Изв.вузов «ПНД», т.6, № 2, 1998

УДК 616.036.22.001.573

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИЙ

Е.В. Мельникова

Представлена пространственно–временная модель распространения эпидемии в человеческом обществе. Рассмотрен вывод основных уравнений динамики модели. Приведены результаты аналитических исследований поведения системы на фазовой плоскости с обоснованием ограничений, налагаемых на скорость волны. В модели учитывается приобретение иммунитета к заболеванию и плотность населения, зависящая от пространственной координаты.

Нелинейность окружающего мира предопределяет сложности для понимания закономерностей биологических, социальных процессов и прогнозирования их развития. Применяемые сегодня методы статистического анализа не дают полной картины исследуемых процессов и не отвечают на все вопросы. Применение методов нелинейной динамики для анализа данной проблемы является попыткой проникнуть в сущность процесса и проследить его динамику при различных начальных условиях. Последнее важно для прогнозирования распространения эпидемий и эффективной борьбы с ними.

В настоящее время известны различные модели распространения эпидемий в биологических системах [1, 2] и в человеческом обществе [3, 4]. Целью подобных исследований является создание моделей, способных наиболее адекватно описывать реальные ситуации, несмотря на то, что точное описание является невозможным из–за сложности и уникальности каждого естественного процесса.

В данной работе представлена пространственно–временная модель распространения эпидемии в человеческом обществе, которая базируется на уравнении диффузии с локальной и нелокальной модами роста. Вывод динамического уравнения основан на ряде положений, отличных от использованных в классической работе Ю.М. Свирежева [3], что позволяет расширить область применения модели. Модель лишена громоздкости, присущей модели, построенной в [5], более удобна для анализа, адекватнее описывает реальный процесс и допускает расширение области исследования путем введения иммунитета к заболеванию и переменной плотности населения. Предполагается, что распространение заболевания происходит при контакте инфицированного человека со здоровым. Перенос инфекции обусловлен перемещением людей по территории.

1. Описание модели и вывод основного динамического уравнения.

Пусть место постоянного проживания человека характеризуется вектором **x**, а его местонахождение в данный момент времени – вектором **z**. Введем обозначения: $n(\mathbf{x})$ – плотность населения в точке; $f(\mathbf{x},\mathbf{z},t)$ – функция плотности вероятности нахождения в точке $\mathbf{z}$ в момент времени t человека, проживающего в точке $\mathbf{x}$; $U(\mathbf{x},t)$ – относительное количество зараженных людей, проживающих в точке $\mathbf{x}$, в момент времени t $(0 \le U(\mathbf{x},t) \le 1)$; относительное количество здоровых в этом случае выразится как $[1-U(\mathbf{x},t)]$. Тогда общее число людей, находящихся в точке $\mathbf{z}$ в момент времени t, определяется как

$$N(\mathbf{z},t)=\int_S n(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\mathbf{z},t)dS_x, \tag{1}$$

а количество инфицированных, находящихся в точке $\mathbf{z}$ в момент времени t, как

$$A(\mathbf{z},t)=\int_S n(\mathbf{x})U(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},\mathbf{z},t)dS_x. \tag{2}$$

Интегрирование означает, что мы учитываем людей, проживающих во всех точках рассматриваемой территории. Символ dS_x показывает, что при вычислении поверхностного интеграла интегрирование проводится по координатам постоянного места жительства $\mathbf{x}$.

Количество здоровых людей, проживающих в точке $\mathbf{x}$ и находящихся в точке $\mathbf{z}$ в момент времени t, определяется как

$$B(\mathbf{x},\mathbf{z},t)=n(\mathbf{x})(1-U(\mathbf{x},t))f(\mathbf{x},\mathbf{z},t). \tag{3}$$

Поскольку инфекция передается при контакте больного человека со здоровым, то количество заразившихся за время Δt, очевидно, будет пропорционально количеству здоровых, количеству больных и величине промежутка времени Δt. Поэтому количество людей, живущих в точке $\mathbf{x}$, но заразившихся в точке $\mathbf{z}$ за время Δt, выразится следующим образом:

$$\Delta A^*(\mathbf{x},\mathbf{z},t)=kB(\mathbf{x},\mathbf{z},t)A(\mathbf{z},t)\Delta t, \tag{4}$$

где k – коэффициент пропорциональности. Подставляя в (4) $B(\mathbf{x},\mathbf{z},t)$ из формулы (3) и переходя к относительному количеству заразившихся

$$\Delta U^*(\mathbf{x},\mathbf{z},t)=\Delta A^*(\mathbf{x},\mathbf{z},t)/n(\mathbf{x}), \quad \text{при } n(\mathbf{x})\neq 0$$

и

$$\Delta U^*(\mathbf{x},\mathbf{z},t)=0, \qquad \text{при } n(\mathbf{x})=0,$$

получаем

$$\Delta U^*(\mathbf{x},\mathbf{z},t)=k(1-U(\mathbf{x},t))f(\mathbf{x},\mathbf{z},t)A(\mathbf{z},t)\Delta t. \tag{5}$$

Понятно, что увеличение доли инфицированных людей, проживающих в точке $\mathbf{x}$, обусловленное контактами на всей территории проживания, есть

$$\Delta U(\mathbf{x},t)=\int_S \Delta U^*(\mathbf{x},\mathbf{z},t)dS_x. \tag{6}$$

Тогда, устремляя Δt к нулю, с учетом равенств (2), (5), (6) получим

$$\partial U(\mathbf{x},t)/\partial t = \int_{S_z} k(1-U(\mathbf{x},t))f(\mathbf{x},\mathbf{z},t) \int_{S_\psi} n(\psi)U(\psi,t)f(\psi,\mathbf{z},t)dS_\psi dS_z, \tag{7}$$

где ψ – векторная переменная интегрирования. Уравнение (7) описывает процесс распространения эпидемии во времени и в пространстве. В такой форме уравнение является очень сложным для исследования, поэтому преобразуем его. Для этого сделаем некоторые упрощающие предположения.

Будем полагать, что область расселения людей является бесконечно протяженной, плотность населения везде одинакова ($n(\mathbf{x})=n_0=\text{const}$), функция плотности вероятности $f(\mathbf{x},\mathbf{z},t)$ не зависит от времени, а зависит от расстояния между точками $\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{z}$. С учетом сделанных предположений уравнение (7) будет иметь вид

$$\partial U(\mathbf{x},t)/\partial t = k(1-U(\mathbf{x},t)) \int_{-\infty}^{\infty} f(|\mathbf{y}|) n_0 [\int_{-\infty}^{\infty} U(\psi,t) f(|\psi-\mathbf{z}|) d\psi] d\mathbf{z}. \quad (8)$$

С целью получения возможности аналитического исследования эпидемической модели рассмотрим **одномерный случай**. Сначала преобразуем внутренний интеграл, считая, что $U(\psi,t)$ дифференцируема по пространственной координате. Разложим $U(\psi,t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z. Пренебрегая высшими членами разложения (то есть считая, что вероятность передвижения людей на расстояния, на которых происходит значительные изменения $U(z,t)$, пренебрежимо мала), получим

$$A(z,t) = n_0 \int_{-\infty}^{\infty} [U(z,t) + (\partial U(z,t)/\partial y) y + {}^1/_2 (\partial^2 U(z,t)/\partial^2 y) y^2] f(|y|) dy =$$

$$= n_0 [U(z,t) + (\partial U(z,t)/\partial y) \int_{-\infty}^{\infty} y f(|y|) dy + {}^1/_2 (\partial^2 U(z,t)/\partial^2 y) \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(|y|) dy].$$

Обозначая

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(|y|) dy, \quad (9)$$

получим

$$A(z,t) = n_0 [U(z,t) + (\gamma/2)(\partial^2 U(z,t)/\partial z^2)]. \quad (10)$$

Подставляя (10) в уравнение (8), записанное для одномерного случая, получим

$$\partial U(x,t)/\partial t = k(1-U(x,t)) \int_{-\infty}^{\infty} A(z,t) f(|y|) dz. \quad (11)$$

Проведя аналогичные преобразования оставшегося интеграла, получим

$$\partial U(x,t)/\partial t = k(1-U(x,t))[A(x,t) + (\gamma/2)(\partial^2 A(x,t)/\partial x^2)]. \quad (12)$$

Подставим (10) в (12) и, полагая $\gamma^2 \ll \gamma$, получим уравнение (12) в виде

$$\partial U(x,t)/\partial t = k n_0 (1-U(x,t))[U(x,t) + \gamma(\partial^2 U(x,t)/\partial x^2)]. \quad (13)$$

Вводя новый масштаб времени $t_1 = k n_0 t$, окончательно получим

$$\partial U(x,t_1)/\partial t = \gamma[1-U(x,t_1)](\partial^2 U(x,t_1)/\partial x^2) + [1-U(x,t_1)]U(x,t_1). \quad (14)$$

Здесь γ – коэффициент, отражающий перемещение людей по территории. Индекс в переменной t_1 будем в дальнейшем опускать.

Следует отметить, что в двумерном случае с помощью аналогичных преобразований исходное уравнение (7) можно привести к виду

$$\partial U/\partial t = \gamma(1-U)\nabla^2 U + (1-U)U, \quad (15)$$

где $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ – оператор Лапласа.

Краевые условия к уравнению (14) сформулируем в виде

$$\begin{aligned} &U(x\to\infty, t) = 0, \\ &U(x\to-\infty, t) = \mathrm{C} = \mathrm{const}. \end{aligned} \quad (16)$$

Начальные условия во всех случаях будем полагать следующими: $U(x, 0) = 0$ всюду кроме небольшой области Δx, являющейся очагом заражения.

Уравнение (14) является уравнением диффузии с локальной и нелокальной модами роста [6]. Члены уравнения, соответствующие нелокальной моде роста, содержат частные производные второго порядка по координате и описывают увеличение количества зараженных, обусловленное контактами с инфицированными, проживающими в других точках территории. То есть, именно наличие этих членов отражает распространение инфекции вдоль пространственной координаты.

2. Случай излечимой болезни без приобретения иммунитета

Введем коэффициент b, отражающий скорость выздоровления. Уравнение (14) примет вид

$$\partial U(x,t)/\partial t = [1-U(x,t)][\gamma(\partial^2 U(x,t)/\partial x^2)+U(x,t)] - bU(x,t). \tag{17}$$

Исследуем аналитически возможность и условия существования решения уравнения (17) в виде бегущей волны. Перейдем к бегущей координате, сделав в уравнении замену вида $\xi = x - vt$,

$$v dU(\xi)/d\xi=\gamma[1-U(\xi)](d^2U(\xi)/d\xi^2)+U(\xi)[1-b-U(\xi)]. \tag{18}$$

Вводя новую переменную $p=dU(\xi)/d\xi$, перейдем к системе уравнений

$$dU(\xi)/d\xi = p$$

$$dp/d\xi =\{U(\xi)[1-b-U(\xi)] + vp\}/[-\gamma(1 - U(\xi))]. \tag{19}$$

Исследуем систему с граничными условиями вида

$$U(\xi)=0 \text{ при } \xi=+\infty;\ U(\xi)=1-b \text{ при } \xi=-\infty. \tag{20}$$

Эти условия определяют (при любом конечном t) волну, перед фронтом которой (то есть, в тех точках территории, куда волна еще не дошла) количество инфицированных равно нулю, а за фронтом уже установилось значение доли инфицированных, равное $1-b$ (данная величина следует из численных исследований и рассмотрения положений при выводе уравнения модели).

Система уравнений (19) имеет на фазовой плоскости (U, p) две особые точки (0,0) и $(1-b,0)$. Выясним их тип. Характеристическое уравнение для $U_0=1-b$, $p_0=0$ имеет вид

$$\gamma b\lambda^2 + v\lambda - (1 - b) = 0.$$

Корни характеристического уравнения определяются формулой $\lambda_{1,2} = \{-v \pm [(v^2+ +4\gamma b(1-b)]^{1/2}\}/(2\gamma b)$, действительны и разных знаков, следовательно, данная особая точка является седлом. Характеристическое уравнение для $U_0=0$, $p_0=0$ имеет вид

$$\gamma\lambda^2 + v\lambda + (1-b)=0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \{-v \pm [v^2-4\gamma(1-b)]^{1/2}\}/(2\gamma)$. Особая точка (0,0) при $v<2[\gamma(1-b)]^{1/2}$ является неустойчивым фокусом, а при $v\geq 2[\gamma(1-b)]^{1/2}$ – неустойчивым узлом. Так как относительное количество заболевших по смыслу задачи не может быть отрицательным, то данная особая точка может быть только неустойчивым узлом. Таким образом, скорость волны ограничена снизу. В некоторых источниках [3, 7] обосновывается положение, что волна в подобных случаях будет распространяться с наименьшей скоростью.

На рис. 1 представлены результаты численного анализа модели. В начальный момент времени в системе присутствует незначительный очаг заражения. Затем доля заболевших начинает возрастать и достигает стационарного уровня, равного $(1-b)$. Кроме того, вследствие перемещения людей по территории, заболевание распространяется вдоль оси x.

Небольшое возмущение в системе порождает бегущую волну, распространяющуюся без изменения своего профиля и с постоянной скоростью.

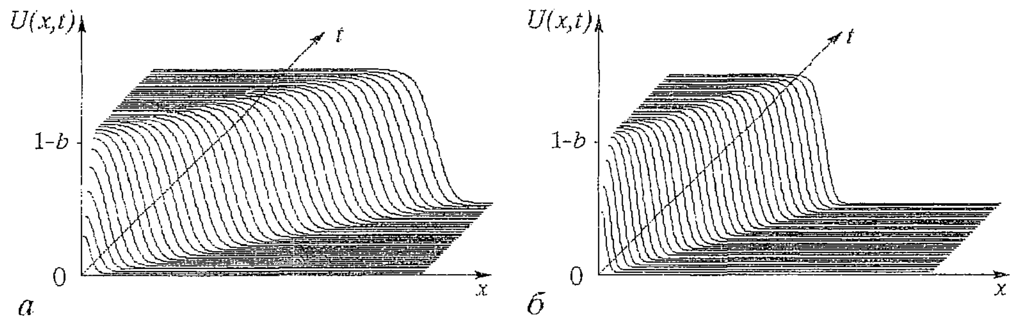

Рис. 1. Распространение эпидемии в случае излечимой болезни без приобретения иммунитета для различных коэффициентов γ, отражающих интенсивность перемещения людей по территории: *а*– 0.01; *б* – 0.003

Скорость волны зависит от параметров b и γ, то есть от скорости выздоровления и интенсивности перемещения людей по территории. Из сравнения рис. 1, *а* и *б* видно, что скорость распространения эпидемической волны выше в случае более интенсивного перемещения населения по территории.

При анализе динамического уравнения было выявлено, что коэффициент γ выражается через коэффициенты подвижности здоровых γ_1 и подвижности больных γ_2, как $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$. Если подвижность больных не ограничена, то $\gamma_1=\gamma_2$. При полном ограничении подвижности больных людей ($\gamma_2=0$) коэффициент γ уменьшается в 2 раза и, следовательно, уменьшится скорость эпидемической волны. При нормировке пространственной переменной полагалось, что скорость волны вдоль пространственной координаты зависит от $\gamma^{1/2}$. Отсюда при уменьшении γ в 2 раза скорость волны должна уменьшиться в $2^{1/2}$ раз. Расчеты подтверждают этот результат.

3. Распространение эпидемии с учетом приобретенного иммунитета

Предположим, что после выздоровления люди приобретают иммунитет к заболеванию. Таким образом они переходят из группы восприимчивых к заболеванию в группу иммунизированных.

Пусть $I(x,t)$ – относительное количество людей, обладающих иммунитетом, проживающих в точке x, в момент времени t. Тогда относительное количество здоровых людей запишется как $1-I(x,t)-U(x,t)$, а для процесса распространения эпидемии получим систему уравнений

$$\begin{gathered}\partial U(x,t)/\partial t=[1-I(x,t)-U(x,t)]\{\gamma(\partial^2U(x,t)/\partial x^2)+U(x,t)\}-bU(x,t),\\ \partial I(x,t)/\partial t=bU(x,t)\end{gathered} \tag{21}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered}U(x\to+\infty,t)=0,\\ U(x\to-\infty,t)=0.\end{gathered} \tag{22}$$

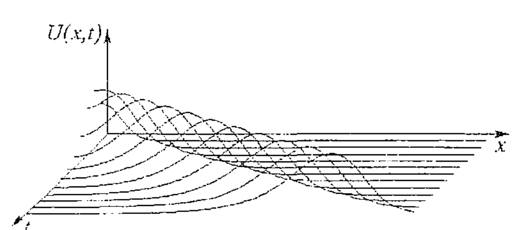

Рис. 2. Распространение эпидемии с учетом приобретенного иммунитета к заболеванию

В этом случае профиль волны качественно другой (рис. 2), так как люди, которые приобрели иммунитет не заболевают вновь. При наличии иммунитета к заболеванию в еще не пораженных эпидемией областях количество заболевающих в ходе эпидемии значи–

тельно уменьшается, то есть вспышка эпидемии на этой территории гасится.

4. Распространение эпидемии с учетом иммунитета к заболеванию и переменной плотности населения

Пусть плотность населения $n(x)$ не является постоянной. В этом случае система уравнений, описывающих динамику модели преобразуется к виду

$$\partial U(x,t)/\partial t=[1-I(x,t)-U(x,t)]\{\gamma\partial^2 n(x)U(x,t)/\partial x^2+n(x)U(x,t)\}-bU(x,t)$$
$$\partial I(x,t)/\partial t=bU(x,t). \quad (23)$$

Краевые условия такие же, как в предыдущем случае.

При преобразовании уравнения (7) для этого случая $n(x)$ за знак интеграла не выносится и все преобразования второго интеграла ведутся с функцией $n(x)U(x,t)$ вместо $U(x,t)$.

На рис. 3 представлен фронт волны эпидемии с учетом переменной плотности населения. Начальное возмущение возникает в точке x_1, а не в начале координат, как в предыдущих случаях. Пунктиром показана зависимость плотности населения от координаты. Как видно из рис. 3, локальное возмущение сначала затухает, но когда фронт волны доходит до области, в которой плотность населения больше некоторого порогового значения, количество зараженных в этой области начинает быстро возрастать. Происходит буквально вспышка эпидемии. Далее процесс развивается, в основном, аналогично предыдущему случаю. Для каждого набора параметров существует свой порог плотности населения, восприимчивого к инфекции. Если реальная плотность выше этого порога, то происходит локальный рост количества заболевших в этой точке, пока количество восприимчивых к заболеванию вновь не опустится ниже критического порога за счет приобретения иммунитета. Под термином «локальный рост» понимается увеличение количества зараженных за счет локальной моды роста.

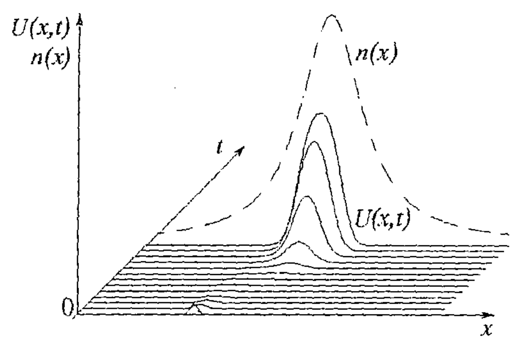

Рис. 3. Распространение эпидемии в случае переменной плотности населения

* * *

Итак, в настоящей работе была представлена пространственно-временная модель распространения эпидемии в человеческом обществе, с помощью которой сделана попытка анализа изучаемого процесса, с учетом ряда существенных факторов, способствующих и препятствующих его развитию. По сравнению с моделью Ю.М. Свирежева [3], как видно из разделов 3,4, в данную модель легко вводятся приобретенный иммунитет и переменная плотность населения, что приближает модель к реальной ситуации. Отметим, что при определенных предположениях эта модель может описывать и процесс распространения эпидемии во времени и в пространстве в биологических популяциях.

В заключение хотелось бы принести благодарность моим научным руководителям Д.И. Трубецкову и А.А. Короновскому.

Библиографический список

1. *Hede B.* Epidemic model with immunization // J. Phys. A. Math. Gen. 1989. Vol. 22. P. 439.

2. *Svirezhev Yu.M.* Diffuzion models in epidemiologi // Proc. IFIP conf. math. modelling immunology and medecine. N.–Y.: North Holland Press. Amst.,1983. P. 252.

3. *Свирежев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.:Наука,1987.

4. *Короновский А.А., Трубецков Д.И.* Нелинейная динамика в действии: как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд–во ГосУНЦ «Колледж», 1995. С.98.

5. *Короновский А.А.* Об одной модели распространения эпидемии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 1. С.140.

6. *Grimson M.J., Barker G. C.* Continuum model for the spatiotemporal grouth of bacterial colonies// Phys. rev. E. 1994. № 49(2). P. 1680.

7. *Байжанова К.С.* Вопросы исследования скорости эпидемических волн // Моделирование процессов экологического развития. М.: ВНИИСИ, 1984. Вып. 8. С. 48.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 27.11.97
после переработки 29.05.98

NONLINEAR DYNAMICS OF AN EPIDEMIC SPREADING

E.V. Melnikova

A spatiotemporal model of an epidemic spreading in the human society is introduced. It is based on a reaction–diffusion equation with local and nonlocal modes of growth. The system behavior on the phase surface and limitation of the wave velocity are analysed. The immunization and density of population as the function of spatial coordinate are taken into account.

Мельникова Екатерина Владиславна – родилась в Саратове (1975). Закончила физический факультет Саратовского государственного университета (1997) и Саратовскую Поволжскую академию государственной службы (1998) по специальности «юриспруденция». В настоящее время аспирантка кафедры электроники, колебаний и волновых процессов СГУ.