



## ИНФОРМАЦИОННЫЙ ТРАНСПОРТ В АКТИВНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ВОЛОКНАХ

### Часть I. Уединенные волны

*В.Б. Казанцев, В.И. Некоркин*

В работе обсуждается вопрос об использовании цепочки взаимодействующих электронных элементов как активного электронного волокна, способного эффективно осуществлять передачу информации в виде последовательностей бегущих уединенных волн. Проблема существования уединенных волн в цепочке сводится к изучению ограниченных траекторий вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Показано, что при определенных значениях параметров в этой системе существуют гомо- и гетероклинические траектории нескольких различных типов, включая сложные многообходные решения. Такие траектории определяют профили бегущих импульсов, волновых фронтов и волновых составов, распространяющихся по цепочке с постоянной скоростью.

### Введение

Исследование процесса передачи информации с помощью уединенных волн в пространственно распределенных системах является актуальной и современной задачей, возникающей в самых различных областях естествознания. Импульсы в оптоволоконных линиях связи [1–4], передача локального возбуждения (нервного импульса) по нервному волокну [5–8], распространение флюксонов в протяженных Джозефсоновских контактах [9,10] – вот далеко не полный перечень таких процессов. В этих системах каждая уединенная волна – единица информации, а состав из волн – кодовая посылка, содержащая информацию также и в характерных интервалах между волнами состава.

В последние несколько лет начаты интенсивные работы (см., например, [11]) по построению так называемых клеточных нейронных сетей (CNN). На базе CNN разрабатываются системы передачи визуальной информации, распознавания образов и др. CNN представляет собой большие массивы активных, тождественных или почти тождественных элементов («клеток»), объединенных с помощью межэлементных связей (тип связи варьируется в значительных пределах – от простой линейной локальной, до сложной нелинейной) в единую систему. Другими словами, CNN можно рассматривать как некоторую пространственно-распределенную систему с дискретными пространственными координатами. В большом количестве разработок CNN в качестве базового элемента используется так называемый осциллятор Чуа [12]. Динамика элемента Чуа чрезвычайно разнообразна и в зависимости от управляющих параметров она может быть как регулярной, так и хаотической. Ясно, что объединение таких элементов в CNN

образует очень сложную систему, эффективное использование которой невозможно без понимания процессов передачи информационных потоков такими системами. В частности, с этой точки зрения очень важную роль играет волновая динамика CNN.

Данная статья продолжает цикл работ авторов [13–16] по исследованию волновой динамики CNN с локальным типом связи между элементами. Как и ранее, наше исследование базируется на качественном подходе, в основе которого лежит изучение неблуждающих траекторий конечномерных динамических систем, ассоциирующихся с соответствующими CNN. Здесь мы рассматриваем одномерную CNN, состоящую из электронных элементов Чуа, соединенных в одномерную решетку с помощью локальной линейной связи. Мы сосредоточим внимание на многообразии волновых решений сложного профиля в этой системе (импульсы и волновые фронты, волновые составы и хаотические волны), изучим некоторые аспекты взаимодействия этих волн. Проводится также исследование ограниченных траекторий (гомо- и гетероклинических орбит) автомодельной системы четвертого порядка, определяющей профили стационарных волн в системе. Отметим также, что данная электронная цепочка при резистивной связи между элементами представляет собой дискретный аналог трехкомпонентной распределенной системы типа «реакция–диффузия».

## 1. Модель

Динамика цепочки локально связанных осцилляторов Чуа (рис. 1) описывается многомерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно представить в следующем безразмерном виде

$$\begin{cases} \dot{x}_j = \alpha(y_j - x_j - f(x_j)) + D_1(x_{j-1} - x_j) + D_2(x_{j+1} - x_j), \\ \dot{y}_j = x_j - y_j + z_j, \\ \dot{z}_j = -\beta y_j - \gamma z_j, \end{cases} \quad (1)$$

$$j=1, 2, \dots, N,$$

где нелинейность  $f(x)$  аппроксимируется кусочно–линейной функцией вида

$$f(x) = \begin{cases} b_1x - a - b_1 & \text{при } x \geq 1, \\ -ax & \text{при } -1 < x < 1, \\ b_2x + a + b_2 & \text{при } x \leq -1. \end{cases} \quad (2)$$

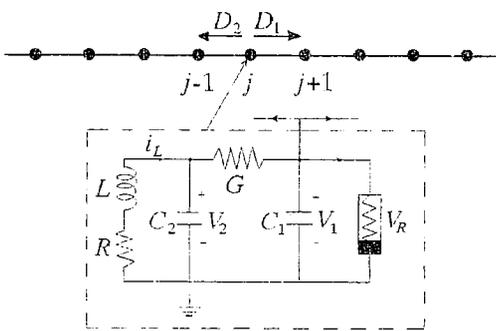


Рис. 1. Схема организации электронного волокна – цепочки локально связанных осцилляторов Чуа.  $D_1$  и  $D_2$  – коэффициенты межэлементного взаимодействия

Индекс  $j$  в системе (1) определяет номер элемента в цепочке и играет роль пространственной координаты,  $N$  – число элементов в цепочке. Параметры локального элемента  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  будем полагать положительными. Коэффициенты связи  $D_1$  и  $D_2$  характеризуют взаимодействие данного элемента  $j$  с последующим  $j+1$  и с предыдущим  $j-1$ , соответственно, и в общем случае различны. При  $D_1=D_2=D>0$  связь является взаимной. В терминах электронной цепочки это означает, что взаимодействие между элементами осуществляется через линейный резистор. В

этом случае систему (1) можно трактовать как дискретный аналог некоторой трехкомпонентной среды типа «реакция-диффузия». При  $D_1=0$ ,  $D_2=D>0$  связь между элементами — однонаправленная и (1) можно рассматривать как направленную активную линию передачи.

Уравнения (1) необходимо дополнить граничными условиями. Мы будем рассматривать два типа последних:

(i) граничные условия типа Неймана,  $x_0=x_1$ ,  $x_{N+1}=x_N$ , определяющие геометрию цепочки в виде отрезка со свободными концами;

(ii) периодические граничные условия,  $x_0=x_N$ ,  $x_{N+1}=x_1$ , задающие кольцевую геометрию системы.

Система (1) имеет три состояния равновесия, отвечающие пространственно-однородным равновесным состояниям цепочки:

$$O : \{ x_j = y_j = z_j = 0 \},$$

$$P^+ : \{ x_j = x_1, y_j = y_1, z_j = z_1 \},$$

$$P^- : \{ x_j = -x_2, y_j = -y_2, z_j = -z_2 \},$$

где

$$x_{1,2} = (b_{1,2} + a)(\gamma + \beta) / [\gamma b_{1,2} + \beta(b_{1,2} + 1)],$$

$$y_{1,2} = (b_{1,2} + a)\gamma / [\gamma b_{1,2} + \beta(b_{1,2} + 1)],$$

$$z_{1,2} = -(b_{1,2} + a)\beta / [\gamma b_{1,2} + \beta(b_{1,2} + 1)].$$

Характеристическое уравнение для пространственно однородных состояний может быть выписано в явном виде (см., например, [13]), откуда легко получить, что при выбранных параметрах нулевое состояние  $O$  является неустойчивым, а «внешние»  $P^+$  и  $P^-$  — локально устойчивыми. Оказывается, и это будет показано ниже, что оба этих состояния обладают *возбудимыми* свойствами. Это означает, что при внесении в определенную «точку среды» (элемент цепочки) возмущения по отношению к одному из устойчивых состояний (например,  $P^-$ ), превышающего некоторое пороговое значение, происходит «возбуждение» этой точки в форме импульса, после чего «точка среды» возвращается (восстанавливается) в исходное равновесное состояние. За счет диффузионного характера связи между элементами это «возбуждение» может распространяться вдоль цепочки, формируя таким образом локализованное волновое образование в виде бегущего импульса, последовательности импульсов или волнового состава. Аналогичными возбудимыми свойствами обладает и второе локально устойчивое состояние  $P^+$ . Если же это возмущение переводит «точку среды» в другое устойчивое состояние (например, из  $P^-$  в  $P^+$ ), то в системе формируется волна в виде бегущего фронта переключения, профиль которого может быть также достаточно сложным и зависит от типа этого возмущения.

## 2. Профили стационарных волн

Исследуем возможные профили стационарных волн в системе (1).

**2.1. Автомодельная система.** Перейдем в систему отсчета, движущуюся вдоль цепочки вправо (в сторону увеличения  $j$ ) со скоростью  $c$ . Для этого будем искать решение системы (1) в виде

$$\begin{aligned} x_j(t) &= x(\xi), \\ y_j(t) &= y(\xi), \\ z_j(t) &= z(\xi), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\xi = t - jh$  — бегущая координата,  $h=1/c$ . Подставляя (3) в (1), получим

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) + D_1(x(\xi + h) - x(\xi)) + D_2(x(\xi - h) - x(\xi)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y - \gamma z, \end{cases} \quad (4)$$

где точка обозначает дифференцирование по  $\xi$ . Будем интересоваться волнами достаточно «гладкого» профиля, такими что на «ширине» импульса укладывается достаточно много элементов цепочки (длинноволновый предел [13–16]). Для этого потребуем  $h \ll h^*$ , где  $h^*$  – некоторое характерное «время» существенного изменения решения (например, полуширина импульса). Тогда разностные члены в первом уравнении системы (4) можно представить в виде

$$x(\xi \pm h) = x(\xi) \pm h dx/d\xi + (h^2/2) d^2x/d\xi^2 + o(h/h^*)^2.$$

Пренебрегая слагаемыми более высокого порядка малости по  $(h/h^*)^2$  систему (4) можно приближенно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ k\dot{u} = u - \alpha'(y - x - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y - \gamma z, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$k = (D_1 + D_2)h^2 / \{2[1 - h(D_1 - D_2)]\}, \quad \alpha' = \alpha'[1 - (D_1 - D_2)]. \quad (6)$$

Любая ограниченная траектория системы (5) определяет существование решения системы (1) в виде стационарной волны, распространяющейся по цепочке со скоростью  $c=1/h$ . Тривиальными ограниченными решениями системы (5) являются три ее состояния равновесия –  $O: (0, 0, 0, 0)$ ,  $P^+: (x_1, 0, y_1, z_1)$ ,  $P^-: (-x_2, 0, -y_2, -z_2)$ , отвечающие соответственно однородным статическим состояниям  $O, P^\pm$  системы (1). В этой работе мы исследуем нетривиальные решения системы (5), формируемые гомо- и гетероклиническими траекториями состояний равновесия  $P^\pm$ . В цепочке они соответствуют стационарным волновым структурам – импульсам и волновым фронтам, распространяющимся без изменения своей формы с постоянной скоростью.

**2.2. Свойства автономной системы.** Отметим, прежде всего, что в силу свойств кусочно-линейной функции  $f(x)$  (2) фазовое пространство системы (5) можно разделить на три области, в каждой из которых движения определяются линейной системой четвертого порядка. Это деление осуществляется плоскостями

$$U^+: \{x = 1\} \quad \text{и} \quad U^-: \{x = -1\}.$$

Каждая из областей содержит одно из состояний равновесия; собственные значения (их четыре) и соответствующие собственные вектора полностью определяют разбиение на траектории данной области фазового пространства. Зафиксируем, для определенности, параметры системы  $\{a=1.5, b_1=2, b_2=0.2, \beta=0.5, \gamma=0.01\}$ , а  $\{\alpha', k\}$  выберем в качестве контрольных параметров. Определим тип состояний равновесия системы (5). Легко показать, что собственные значения для точек  $P^\pm$  можно представить в виде

$$\{\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_{3,4} = -h + i\omega \quad (h > 0)\}.$$

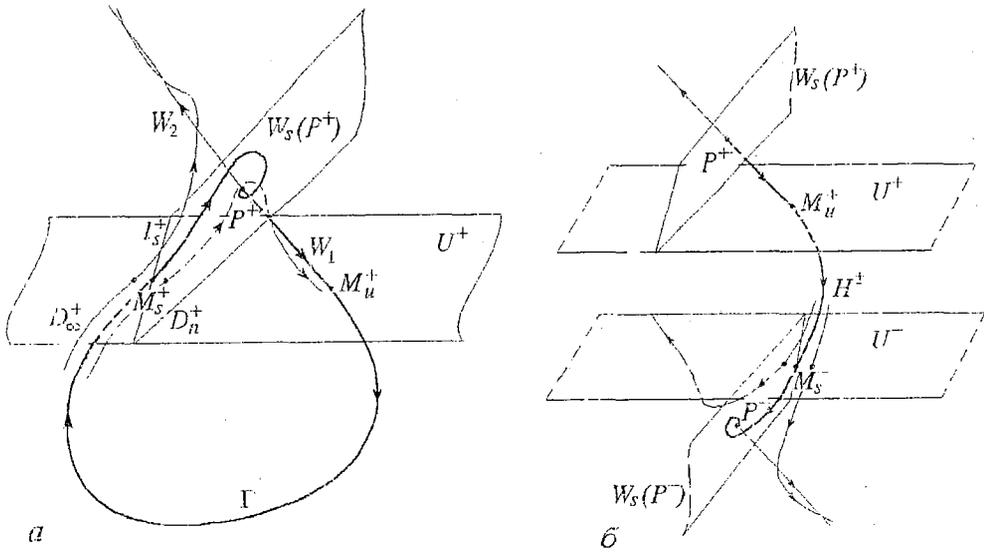


Рис. 2. *а* – формирование гомоклинической траектории  $\Gamma$  в системе (5). Качественный вид расположения многообразий состояний равновесия  $P^\pm$  и существенных точек в фазовом пространстве; *б* – формирование гетероклинической траектории  $H^\pm$  в системе (5)

Следовательно, состояния  $P^\pm$  являются «седло-фокусами» с одномерным неустойчивым многообразием  $W_u(P^\pm)$  и трехмерным устойчивым многообразием  $W_s(P^\pm)$ , которое в данном случае представляет собой трехмерную сепаратрисную плоскость. Тип тривиального состояния равновесия в точке  $O$  зависит от контрольных параметров. Эта точка может быть либо асимптотически устойчивой (все собственные значения имеют отрицательную реальную часть), либо седлового типа (седло, седло-фокус), когда два из четырех собственных значений имеют положительную реальную часть. Введем некоторые дополнительные обозначения. Точки пересечения многообразий  $W_u(P^\pm)$  с плоскостями  $U^\pm$  обозначим через  $M_u^\pm$

$$M_u^\pm: \{W_u(P^\pm) \cap U^\pm\}.$$

Пересечение сепаратрисных плоскостей  $W_s(P^\pm)$  с плоскостями  $U^\pm$  обозначим через  $l_s^\pm$

$$l_s^\pm: \{W_s(P^\pm) \cap U^\pm\}.$$

Прямая  $l_s^\pm$  разделяет плоскость  $U^\pm$  на две области  $D_\infty^\pm$  и  $D_n^\pm$  как показано на рис. 2, *а*, *б*. Траектории, пересекающие  $U^+$  в области  $D_\infty^+$ , проходят выше сепаратрисной плоскости  $W_s(P^+)$  и устремляются к бесконечности, а траектории, попадающие в область  $D_n^+$ , идут ниже плоскости  $W_s(P^+)$  и, отдаляясь от нее за счет неустойчивого направления, через некоторое время вновь оказываются на плоскости  $U^+$  (см. рис. 2, *а*). Аналогично траектории системы ведут себя, пересекая плоскость  $U^-$  (см. рис. 2, *б*).

Отметим, что при использовании изложенной в работе [14] техники, уравнения многообразий состояний равновесия в пределах линейных областей могут быть выписаны в явном виде.

**2.3. Гомоклинические траектории.** Рассмотрим сначала, как в системе (5) формируются гомоклинические орбиты состояния равновесия  $P^+$ . Это решения, отвечающие нетривиальным траекториям системы (5), которые при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  асимптотически приближаются к  $P^+$ . Легко видеть, что такие траектории должны одновременно принадлежать неустойчивому многообразию  $W_u(P^+)$  и

сепаратрисной плоскости  $W_s(P^+)$ . Другими словами, они проходят через точку  $M_n^+$  и пересекают плоскость  $U^+$  в одной из точек прямой  $l_s^+$ . Следовательно, условие существования гомоклинической орбиты состояния равновесия  $P^+$  можно сформулировать следующим образом. Выберем начальные условия для системы (5) в точке  $M_n^+$ . Тогда, если траектория системы (5), проходящая через точку  $M_n^+$ , отображает ее в некоторую точку  $M_s^+ \in U^+$  и эта точка принадлежит прямой  $l_s^+$ , то в фазовом пространстве системы (5) существует гомоклиническая траектория  $\Gamma$ .

Изменим теперь контрольные параметры, оставляя их в малой окрестности гомоклинической бифуркации. Тогда точка  $M_s^+$  сдвинется от прямой  $l_s^+$  либо в область  $D_\infty^+$ , либо в область  $D_n^+$ . В первом случае траектория будет стремиться к бесконечности (см. рис. 2, а), однако во втором случае, проходя в окрестности сепаратрисной плоскости, она снова пересекает плоскость  $U^+$  в некоторой точке, близкой к  $M_n^+$ . Для таких траекторий существует возможность образования более сложных, многообходных гомоклинических структур. Эта возможность гарантируется теоремой Шильникова [17,18] в случае, если седловая величина  $\sigma$  седло–фокуса  $P^+$

$$\sigma = \lambda_1 + \max\{\lambda_2, h\}$$

положительна для параметров гомоклинической бифуркации.

Полностью аналогично формируются гомоклинические траектории состояния равновесия  $P^-$ .

**2.4. Гетероклинические траектории.** Рассмотрим теперь гетероклинические траектории, образованные между точками  $P^+$  и  $P^-$ . Это решения системы (5), которые одновременно принадлежат неустойчивому многообразию состояния равновесия  $P^+$  ( $W_u(P^+)$ ) и сепаратрисной плоскости  $W_s(P^-)$ . Следовательно, такие траектории одновременно содержат точку  $M_n^+$  и пересекают плоскость  $U^-$  в некоторой точке  $M_s^-$ , принадлежащей прямой  $l_s^-$ . Таким образом, параметры, при которых траектория системы (5), проходящая через точку  $M_n^+$ , переводит ее в некоторую точку  $M_s^- \in U^-$ , принадлежащую прямой  $l_s^-$ , отвечают существованию в фазовом пространстве гетероклинической траектории  $H^\pm$ , «соединяющей» состояния равновесия  $P^+$  и  $P^-$ .

Аналогичным образом можно описать формирование гетероклинических орбит  $H^\mp$  траекторий, асимптотически стремящихся при  $\xi \rightarrow -\infty$  к точке  $P^-$ , а при  $\xi \rightarrow \infty$  к точке  $P^+$ .

**2.5. Бифуркационные кривые.** Для определения конкретных значений контрольных параметров, отвечающих гомо– и гетероклиническим бифуркациям в системе (5), введем так называемую функцию расщепления  $S$ . Для поиска гомоклинических траекторий она имеет вид

$$S_\Gamma(\alpha', k) = \text{dev}(M_s^+, l_s^+),$$

для гетероклинических –

$$S_{H^\pm}(\alpha', k) = \text{dev}(M_s^-, l_s^-).$$

Здесь  $\text{dev}(P, l)$  означает отклонение (расстояние со знаком) точки  $P$  от прямой  $l$ . Значения контрольных параметров, зануляющие функцию расщепления, соответствуют искомым бифуркационным значениям. Координаты точек  $M_{s,n}^\pm$  и прямых  $l_s^\pm$  выражаются в явном виде через параметры системы, а отображение  $M_n^\pm \rightarrow M_s^\pm$  может быть получено путем численного интегрирования системы (5) с соответствующими начальными условиями.

**2.5.1. Гомоклинические бифуркации.** На рис. 3 представлены бифуркационные кривые, отвечающие существованию в системе (5) различных гомо– и гетероклинических траекторий, обозначенные соответственно буквами  $\Gamma$  и  $H$ .

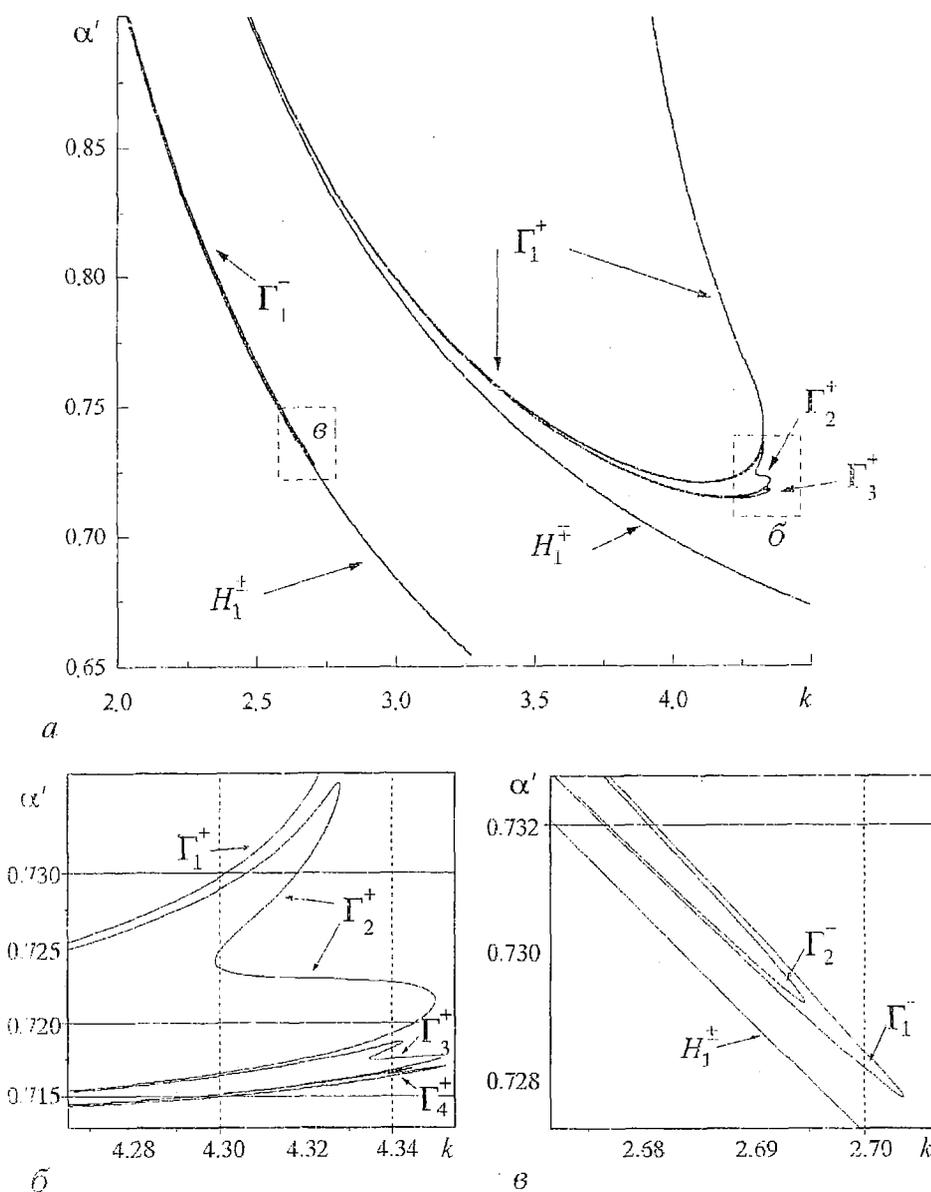
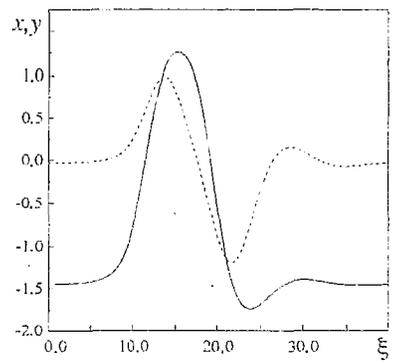
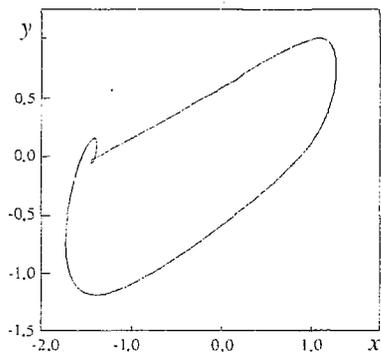
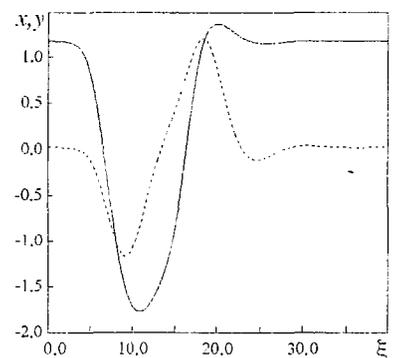
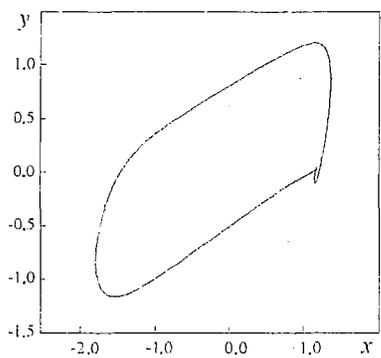


Рис. 3. Бифуркационные кривые существования гомоклинических ( $\Gamma_n^\pm$ ) и гетероклинических ( $H_1^\pm$ ) траекторий в системе (5): а – общий вид; б, в – два увеличенных участка диаграммы

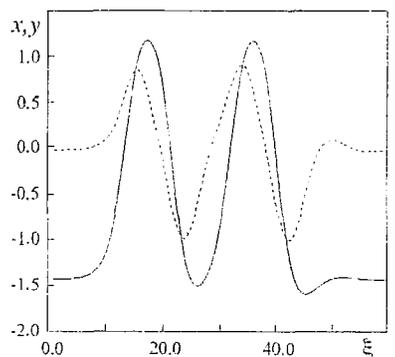
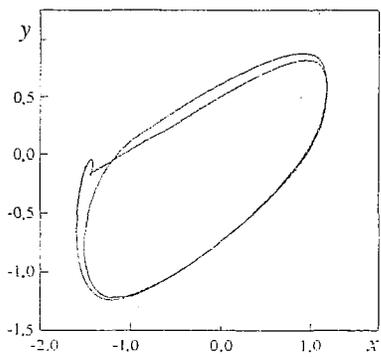
Верхний индекс  $\pm$  означает, по отношению к какой точке,  $P^-$  или  $P^+$ , формируется данная двоякоасимптотическая кривая. Нижний индекс указывает количество «обходов», которое делает данная орбита в окрестности  $\Gamma^\pm \cup P^\pm$ , прежде чем попасть на устойчивое многообразие состояния равновесия  $W_s^\pm$ . Кривые  $\Gamma_1^\pm$  соответствуют существованию простейших, однообходных гомсклинических траекторий. На рис. 4, а показана типичная форма траектории  $\Gamma_1^+$  в проекции фазового пространства на плоскость  $(x, y)$  и профиль «временной» реализации  $x, y(\xi)$ . Эти характеристики для орбиты  $\Gamma_1^-$  иллюстрирует рис. 4, б. Оказывается, что для всех значений параметров бифуркационных кривых  $\Gamma_1^\pm$  седловая величина  $\sigma$  соответствующих состояний равновесия имеет положительное значение. Согласно теореме Шильникова это гарантирует существование в окрестности  $\Gamma^\pm \cup P^\pm$  данной



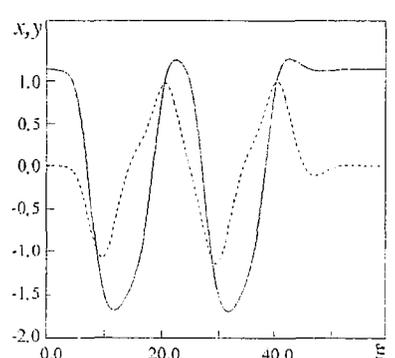
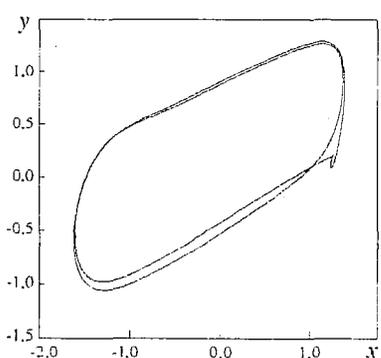
a



б



в



г

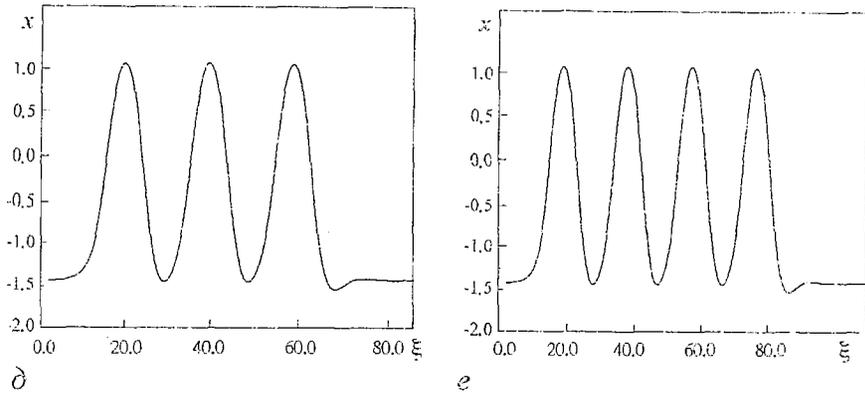


Рис. 4. Форма гомоклинических траекторий в проекции фазового пространства на плоскость  $(x, \xi)$  и профиль соответствующей «временной» реализации  $x(\xi)$ ,  $y(\xi)$  (сплошные кривые соответствуют компоненте  $x(\xi)$ , пунктирные —  $y(\xi)$ ): *a* — однообходная гомоклиническая траектория  $\Gamma_1^+$ ,  $\alpha'=0.8$ ,  $k=2.995$ ; *b* — гомоклиническая траектория  $\Gamma_1^-$ ,  $\alpha'=0.8$ ,  $k=2.355$ ; *в* — двухобходная траектория  $\Gamma_2^+$ ,  $\alpha'=0.732$ ,  $k=3.701$ ; *г* — двухобходная траектория  $\Gamma_2^-$ ,  $\alpha'=0.732$ ,  $k=2.580$ ; *д* — трехобходная траектория  $\Gamma_3^+$ ,  $\alpha'=0.715$ ,  $k=4.121$ ; *е* — четырехобходная траектория  $\Gamma_4^+$ ,  $\alpha'=0.715$ ,  $k=4.126$

бифуркации бесконечного числа седловых периодических движений и сложных, многообходных гомоклинических траекторий для всех достаточно малых значений  $S_1(\alpha', k)$ . Бифуркационная диаграмма рис. 3, *a–в* иллюстрирует расположение бифуркационных кривых, отвечающих наиболее простым двух-, трех-, четырехобходным решениям в системе (5). Кривые  $\Gamma_2^+$ ,  $\Gamma_3^+$ ,  $\Gamma_4^+$  имеют сходную структуру (см. рис. 3, *б*) и последовательно отстоят от линии  $\Gamma_1^+$ . При увеличении  $\alpha'$  они приближаются друг к другу вследствие усиления неустойчивого направления точки  $P^-$ . Кривые  $\Gamma_n^-$  имеют структуру, подобную  $\Gamma_1^-$ , и оказываются «включенными» внутрь последней. При увеличении  $\alpha'$  линии также приближаются друг к другу. Форма многообходных орбит в фазовом пространстве, а также их профиль приведены на рис. 4.

**2.5.2. Гетероклинические бифуркации.** Рис. 5, *a, б* иллюстрирует простейшие гетероклинические траектории, отвечающие кривым  $H_1^{\pm}, H_1^{\mp}$ . Кроме того, в системе (5) могут существовать и более сложные, многообходные гетероклинические решения, связывающие состояния равновесия  $P^+$  и  $P^-$ . На рис. 5, *в* приведено одно из таких решений — двухобходная гетероклиническая траектория  $H_2^{\pm}$ . Число «обходов»  $n$  для гетероклинической траектории можно определить как число попаданий траектории в окрестность  $H_n^{\mp} \cup P^+$ .

### 3. Траектории автородельной системы — стационарные волны

Как уже упоминалось выше, каждой гомо- или гетероклинической траектории системы (5) в цепочке отвечает импульс или волновой фронт, распространяющийся с постоянной скоростью. Согласно анализу, проведенному в предыдущем разделе, существуют два типа импульсов, один из которых отвечает удлиненным волнам, распространяющимся на «фоне» однородного статического состояния  $P^-$  (траектории  $\Gamma_{n,+}$ ), другой — на «фоне» состояния  $P^+$  (траектории  $\Gamma_{n,-}$ ). Импульсы первого типа имеют положительную амплитуду по « $x$ » координате, второго типа — отрицательную. По аналогии с терминологией, принятой при исследовании световых импульсов в оптических волокнах, будем называть движения первого типа «светлыми» импульсами, а второго — импульсами «затемнения» или «темными» импульсами.

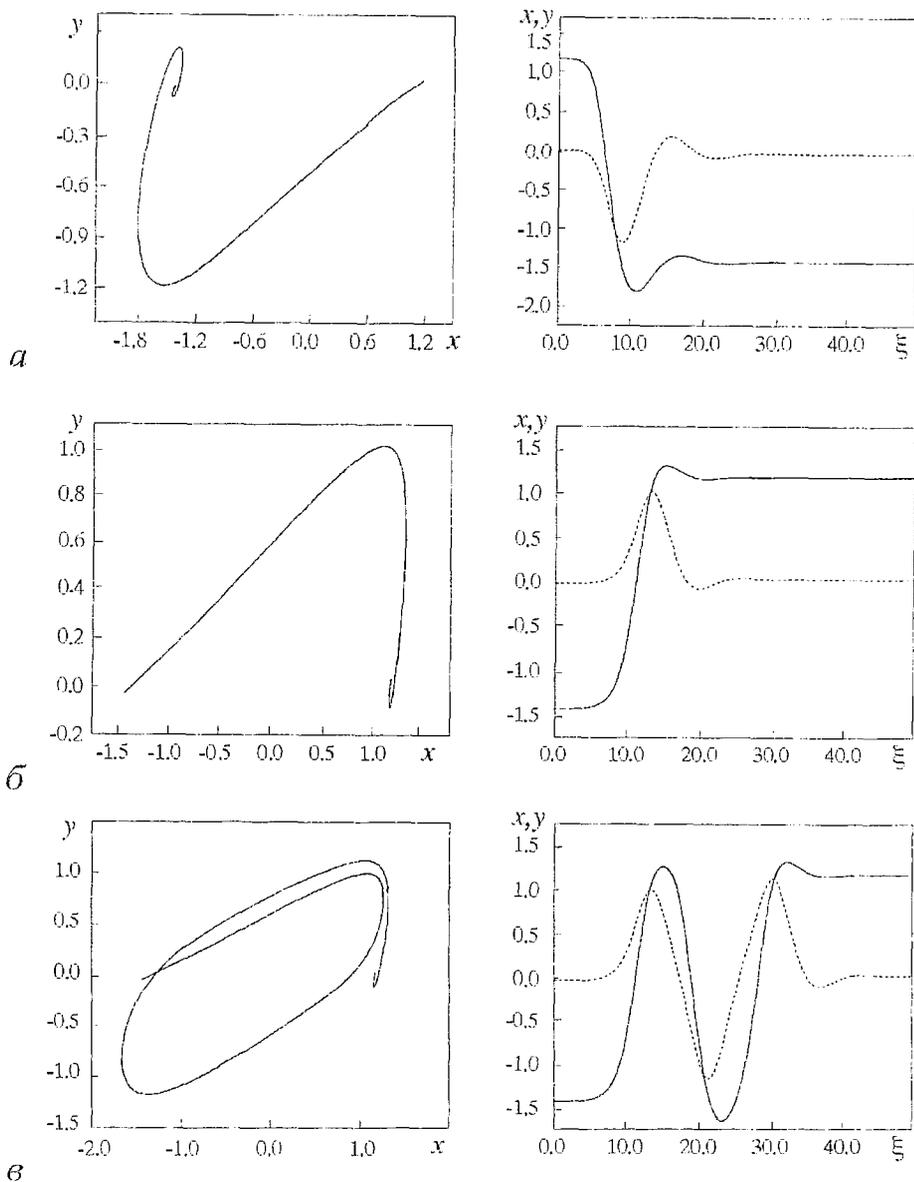


Рис. 5. Простейшие гетероклинические траектории в проекции фазового пространства на плоскость  $(x,y)$  и профиль соответствующей «временной» реализации  $(x(\xi), y(\xi))$ : а – связка  $H_1^\pm$ ,  $\alpha'=0.8, k=2.940$ ; б – связка  $H_1^\mp$ ,  $\alpha'=0.8, k=2.335$ ; в – связка  $H_2^\mp$ ,  $\alpha'=0.8, k=2.994$

Волновые фронты или фронты переключения, отвечающие гетероклиническим траекториям системы (5), представляют собой волновой процесс перехода элементов цепочки из одного устойчивого состояния  $P^+$  в другое  $P^-$ . Фронты первого типа, отвечающие связкам  $H^\mp$  и устанавливающие «светлое» состояние  $P^+$  (состояние с большим значением  $x$ ), будем называть фронтами «светлого» типа; фронты, отвечающие связкам  $H^\pm$  – фронтами «темного» типа или фронтами затемнения.

Параметры  $(\alpha, D_1, D_2)$ , отвечающие существованию в цепочке определенного импульса или фронта, можно найти по соответствующей бифуркационной кривой (см. рис. 3) и формулам (6). Отметим, что при фиксированных  $(\alpha', k)$  формулы (6) позволяют определить важную характеристику уединенных волн – зависимость скорости распространения  $c=1/h$  от коэффициентов связи  $D_1, D_2$ .

Для того, чтобы уединенная волна того или иного типа была реально физически наблюдаема в цепочке, необходимо, чтобы соответствующее решение системы (1) было, по крайней мере локально, асимптотически устойчивым. Решение этого вопроса аналитическими методами является затруднительным, так как приводит к задаче на собственные значения неавтономной системы порядка  $3N$ . Мы будем исследовать так называемую *практическую (эволюционную) устойчивость* волн. Она заключается в том, что в численном эксперименте такая волна может распространяться по цепочке достаточно долгое время без видимого изменения своей формы. Это означает, что возмущения, вносимые схемой интегрирования, а также ошибки, вызванные аппроксимацией длинноволнового перехода, не являются нарастающими и волна эволюционирует как устойчивая от некоторых начальных условий. Для возбуждения волны определенного типа будем задавать эти начальные условия близкими к профилю соответствующей траектории системы (5) согласно формулам (3).

#### 4. Цепочка со взаимной связью ( $D_1 = D_2 = D$ )

Рассмотрим систему (1) при  $D_1 = D_2 = D$ . Электронная цепочка в этом случае является дискретным аналогом возбудимой среды типа «реакция–диффузия». Согласно формулам (3), (6) система (5) описывает профили стационарных волн, бегущих с одинаковой скоростью как вправо, так и влево по цепочке.

**4.1. Распространение импульсов и волновых фронтов.** Рис. 6, а иллюстрирует эволюцию одиночного импульса «светлого» типа в цепочке с

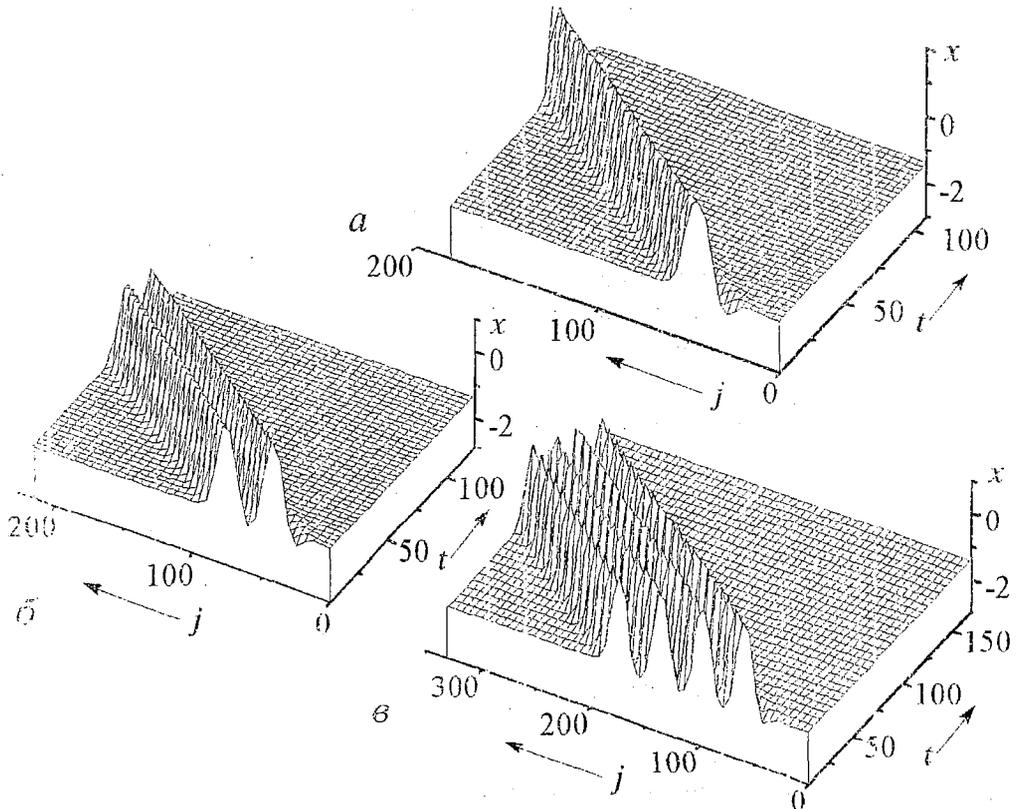


Рис. 6. Эволюция импульсов «светлого» типа в цепочке с граничными условиями Неймана: а – распространение одиночного импульса, отвечающего  $\Gamma_1^+$ ,  $\alpha=0.8$ ,  $D=12.0$ ; б – двугорбый импульс ( $\Gamma_2^+$ ),  $\alpha=0.8$ ,  $D=12.0$ ; в – четырехгорбый импульс ( $\Gamma_4^+$ ),  $\alpha=0.715$ ,  $D=16.5$

граничными условиями Неймана. Из пространственно-временной диаграммы видно, что импульс распространяется без изменения своей формы и поглощается на границе. Аналогично, эволюционно устойчивыми являются «светлые» импульсы более сложного профиля. Рис. 6, б, в иллюстрирует распространение двугорбого и четырехгорбого «светлых» импульсов, отвечающих соответственно гомоклиническим орбитам  $\Gamma_2^+$  и  $\Gamma_4^+$  автономной системы.

Подобно импульсам «светлого» профиля импульсы «затемнения», отвечающие орбитам  $\Gamma_n^-$ , также могут быть эволюционно устойчивыми. На рис. 7, а-в представлена пространственно-временная диаграмма распространения одиночного ( $\Gamma_1^-$ ), двугорбого ( $\Gamma_2^-$ ) и трехгорбого импульсов. Последний представляет собой волновой состав, «составленный» из двугорбого и одnogорбого импульсов с некоторой временной задержкой между ними. Введенные таким образом начальные условия эволюционируют к устойчивому волновому образованию, профиль которого может быть ассоциирован с некоторой трехобходной гомоклинической орбитой, существующей в окрестности гомоклинических бифуркаций  $\Gamma_1^-$ ,  $\Gamma_2^-$ . Скорость такого состава близка к скоростям составляющих его импульсов.

Отметим, что как «светлые», так и «темные» импульсы являются устойчивыми и в кольцевой цепочке. По принятой терминологии в этом случае они представляют собой кноидальные волны, профили которых отвечают периодическим решениям автономной системы, близким к гомоклинической траектории.

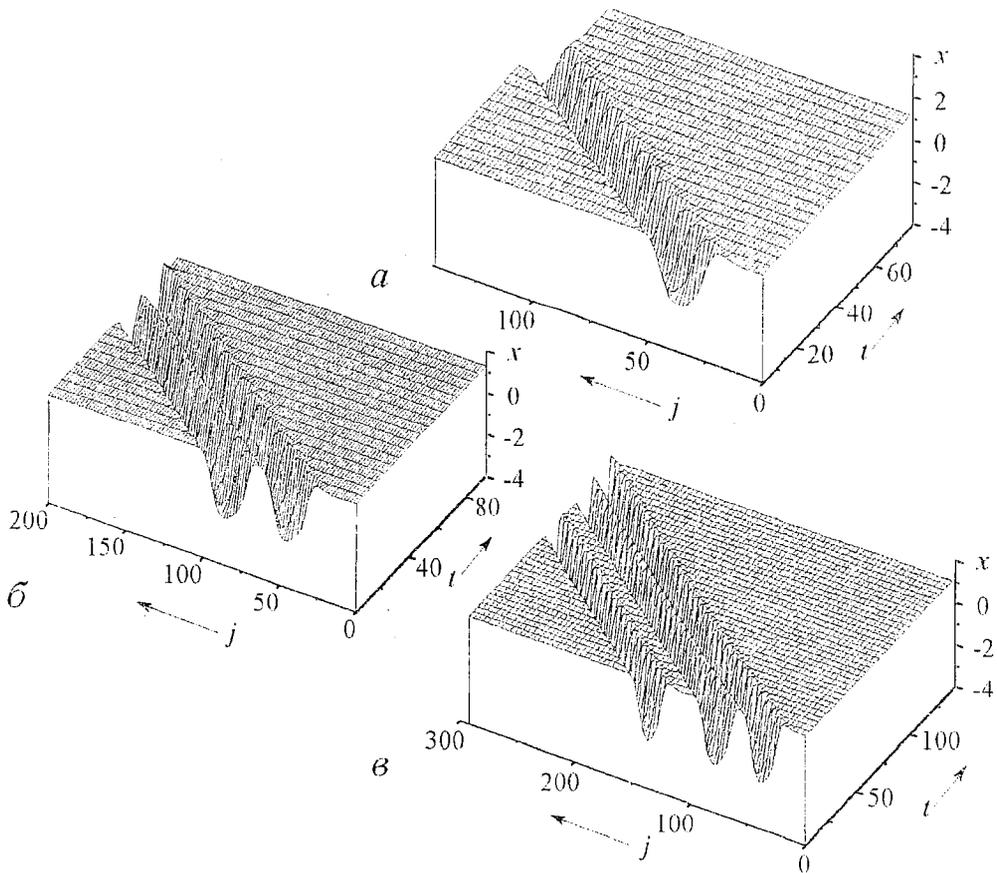


Рис. 7. Эволюция импульсов «темного» типа при фиксированных  $\alpha=0.8$ ,  $D=9.4$ : а – одиночный импульс «затемнения» ( $\Gamma_1^-$ ); б – двугорбый импульс ( $\Gamma_2^-$ ); в – трехгорбый импульс, построенный как волновой состав из одиночного ( $\Gamma_1^-$ ) и двугорбого ( $\Gamma_2^-$ ) импульсов «затемнения»

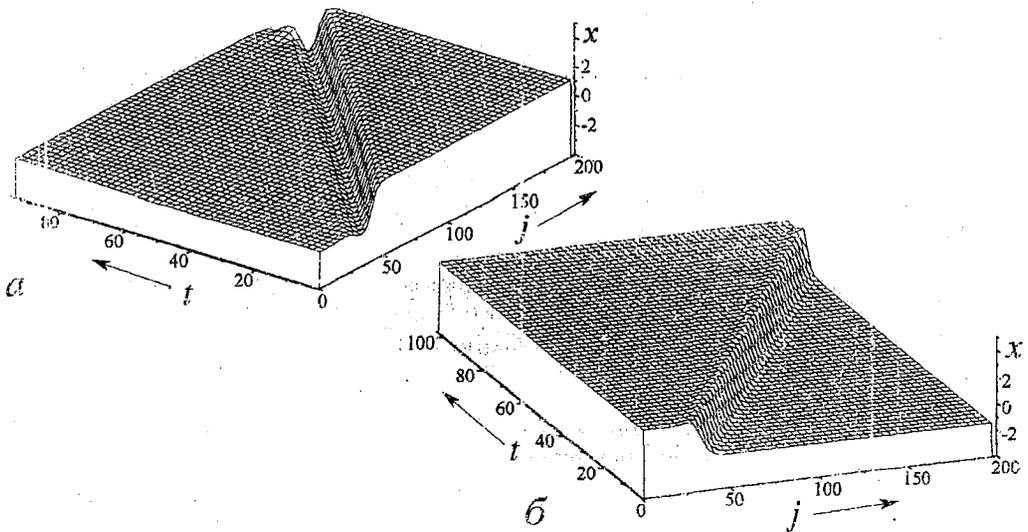


Рис. 8. Распространение фронтов переключения, отвечающих простейшим гетероклиническим траекториям системы (5): а – волновой фронт «темного» типа ( $H_1^\pm$ ), устанавливающий однородное состояние  $P^-$ ,  $\alpha=0.8$ ,  $D=11.76$ ; б – волновой фронт, устанавливающий «светлое» состояние  $P^+$ ,  $\alpha=0.8$ ,  $D=9.34$

Заметим также, что скорости «светлых» и «темных» импульсов в достаточной мере различаются между собой. В частности, и это следует из бифуркационной диаграммы (см. рис. 3) и формул (6), «темные» импульсы являются более быстрыми при фиксированных параметрах системы.

Рис. 8, а, б иллюстрирует распространение фронтов переключения, построенных по профилям гетероклинических орбит  $H_1^\pm$  и  $H_1^\mp$ . Оба типа («светлые» и «темные») при выбранных параметрах эволюционно устойчивы, однако имеют подобно импульсам разные скорости распространения.

**4.2. Волновые составы.** Наряду с решениями в виде уединенных волн (импульсов и волновых фронтов) в цепочке (1) существуют волны и более сложного профиля, представляющие собой волновые составы или последовательности бегущих импульсов. Рассмотрим, как формируются такие решения на примере импульсов «светлого» профиля. Заметим, что «хвосты» как импульсов, так и волновых фронтов спадают достаточно быстро (см. рис. 6, 7, 8). Другими словами, данная точка среды (элемент цепочки) после прохождения волны достаточно быстро возвращается в исходное равновесное состояние, после она снова «готова» к возбуждению, которое может принести следующий бегущий импульс. Выберем начальные условия в виде произвольной последовательности одно- и двугорбых импульсов «светлого» профиля. Близость скоростей составляющих импульсов и слабое взаимодействие между ними за счет быстрого спада «хвостов» приводит к формированию в цепочке стационарного волнового состава. Рис. 9 иллюстрирует эволюцию такой волны в кольцевой цепочке. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, с точки зрения автомодельной системы (5) профиль подобной волны ассоциируется с некоторой периодической траекторией, существующей в окрестности гомоклинической бифуркации. Такие траектории, а также гомоклинические орбиты сложной структуры образуют хаотическое множество – гомоклинический хаос, что позволяет говорить о существовании в этой окрестности ограниченных траекторий хаотического профиля, отвечающих стационарным хаотическим волнам в цепочке. Последние, как нетрудно видеть, реализуются в виде произвольных последовательностей бегущих импульсов. Такие последовательности можно интерпретировать как некоторые кодовые послышки, обеспечивающие транспорт информации по цепочке – активному электронному волновому.

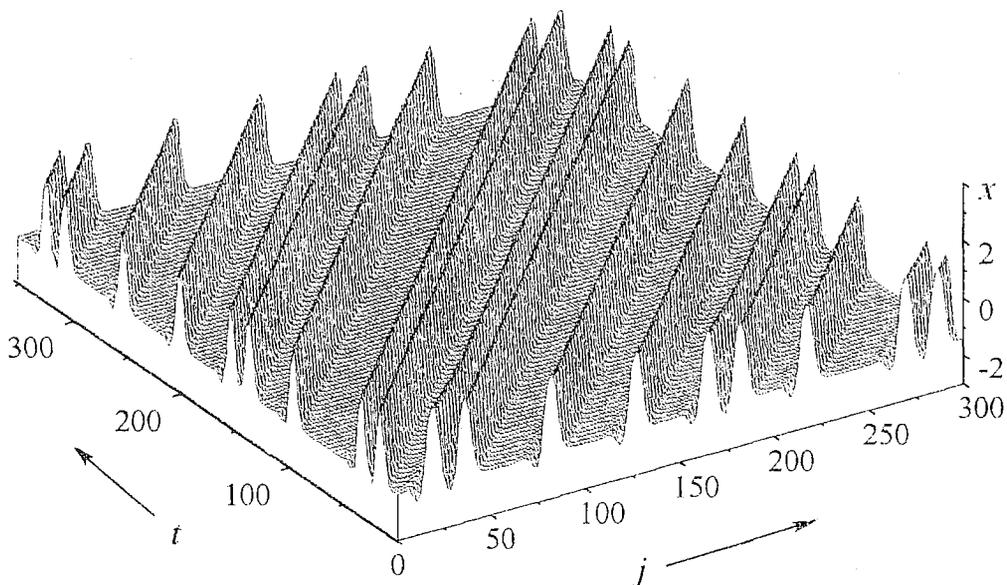


Рис. 9. Эволюция волнового состава, построенного как произвольная последовательность одно- и двугорбых импульсов с некоторой временной задержкой. Цепочка замкнута в кольцо;  $\alpha=0.8$ ,  $D=3$ .

Аналогично, для значений параметров в окрестности гомоклинической бифуркации  $\Gamma_1^-$  могут быть реализованы волновые составы в виде последовательностей импульсов «темного» профиля.

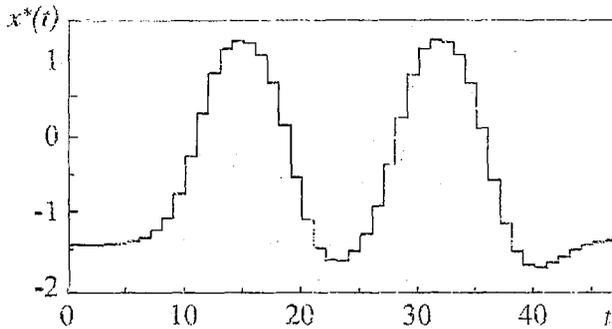
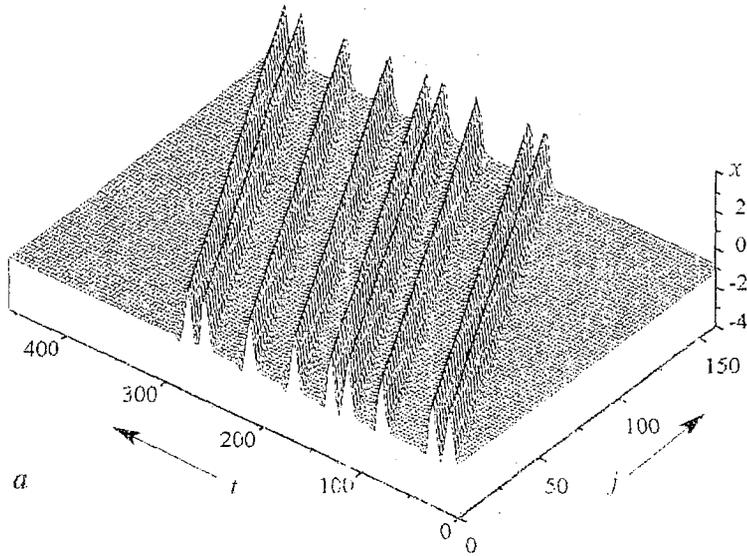
**4.3. Устойчивые и неустойчивые импульсы.** Исследование свойств устойчивости бегущих импульсов показало, что не при всех значениях параметров решения того или иного типа являются эволюционно устойчивыми в цепочке. Как следует из геометрического положения бифуркационной кривой  $\Gamma_1^+$  на плоскости  $(k, \alpha')$  (см. рис. 3), при фиксированных параметрах системы (1) ( $\alpha'=\alpha=\text{const}$ ) в цепочке могут распространяться два импульса «светлого» профиля, имеющие разные скорости (разные  $k$ ). Эти импульсы имеют сходную форму, однако те, которые отвечают правой ветви кривой  $\Gamma_1^+$ , имеют меньшую ширину и меньшую амплитуду. Они оказались неустойчивыми. Кривая  $\Gamma_1^-$  также имеет две ветви, отвечающие двум различным импульсам «затемнения». Здесь неустойчивыми оказываются решения, соответствующие левой ветви бифуркационной кривой, то есть импульсы, имеющие наибольшую скорость. Оставшиеся ветви кривых  $\Gamma_1^+, \Gamma_1^-$  в диапазоне параметров, представленном на рис. 3, определяют устойчивые импульсы соответствующего типа (см. рис. 6, 7, а).

Как уже отмечалось ранее, здесь мы говорим только о *практической* устойчивости или неустойчивости решений.

## 6. Импульсы в направленном электронном волокне ( $D_1 > D_2$ )

Рассмотрим цепочку (1) в случае направленной связи между элементами ( $D_1 > D_2$ ). Свойства волновых движений в такой системе будут существенно зависеть от направления распространения. В частности, при однонаправленном взаимодействии ( $D_1=D, D_2=0$ ) каждый элемент в цепочке воздействует только на последующий, и волн обратного направления просто не существует.

Профили возможных волновых движений, как и в случае взаимной связи, определяются ограниченными траекториями системы (5). Выберем параметры этой системы в точке ( $\alpha'=\alpha^*, k=k^*$ ) одной из бифуркационных кривых рис. 3. Из



б

Рис. 10. Передача последовательности импульсов по направленной электронной волокну (однонаправленная связь) при воздействии внешнего сигнала на первый элемент цепочки,  $\alpha=0,8$ ,  $D=0,83$ : а – пространственно-временная диаграмма распространения волны; б – фрагмент внешнего сигнала, отвечающий распространению двугорбого импульса

формулу (6) получаем, что для фиксированных коэффициентов взаимодействия  $D_1$  и  $D_2$  данное бифуркационное значение определяет волну, бегущую по цепочке вправо (в направлении наибольшей связи) со скоростью

$$c = (D_1 + D_2) / \{ [(D_1 - D_2)^2 k^{*2} + 2k^*(D_1 + D_2)]^{1/2} - (D_1 - D_2)k^* \} > 0$$

при значениях параметра  $\alpha > 0$ , а именно:

$$\alpha = \alpha^* [1 - (D_1 - D_2)/c].$$

Рассмотрим конкретный пример однонаправленной связи ( $D_1 = D$ ,  $D_2 = 0$ ). Предположим, что цепочка находится в невозбужденном состоянии  $P^-$ , и на первый элемент ее наложим внешнее воздействие  $x^*(t)$ , в точности отвечающее профилю импульса  $x(\xi)$  (или последовательности импульсов) «светлого» типа

$$\dot{x}_1 = \alpha(y_1 - x_1 - f(x_1)) + D(x^*(t) - x_1).$$

Нетрудно видеть, что такое воздействие отвечает распространению по цепочке стационарной волны соответствующего профиля. Другими словами, в начале цепочки находится передающий генератор, «согласованный» с линией передачи.

Численное моделирование такой системы иллюстрирует рис. 10, а. Здесь в цепочку посылаются произвольная последовательность одно- и двугорбых импульсов, которые распространяются с постоянной скоростью и без изменения своей формы. Импульсы поглощаются на конце цепочки, где, например, может находиться «приемник», «согласованный» аналогичным образом с линией передачи.

Поскольку бегущие импульсы являются эволюционно устойчивыми и отсутствует обратное воздействие (следовательно, любые отраженные волны), точного согласования не требуется, и задающий генератор должен воспроизводить лишь основные характеристики данного импульса (рис. 10, б), такие как его характерная длина и амплитуда. Заметим, что подобная система с генератором и приемником может быть сконструирована и в случае взаимной связи. Однако в этом случае на концах системы будет необходимо более точное «согласование», так как существует «отражение» от каждого последующего элемента цепочки.

### Заключение

Проведенное исследование показало, что в цепочке взаимосвязанных электронных элементов Чуа может быть реализовано большое разнообразие волновых движений, включая устойчивое распространение одно- и многогорбых импульсов, волновых фронтов, а также волновых составов, состоящих из произвольных (хаотических) последовательностей бегущих импульсов. Профили этих волн соответствуют ограниченным траекториям вспомогательной (автомодельной) системы четвертого порядка. Исследование гомо- и гетероклинических бифуркаций в этой системе позволило получить множество параметров, отвечающих существованию в цепочке импульсов и волновых фронтов, а также определить некоторые характеристики этих решений, включая зависимость скорости их распространения от коэффициента связи. Численное моделирование системы показало эволюционную (практическую) устойчивость широкого класса возможных волновых решений.

Цепочка (1) имеет два устойчивых пространственно однородных состояния, каждое из которых обладает возбудимыми свойствами. Вследствие этого существуют два типа возбуждений в виде импульсов, распространяющихся на «фоне» соответствующего однородного состояния. По аналогии с импульсами в оптоволоконных линиях передачи их можно классифицировать как «светлые» импульсы и импульсы «затемнения». Оба этих типа являются эволюционно устойчивыми, однако при выбранных параметрах «светлые» импульсы имеют меньшую скорость.

В случае взаимной связи цепочка представляет собой дискретный аналог возбудимой трехкомпонентной среды типа «реакция–диффузия». В случае направленной связи между элементами можно говорить о цепочке как о направленной активной линии передачи, позволяющей эффективно осуществлять транспорт информации, закодированной в виде последовательности импульсов.

Возможность реализации в цепочке широкого спектра волновых движений позволяет надеяться, что наше исследование будет интересно как с точки зрения фундаментального изучения динамики неравновесных сред, так и с точки зрения прикладных аспектов аналогового моделирования нелинейных систем с распределенным в пространстве источником энергии. Например, в биологии такой системой являются нервные волокна, осуществляющие информационный транспорт внутри живого организма.

*Работа поддержана грантом РФФИ (проект 97–02–16550), грантом поддержки ведущих научных школ РФ 96–1596593 и программой «Соросовские аспиранты» (грант а97–853).*

## Библиографический список

1. Хаус Х. Волны и поля в оптико-электронике / Пер. с англ; Под ред. К.Ф. Шенникова. М.: Мир, 1988.
2. Агравал Г. Нелинейная волновая оптика / Пер. с англ; Под ред. П.В. Мальшица. М.: Мир, 1996.
3. Hasegawa A., Kodama Y. Solitons in Optical Communications. Oxford: Oxford Univ. Press, 1995.
4. Guoxiang Huang, Velarde M.G. Head-on collisions of dark solitons near the zero-dispersion point in optical fibers // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 3048.
5. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. Сов. радио, 1977. 368 с.
6. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240 с.
7. Murray J.D. Mathematical Biology. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
8. Крицкий В.И., Медведицкий А.Б., Панфилов А.В. Эволюция автоволновых вихрей // Математика и кибернетика. 1986. Т.8.
9. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. М.: Мир, 1981.
10. Бароне А., Патерно Д. Эффект Джозефсона. М.: Мир, 1984.
11. CNNA'96 // 1996 Fourth IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications. Proceedings. Sevilla, Spain, 1996.
12. Chua's circuit: a Paradigm for Chaos / Ed. R.N. Madan. Singapore: World Scientific, 1993.
13. Nekorkin V.I., Chua L.O. Spatial disorder and wave fronts in a chain of coupled Chua's circuits // Int. J. Bifurc. Chaos. 1993. Vol. 3. P. 1282.
14. Nekorkin V.I., Kazantsev V.B., Rulkov N.F., Velarde M.G., Chua L.O. Homoclinic orbits and solitary waves in a one-dimensional array of Chua's circuits // IEEE Trans. Circ. Syst. 1995. Vol. 42, № 10. P. 785.
15. Nekorkin V.I., Kazantsev V.B., Velarde M.G. Travelling waves in a circular array of Chua's circuits // Int. J. Bifurc. Chaos. 1996. Vol. 6. P. 4734.
16. Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Velarde M.G. Pulses, fronts and chaotic wave trains in a one-dimensional Chua's lattice // Int. J. Bifurc. Chaos. 1997 (в печати).
17. Шильников Л.П. Новый тип бифуркации в многомерных динамических системах // Математический сборник. 1969. Т. 10. С. 1368.
18. Шильников Л.П. К вопросу о расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Математический сборник. 1970. Т. 10. С. 91.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию 9.05.98

## INFORMATION TRANSPORT IN ACTIVE ELECTRONIC FIBERS

### Part I. Solitary waves

V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin

We consider the chain of coupled electronic cells as active electronic fiber capable to make the effective transport of information coded in sequences of solitary pulses. The problem of the existence of solitary pulses is reduced to the analysis of bounded trajectories of some auxiliary ODE system of the fourth order. It is shown that for certain parameter values there realize homo- and heteroclinic orbits of different types including complicated, multi-looped solutions. These orbits define the profiles of pulses, wave fronts and wave trains steady translating in the original chain.



*Виктор Борисович Казанцев* – родился в 1973 году в Дзержинске Горьковской области. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1996). В настоящее время является аспирантом кафедры теории колебаний указанного факультета. Область научных интересов – теория колебаний и волн, нелинейная динамика дискретных сред. Является соавтором нескольких научных статей по указанным направлениям.



*Владимир Исаакович Некоркин* – родился в 1948 году на Украине, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1981) в ГГУ и доктора физико-математических наук (1992) в Саратовском государственном университете.

С 1971 года работал в Горьковском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 – в Горьковском политехническом институте, с 1986 года и по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов – теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно-временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях. Соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете.