gamma/dz = \alpha d\theta/dz - \eta^{1/2} \sin\delta \langle 10|\chi''|00\rangle/4 - \beta^{1/2} \cos\delta \langle 01|\chi''|00\rangle/4 - \varepsilon \cos\delta \langle 01|\chi''|00\rangle/(4\beta^{1/2}) - \varepsilon \sin\delta \langle 10|\chi''|00\rangle/(4\eta^{1/2}). \quad (19)$$

Для ряда практически интересных случаев, один из которых будет рассмотрен ниже, интегралы от восприимчивости по поперечным координатам берутся аналитически, что делает численное решение полученной системы уравнений особенно простым. В данной работе, однако, хотелось бы подчеркнуть не вычислительные достоинства предложенной схемы, а возможность динамического анализа с использованием как аналитических, так и численных методов.

## 2. Динамика пучка

Рассмотрим аксиально-симметричную волноводную среду с параболическим поперечным профилем линейного показателя преломления и нелинейной восприимчивостью керровского типа

$$\chi' = -\chi_0 r^2 / R_0^2 + \chi_{nl} |\psi|^2,$$

где  $\chi_0$  и  $R_0$  характеризуют величину и радиус неоднородности линейного показателя преломления, а  $\chi_{nl}$  – нелинейную восприимчивость среды,  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Интегралы по поперечным координатам от восприимчивости в этом случае берутся аналитически

$$\langle 01 | \chi' | 00 \rangle = \chi_0 (x_i \sin \phi - y_i \cos \phi) / (R_0^2 \beta^{1/2}), \quad \langle 10 | \chi' | 00 \rangle = -\chi_0 (x_i \cos \phi + y_i \sin \phi) / (R_0^2 \eta^{1/2}),$$

$$\langle 11 | \chi' | 00 \rangle = 0, \quad \langle 02 | \chi' | 00 \rangle = [\chi_0 / R_0^2] / (2 \cdot 2^{1/2} \beta) + I \chi_{nl} / (4 \cdot 2^{1/2}),$$

$$\langle 20 | \chi' | 00 \rangle = [\chi_0 / R_0^2] / (2 \cdot 2^{1/2} \eta) + I \chi_{nl} / (4 \cdot 2^{1/2}).$$

Как видно из уравнений (9)–(19), даже в оптически линейной среде динамическая система остается нелинейной. Поэтому для формального определения класса, к которому относится система (консервативная/ диссипативная), получим выражение для дивергенции вектора фазовой скорости  $\mathbf{F}'$  (его координаты суть правые части уравнений (9)–(19))

$$\text{div}(\mathbf{F}') = \text{Sp}(J) = 5\varepsilon + 5\xi + (\cos 2\delta) \langle (\eta + \beta)(\varepsilon - \xi) / (\eta - \beta) - (\beta^2 - \eta^2) / (\xi - \varepsilon) + (\beta - \eta) / [8(\varepsilon - \xi)] \rangle I \chi_{nl},$$

где  $J$  – матрица Якоби.

На рис. 1 представлен результат расчета расстояний по  $z$  между соседними нулями (с номерами  $i$  и  $i-1$ ) интеграла  $\int_0^z \text{div}(\mathbf{F}') dz$ . Полученная зависимость оказывается сложной, но периодической, поэтому усредненное по продольной координате  $z$  значение дивергенции равно нулю, и система консервативна.

Заметим, что рассматриваемая динамическая система, в общем случае 11-мерная, для восприимчивости предложенного выше вида редуцируется в 7-мерную. Это возможно из-за отщепления группы уравнений для переменных пространственной локализации пучка  $x_i, y_i, \alpha, \gamma$ . При этом уравнения (16), (17) легко разрешимы аналитически.

Начальное условие  $\delta=0$ , в частности, приводит к еще большему упрощению системы (она становится 5-мерной) и, кроме того, такая редукция проявляется как специфическая особенность динамики пучка: решения для  $\phi$  и  $\theta$  есть константы, что отвечает распространению пучка с неизменной ориентацией пятна и фазового

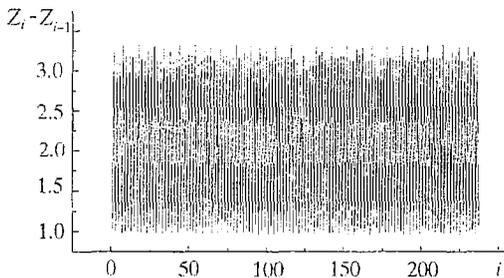


Рис. 1. Зависимость расстояний по  $z$  между соседними нулями с порядковыми номерами  $i$  и  $i-1$  интеграла  $\int_0^z \text{div}(\mathbf{F}') dz$

фронта относительно лабораторной системы координат. Более того, уравнения для  $\alpha, \gamma$  в этом случае также имеют гармонические решения. Периоды получаемых решений, как и для переменных  $x_i, y_i$  в общем случае, совпадают и равны  $T = 4\pi R_0 / \chi_0^{1/2}$ .

**2.1. Стационарное решение.** Как легко видеть из полученной системы уравнений, условия стационарного распространения пучка имеют вид  $\delta=0, \eta=\beta = I \chi_{nl} / 16 + [I^2 \chi_{nl}^2 / 16^2 + \chi_0 / (4R_0^2)]^{1/2}, \varepsilon=\xi=0$ .

Относительно малая размерность редуцированной таким образом системы позволяет исследовать ее устойчивость аналитически.

Собственные значения матрицы Якоби на стационарном решении (показатели Ляпунова являются действительными частями этих величин) имеют вид

$$\lambda_1=0,$$

$$\lambda_{2,3} = \pm i\chi_0^{1/2}/R_0,$$

$$\lambda_{4,5} = \pm i(I\chi_{nl}\eta/4 + \chi_0/R_0^2)^{1/2}.$$

Обращение в нуль показателей Ляпунова свидетельствует о бифуркационной ситуации. Действительно, в каждой точке фазового пространства, соответствующей стационарному решению, матрица Якоби имеет чисто мнимые собственные значения, что отвечает бифуркации Андронова – Хопфа рождения автоколебательного режима для фазовых переменных. Учитывая устойчивый характер возникающих колебаний (что будет доказано ниже), собственные значения для «мягких» бифуркаций этого типа имеют, как известно, следующую структуру:  $\lambda = \pm i\omega$ , где  $\omega$  – частота порожденных колебаний.

Следует отметить особенность системы, в которой отражается ее консервативный характер. Если начальное значение  $\eta$  больше «стационарного», то оно будет верхней границей множества значений этой переменной, меньше – нижней. Это наблюдение справедливо как для линейной, так и для нелинейной среды.

**2.2. Периодическое и квазипериодическое решения.** Без явного вычисления матрицы монодромии  $Y$  мультипликаторы периодического решения при  $\chi_{nl}=0$  можно найти, сопоставив периоды колебаний фазовых переменных исходной системы (9)–(19) и ее линейризованного аналога, – они оказываются равными. Далее используя равенство, связывающее решение линейризованной системы  $y(z)$  через период исходной  $y(z+T)=Y(T)y(z)$ , легко видеть, что матрица  $Y(T)$  – единичная, мультипликаторы полученного периодического решения равны 1 и режим орбитально устойчив. Таким образом, система порождает устойчивые колебания с двумя характерными периодами  $T_1=2\pi R_0/\chi_0^{1/2}$  и  $T_2=2T_1$ .

Важно отметить, что при  $\chi_{nl}\neq 0$  возникает явная зависимость  $\lambda_{4,5}$  от фазовых переменных в точке бифуркации, свидетельствующая о переходе к квазипериодическому режиму. Физически это связано с наличием нелинейной связи (взаимной модуляции) фазовых переменных и характеризуется появлением некратных частот. В общем случае присутствует еще один фактор, объясняющий причины квазипериодичности нелинейного режима, – ангармонический фазовый сдвиг, возникающий при наличии начального кручения (поворот за квазипериод  $\delta$  и  $\phi$  не кратен  $2\pi$ ).

Особенности нелинейной динамики пучка наиболее наглядно могут быть продемонстрированы с помощью анализа соответствующих сечений фазовых траекторий системы и отображений Пуанкаре. Начнем с демонстрации характерных эффектов, возникающих при распространении пучка без кручения ( $\delta=0$ ).

Рассмотрим пучок, начальные значения фазовых переменных для которого равны

$$I=50, \eta=0.7, \beta=0.5, \varepsilon=-0.4, \xi=-0.1, x_l=0.02, y_l=0.01, \alpha=0.01, \gamma=-0.01,$$

распространяющийся в волноводной среде с параметрами  $\chi_0=5$ ,  $R_0=1.5$  при различных  $\chi_{nl}$ .

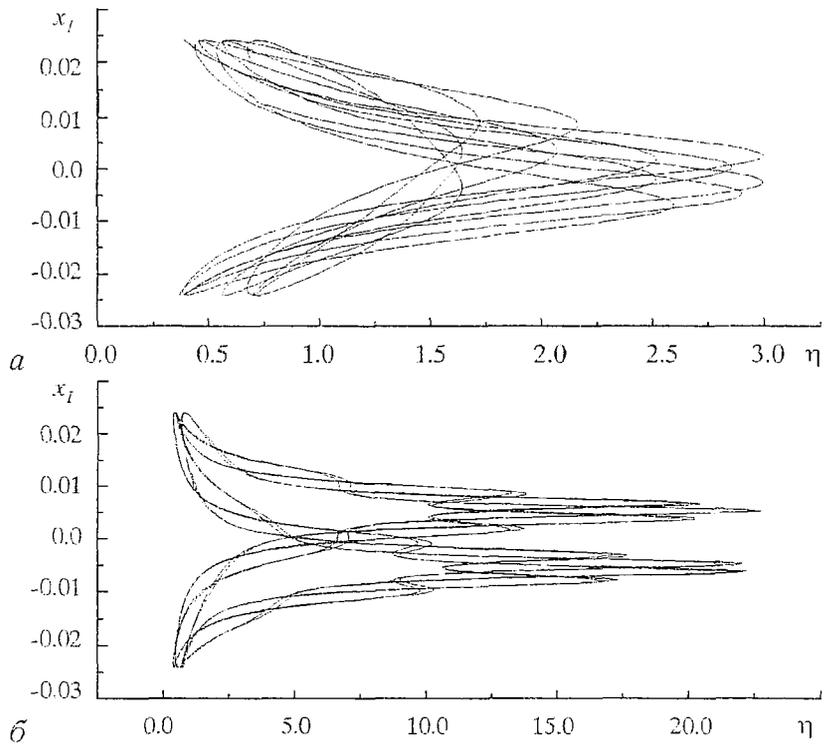


Рис. 2. Синхронизация и регуляризация относительного фазового сдвига  $(\eta, x_I)$  с ростом  $\chi_{nj}$ ;  $a - 0.05$ ;  $\delta - 0.095$

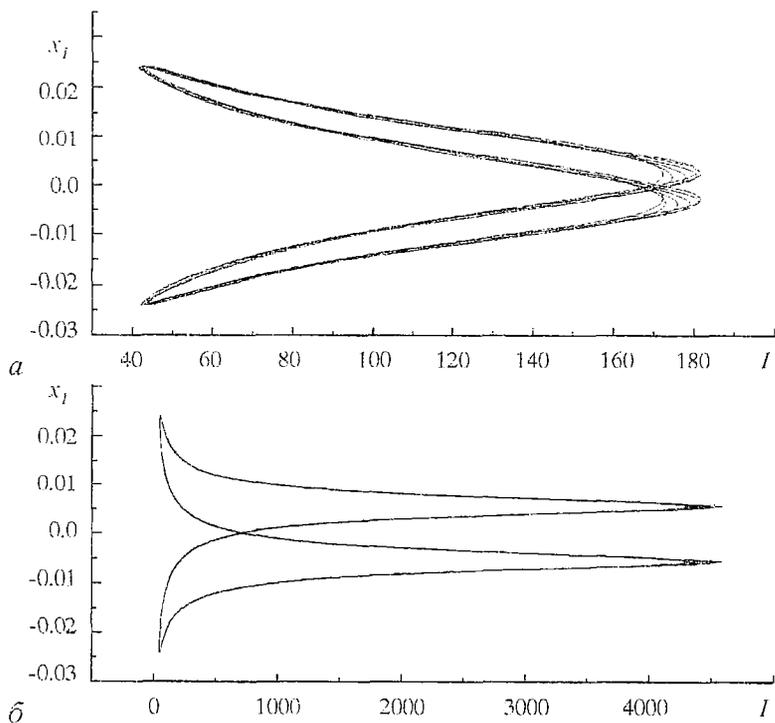


Рис. 3. Синхронизация динамических переменных  $(I, x_I)$  при различных  $\chi_{nj}$ ;  $a - 0.05$ ;  $\delta - 0.1$

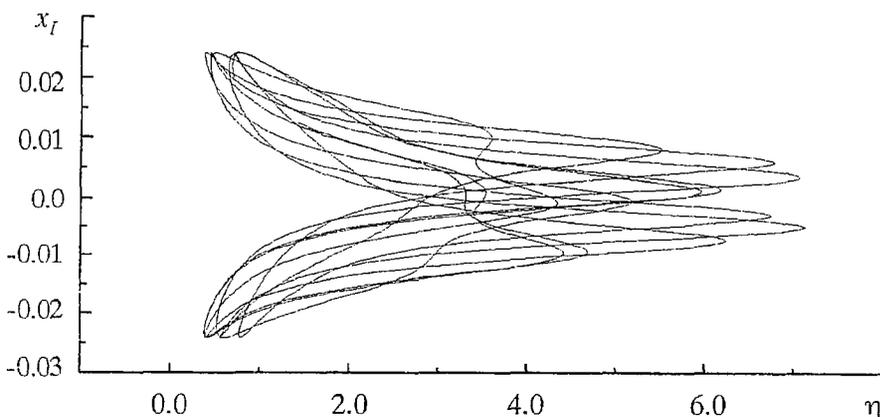


Рис. 4. Неустойчивость фазового сдвига  $(\eta, x_l)$  в точке  $\chi_{nl}=0.08$

Наиболее типично явление взаимной синхронизации переменных, наблюдаемое в системе при различных значениях показателя нелинейности  $\chi_{nl} \in (0.08, 0.095)$ . С помощью фазовых портретов (рис. 2, 3) легко фиксируется синхронизация переменных пространственной локализации с «собственными» характеристиками пучка (размер пятна, кривизна волнового фронта, интенсивность и т.д.).

Несколько неожиданным является эффект неустойчивости фазового сдвига, возникающий вблизи точки синхронизации переменных  $(\eta, x_l)$  (рис. 4). Здесь под неустойчивостью понимается не стохастизация поведения разности фаз, а ситуация, когда ее значения покрывают интервал  $(0, \pi)$  за достаточно малое число квазициклов.

Взаимная модуляция переменных системы, о которой говорилось выше, приводит с ростом показателя нелинейности к генерации новых циклов. Более наглядно это явление можно продемонстрировать в проекции фазовой траектории на плоскость  $(\eta, \xi)$  (рис. 5).

Возможность учета начальной разбюстировки позволяет рассмотреть более общий случай распространения пучка в нелинейной волноводной среде. Оказывается, что особенности динамики пучка без разбюстировки, касающиеся процесса синхронизации, сохраняются. Однако, для других нелинейных эффектов наблюдается ряд качественных отличий.

Сопоставляя рис. 4 и 6, прежде всего, следует отметить, что для пучка с ненулевым кручением  $\delta$  «вырождение» по фазовому сдвигу динамических переменных  $(\eta, x_l)$  снимается при любом физически разумном значении показателя нелинейности. Кроме того, рождение циклов, по-существу, прекращается,

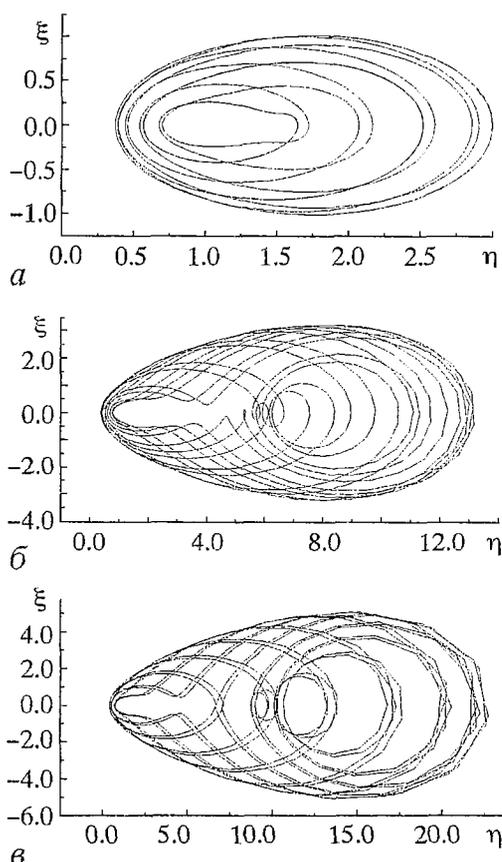


Рис. 5. Рождение новых циклов в сечении  $(\eta, \xi)$  для различных  $\chi_{nl}$ : а - 0.05; б - 0.09; в - 0.095

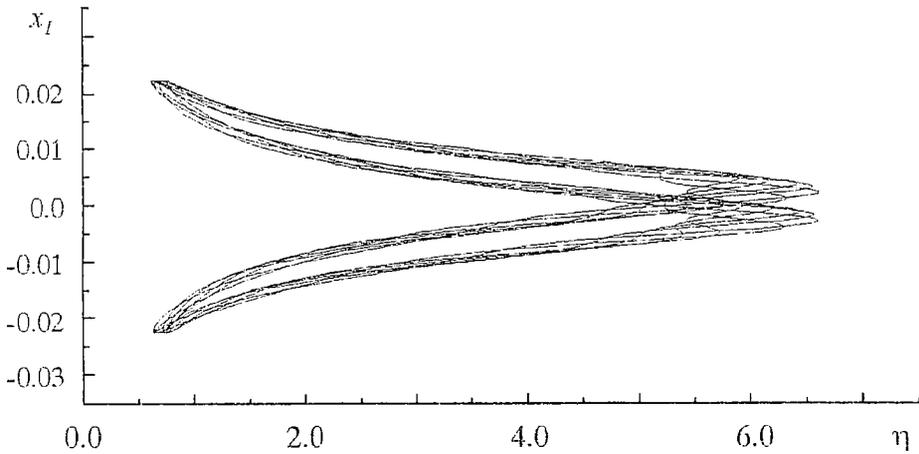


Рис. 6. Фазовый сдвиг  $(\eta, x_I)$  при  $\chi_{nl}=0.08$  для пучка с  $\delta \neq 0$  («вырождение» снимается)

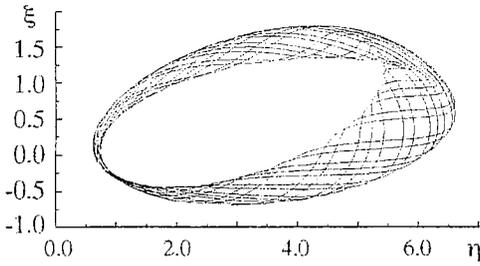


Рис. 7. Типичная картина в сечении  $(\eta, \xi)$  при  $\chi_{nl}=0.08$

и в системе наблюдается лишь слабая модуляция переменных по амплитуде (рис. 7).

Использование метода отображений Пуанкаре эффективно дополняет исследование нелинейных свойств построенной динамической системы. Разумно определять секущую квазиповерхность соотношением вида  $f_i = \text{const}$ , где переменная  $f_i$  выбирается так, чтобы полученное сечение имело легко интерпретируемый физический смысл. Для рассматриваемой здесь системы такой переменной является, очевидно,  $I$ .

Исследуем нелинейные свойства полученных уравнений с помощью отображения Пуанкаре на плоскость  $I = \text{const}$ .

В точке  $\chi_{nl}=0$  происходит бифуркация рождения тора из периодической фазовой траектории. В сечениях 10-мерного отображения Пуанкаре это отвечает возникновению некоторой замкнутой кривой из неподвижной точки (рис. 8, 1-й и 2-й столбцы). Вообще говоря, подобная бифуркация для отображений может трактоваться как бифуркация Андронова – Хопфа, когда из точки, соответствующей периодическому решению, рождается цикл, которому отвечает полученная инвариантная кривая.

При некоторых значениях  $\chi_{nl}$  возникает, как уже говорилось выше, устойчивое состояние, в котором всюду плотный тор вырождается в замкнутую кривую – наблюдается резонанс. Это соответствует резкому уменьшению числа точек отображения (при одном и том же количестве квазициклов) и позволяет фиксировать синхронизацию трех и более фазовых переменных, благодаря произвольному выбору функции, определяющей секущую квазиповерхность. На рис. 8 (3-й столбец) демонстрируются примеры таких резонансов.

В фазовом пространстве эффект рождения циклов представлен специфической динамикой инвариантного тора. Анализ отображения Пуанкаре в сечении  $(\epsilon, \xi)$  (рис. 9) показывает, что с ростом  $\chi_{nl}=0.08, 0.09, 0.095$  происходит сближение центров кривых – образующих тора, причем существует критическое значение  $\chi_{nl}=0.09$ , когда система изменяет свое состояние (см. рис. 9, б) с последующим переходом к симметричному (см. рис. 9, в).

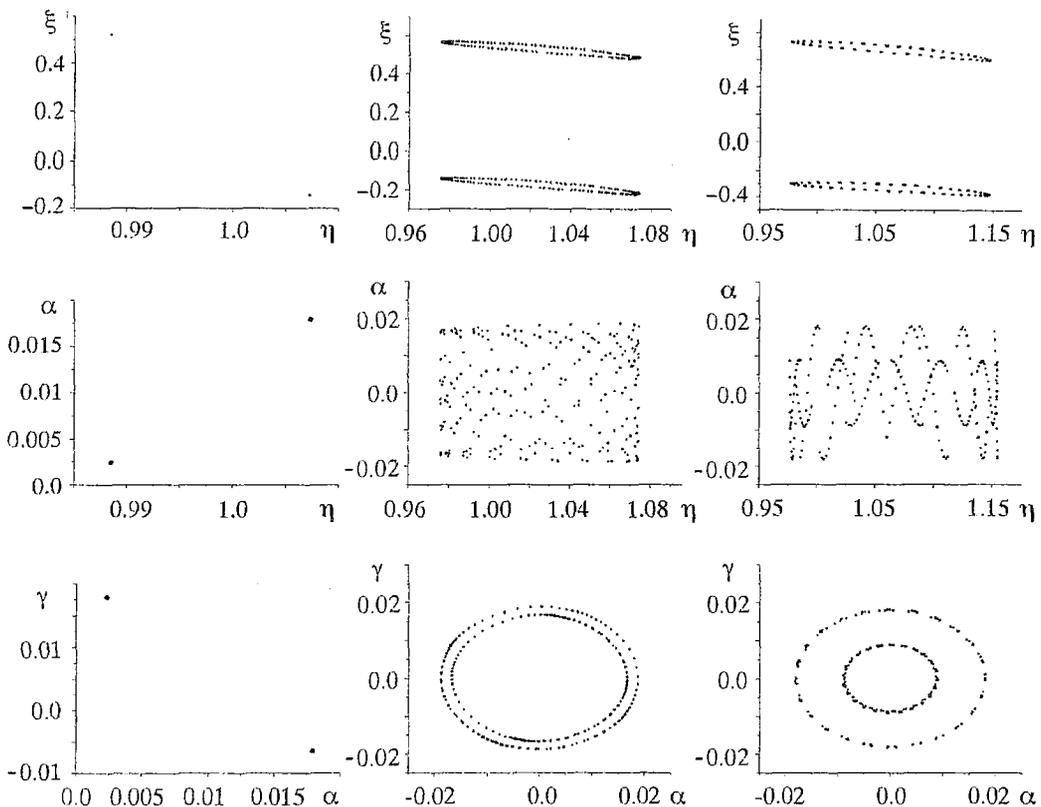


Рис. 8. Бифуркация Андронова – Хопфа для отображения Пуанкаре (1-й и 2-й столбцы); примеры нелинейных резонансов на торе (3-й столбец)

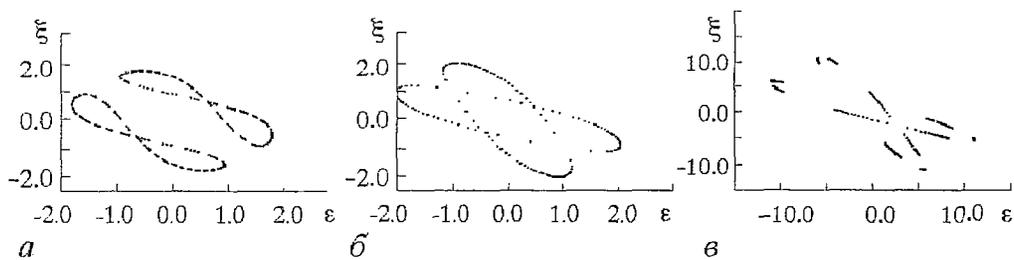


Рис. 9. Динамика тора в сечении  $(\epsilon, \xi)$ . Сближение образующих (а), переходное (б) и симметричное (в) состояния тора при  $\chi_H=0.08, 0.09, 0.095$ , соответственно

### Обсуждение результатов

С помощью обобщенного модифицированного метода моментов [8–10] нам удалось описать волновой пучок с кручением и сдвигом системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, правая часть которых содержит интегралы от восприимчивости среды и учитывает ее неоднородность и нелинейность. Осуществленное таким образом сведение распределенной системы к конечномерной дало возможность применить к ней стандартные методы динамики. Исследован ряд нетривиальных эффектов, связанных с особенностями поведения пучка в среде с параболическим поперечным профилем линейного показателя преломления и нелинейной восприимчивостью керровского типа, таких, как

синхронизация параметров, рождение новых циклов, изменение симметрии тора и ряда других.

Хорошо известно, что в средах с керровской нелинейностью пучки, ограниченные в обоих поперечных измерениях, при мощностях, превышающих некоторое пороговое значение, становятся неустойчивыми и претерпевают самофокусировку [12,13]. В параксиальной теории интенсивность пучка в точке самофокуса обращается в бесконечность, а размер пятна – в нуль; на опыте пучок может распадаться на нити и/или вызывать оптический пробой. Важно отметить, что наши расчеты выполнены для условий, когда пороговая мощность самофокусировки не достигается, и нелинейная рефракция дополняет фокусирующее действие градиента линсйного показателя преломления, не вызывая катастрофического коллапса пучка. За пределами данного исследования остались вопросы, связанные с флуктуациями среды и возмущающего поля и, следовательно, с мелкомасштабной самофокусировкой [12,14].

Представленный метод, первоначально задуманный и разработанный для упрощения численных расчетов, оказался интересным как источник новых динамических моделей. Принципиальным моментом является то, что в рамках этого подхода, в отличие от прямого численного решения, ряд результатов получен аналитически. В частности,

- определен класс, к которому относится система (консервативная/диссипативная);
- обнаружено, что динамика пространственной локализации пучка (сдвига и наклона) не оказывает влияния на «внутреннюю» динамику (пульсации и поворот пятна);
- установлено, что начальное условие  $\delta=0$  отвечает распространению пучка с неизменной ориентацией пятна и фазового фронта относительно лабораторной системы координат;
- определены периоды и квазипериоды решений;
- найдены условия стационарного распространения пучка (моды);
- исследована устойчивость стационарных решений.

Следует отметить, что область применения развиваемых здесь математических методов выходит за рамки классической теории распространения световых пучков. Хорошо известно, что уравнение распространения неаксиального пучка аналогично квантовому уравнению Шредингера для смещенного осциллятора, а его решение в виде гауссовой моды – волновой функции когерентного состояния осциллятора в координатном представлении [15]. Такие состояния являются перспективным объектом исследований в квантовой механике и квантовой оптике. Подобная аналогия предоставляет замечательную возможность использовать гауссов пучок в качестве физической модели квантово–оптических явлений, которая сочетает в себе наглядность интерпретации и простоту экспериментальной реализации.

С нелинейно–динамической точки зрения представляется интересным дальнейший анализ построенной системы уравнений для сред с различными типами неоднородности и нелинейности. В частности, предметом второй части настоящей работы, планируемой авторами, будет исследование динамических свойств пучков в диссипативных средах.

## Библиографический список

1. Casperson L.W. Gaussian light beams in inhomogeneous media // *Appl. Opt.* 1973. Vol. 12. 10. P. 2434.
2. Casperson L.W. Beam modes in nonlinear lens-like medium and cavities // *JOSA.* 1976. Vol. 66. 12. P. 1373.

3. Кукушкин В.Г. Разъюстированный лазерный резонатор с неоднородными оптическими элементами // Квантовая электроника. 1987. Т. 14. 2. С. 381.
4. Бекишев А.Я., Гримблатов В.М. Разъюстированный оптический резонатор с линзоподобной средой // Квантовая электроника. 1980. Т. 7. 6. С. 1168.
5. Бойцов В.Ф., Владимиров А.Г. Свойства кольцевого оптического резонатора с разъюстированной пространственно неоднородной средой // Оптика и спектроскопия. 1981. Т. 51. 4. С. 708.
6. Кучеров А.Н., Макашев Н.К., Устинов Е.В. Аппроксимация возмущений оптического пучка в условиях теплового самовоздействия // Квантовая электроника. 1995. Т. 22. 2. С. 187.
7. Goncharenko A.M., Logvin Yu.A., Samson A.M., Shapovalov P.S. and Turovets S.I. Ermakov – Hamiltonian systems in nonlinear optics of elliptic Gaussian beams // Physics Letters A. 1991. Vol. 160. P. 138.
8. Дербов В.Л., Мельников Л.А., Новиков А.Д. Новый метод расчета самовоздействия и его применение к анализу сдвига резонансов насыщенного поглощения в гауссовых пучках // Квантовая электроника. 1987. Т. 14. 12. С. 2529.
9. Дербов В.Л., Мельников Л.А., Новиков А.Д. Асимметрия резонансов насыщения за счет линзовых и апертурных эффектов при распространении внеосевых гауссовых пучков в нелинейной среде // Квантовая электроника. 1989. Т. 16. 8. С. 1652.
10. Derbov V.L., Melnikov L.A., Novikov A.D., Potapov S.K. Transverse pattern formation and spectral characteristics of cw light beams in resonant media : an improved numerical simulation technique and mode analysis // JOSA B. 1990. Vol. 7. С. 1079.
11. Виноградова М.В., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
12. Беспалов В.И., Таланов В.И. О нитевидной структуре света в нелинейных жидкостях // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3. С. 471.
13. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. 1(7). С. 118.
14. Пятахин М.В., Сучков А.Ф. Мелкомасштабная двумерная самофокусировка // ДАН СССР. 1988. Т. 299. С. 868.
15. Кривошильков С.Г., Сисакян И.Н. Когерентные состояния и распространение света в неоднородных средах // Квантовая электроника. 1980. Т. 7, № 3.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 5.06.97  
после переработки 9.02.98

## DYNAMICS OF AN OFF-AXIS GAUSSIAN BEAM WITH ASTIGMATISM AND TWIST IN A TRANSPARENT NONLINEAR WAVEGUIDE MEDIUM

L.A. Melnikov, V.L. Derbov, A.I. Bychenkov

Using the modified generalized moments method the equations of motion are derived for the parameters of a misaligned astigmatic twisted Gaussian beam in an axially symmetric nonlinear medium. Nontrivial features of the beam dynamics (e.g., phase locking, cycle generation, nonlinear symmetry change) in a parabolic waveguide with Kerr nonlinearity are revealed.



*Мельников Леонид Аркадьевич* – родился в 1949 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1971). С 1978 года – кандидат, с 1992 года – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики. С 1997 года заведующий кафедрой лазерной и компьютерной физики. Область научных интересов: физика лазеров, лазерная спектроскопия, лазерные и волоконно-оптические измерительные системы, оптическая гироскопия, нелинейная динамика лазеров и оптических систем, нелинейное распространение световых пучков и импульсов в волноводных и резонансных средах, лазеры сверхкоротких импульсов, поперечная нелинейная оптика. Автор более чем 100 научных публикаций, член Оптического общества Америки, Международного общества по оптической технике.



*Дербов Владимир Леонардович* – 1949 года рождения, окончил физический факультет СГУ (1972). После окончания аспирантуры работал в НИИ механики и физики при СГУ. Защитил кандидатскую диссертацию по теории взаимодействия интенсивных лазерных полей с многоуровневыми релаксирующими системами. С 1983 года – доцент кафедры теоретической физики, а с 1985 года по настоящее время – доцент кафедры оптики СГУ. Автор более 70 теоретических работ в области нелинейной лазерной спектроскопии молекул, нелинейной динамики распространения лазерных пучков и импульсов. В последние годы интенсивно исследует проблему геометрических фаз в лазерных и оптических динамических системах.



*Быченков Алексей Иванович* – 1974 года рождения, окончил физический факультет Саратовского университета. С 1996 года – аспирант кафедры лазерной и компьютерной физики СГУ. Круг научных интересов лежит в области задач нелинейной динамики световых пучков сложной пространственной структуры.