Изв.вузов «ПНД», т.6, № 3, 1998 УДК 621.373.1

ИНФОРМАЦИОННЫЙ ТРАНСПОРТ В АКТИВНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ВОЛОКНАХ

Часть II. Волокно – система «реакция–диффузия»

В.Б. Казанцев, В.И. Некоркин

В этой части работы активное электронное волокно, состоящее из резистивно связанных элементов Чуа, рассматривается как дискретная трехкомпонентная система «реакция–диффузия». Изучается динамика неустойчивостей бегущих импульсов в такой системе и взаимодействие импульсов при столкновении. Установлено, что волокно обладает как традиционными для систем «реакция–диффузия», так и принципиально новыми динамическими свойствами.

Введение

В настоящей статье мы продолжаем исследование свойств активного электронного волокна, реализованного в виде цепочки резистивно связанных электронных элементов Чуа [1]. Здесь мы сосредоточим внимание на свойствах волокна, рассматривая его с точки зрения систем «реакция–диффузия» и покажем, что оно обладает как традиционными для таких систем, так и совершенно новыми динамическими характеристиками.

Для удобства дальнейшего изложения приведем некоторые общие сведения и термины по системам «реакция–диффузия» (см., например, [2–4]). Множество задач по изучению динамики неравновесных сред в современной нелинейной физике, химии, биохимии и биологии приводят к модельным динамическим системам, которые можно записать в следующем достаточно общем виде:

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{D}\Delta\mathbf{U}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{U}=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ – вектор динамических переменных n–компонентной системы (n – число «реагентов реакции»), $\mathbf{F}$ – нелинейная вектор–функция, $\Delta\mathbf{U}$ – оператор Лапласа, $\mathbf{D}$ – постоянная положительная диагональная $n\times n$ матрица. При этом уравнение

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) \qquad (2)$$

задает так называемую *кинетику реакции* или определяет динамику системы в локальной точке среды, а слагаемое $\mathbf{D}\Delta\mathbf{U}$ отвечает за процессы распространения, диффузии локальных возмущений в пространстве. Системы «реакция–диффузия» могут быть классифицированы по типу нелинейной кинетики реакции на три основных типа: бистабильные, возбудимые и автоколебательные.

В бистабильном случае уравнение (2) имеет два устойчивых состояния равновесия, и типичными динамическими процессами в среде, описываемой уравнением (1), являются волновые процессы «переключения» между этими состояниями – волновые фронты. Примером такой системы является однокомпонентное уравнение Нагумо (см., например, [5]). В возбудимых средах (например, система Фитц – Хью – Нагумо [2]) уравнение (2) имеет одно устойчивое состояние равновесия, обладающее *возбудимыми* свойствами. Это означает, что при наложении в определенную точку среды локального возмущения по отношению к этому состоянию, превышающего некоторое пороговое значение, происходит «возбуждение» этой точки в форме импульса, после чего точка среды возвращается (восстанавливается) в исходное равновесное состояние. Распространение этого возбуждения по цепочке происходит за счет диффузионного переноса и осуществляется в форме бегущих импульсов. Автоколебательные среды определяются существованием в уравнении (2) устойчивого предельного цикла. Процессы в таких средах можно представить как некоторые «коллективные» колебания локальных «точек среды», определенным образом «сфазированные» между собой. Это, например, периодические волны в системах с кольцевой геометрией, спиральные и концентрические волны в двумерных средах [6].

Отметим, что большинство классических моделей сред «реакция–диффузия» являются одно– или двухкомпонентными (n=2) или сводятся к таковым. При переходе к трехкомпонентным средам, как и в случае перехода от систем на плоскости к трехмерным системам в сосредоточенных моделях, можно ожидать появления принципиально новых эффектов в их пространственно–временной динамике.

Динамическую систему для цепочки элементов Чуа (см. формулу (1) первой части [1]) в терминах общей формы записи (1) в одномерном случае можно представить в виде

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \alpha(y - x - f(x)) \\ x - y + z \\ -\beta y - \gamma z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Отметим, что в нашем случае дискретной цепочки оператор Лапласа заменяется его дискретным аналогом (см., например, [6,7])

$$\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U}_{j+1} - 2\,\mathbf{U}_j + \mathbf{U}_{j-1}.$$

Напомним, что при выбранных параметрах (см. [1]) кинетика реакции (2) такой системы имеет два устойчивых состояния равновесия (P^+ и P^-), которые в то же время обладают и возбудимыми свойствами. Таким образом, мы рассматриваем *бистабильную возбудимую* среду с одной диффундирующей компонентой. Показано, что в такой системе существуют как волновые фронты переключения (проявление бистабильных свойств), так и бегущие импульсы «темного» и «светлого» типов (проявление возбудимых свойств), отвечающие возбуждениям по отношению к соответствующему из двух однородных состояний (P^+ или P^-). Ниже исследуются динамические характеристики такой среды, а также возможность управления ими на примере изменения свойств бегущих импульсов и характера взаимодействий между ними.

1. Неустойчивости бегущих импульсов

Исследование динамики бегущих импульсов показало, что не при всех значениях параметров решения того или иного типа являются эволюционно устойчивыми в цепочке. Проиллюстрируем это на примере распространения простейших одногорбых импульсов «светлого» и «темного» типов.

Оказывается, что при увеличении параметра α импульсы становятся неустойчивыми. Рис. 1 иллюстрирует в плоскости (α,D) кривые потери устойчивости (B_1 и B_4) соответственно для импульсов «светлого» и «темного» профиля. Типичный «сценарий» разрушения импульса «светлого» типа представлен на рис. 2, *а*. Увеличение амплитуды осцилляций на «хвосте» импульса приводит к тому, что при возбуждении данная «точка среды» (элемент цепочки) не возвращается в исходное устойчивое состояние P^-, а переходит в другое устойчивое состояние P^+. Таким образом, образуются два фронта переключения «светлого» типа (один из которых сложной формы), бегущих в противоположные стороны. Другими словами, однородное устойчивое состояние среды

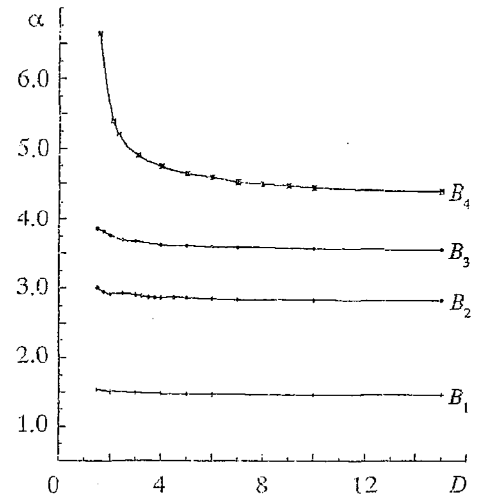


Рис. 1. Границы изменения динамических свойств возбудимой среды в плоскости параметров (α,D). B_1 – кривая потери устойчивости импульсов «светлого» типа; B_4 – кривая потери устойчивости импульсов «затемнения»; область параметров от B_2 до B_3 – «темные» импульсы ведут себя как диссипативные солитоны – волны-частицы

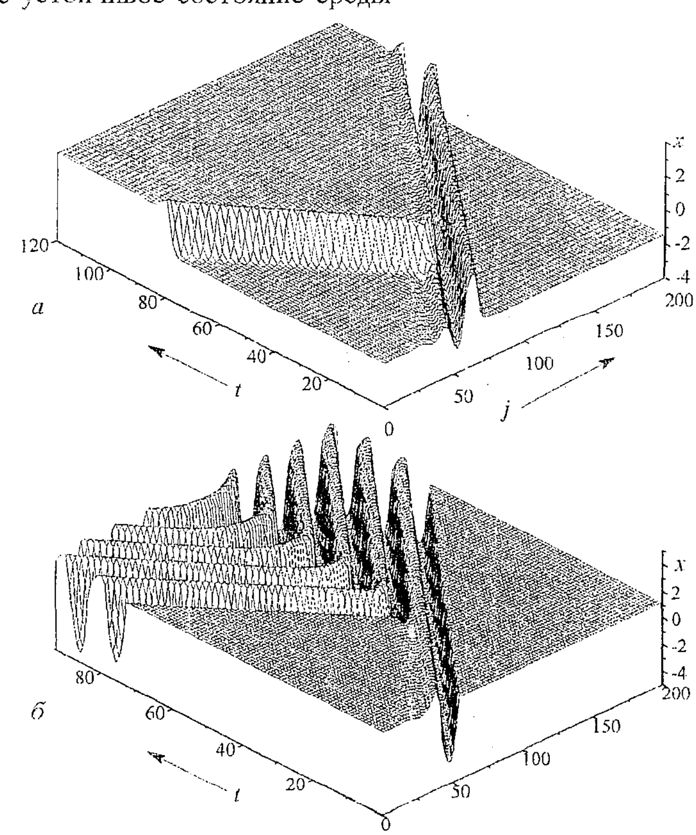


Рис. 2. *а* – типичный «сценарий» потери устойчивости «светлых» импульсов при переходе через границу B_1, параметры: α=1.48, D=4; *б* – разрушение «темных» импульсов при переходе через границу B_4, α=4.7, D=4; цепочка приобретает свойства автоколебательной среды

P^- теряет свойство возбудимости в том смысле, что оно больше *не восстанавливается* при распространении возбуждения по цепочке.

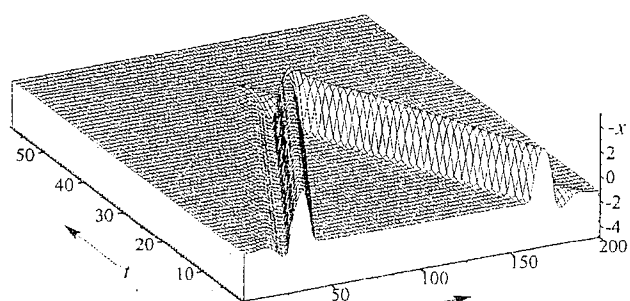
Для значений параметра α, превышающих значения, определяемые кривой B_4, импульсы «темного» типа также становятся неустойчивыми. На рис. 2, *б* представлен «сценарий» разрушения такого импульса, который можно интерпретировать следующим образом. Прежде всего, отметим, что при $\alpha \geq 2.85$ принципиально изменяется динамика отдельного элемента цепочки («кинетика реакции»). В его фазовом пространстве рождается устойчивый предельный цикл (седло-узловая бифуркация (+1)) конечного размера. Элемент становится мультистабильным. В зависимости от начальных условий в нем реализуются одно из статических равновесных состояний P^+ или P^-, либо состояние осцилляторной активности, отвечающее предельному циклу. Следовательно, «кинетика реакции» обладает теперь еще и колебательными свойствами. При распространении «темного» импульса (см. рис. 2, *б*) для параметров, превышающих значения, определяемые кривой B_4, свойство «восстанавливаемости» теряет также и равновесное состояние P^+. Это означает, что при возбуждении данная «точка среды» не возвращается в исходное состояние, а переходит в колебательный режим.

Таким образом, в области параметров выше кривой B_4 цепочка полностью утрачивает свои свойства *возбудимого* волокна, «пригодного» для распространения импульсов, и представляет собой систему «реакция–диффузия» с *автоколебательной* «кинетикой реакции».

2. Взаимодействие импульсов. Автоволны или волны–частицы?

Рассмотрим, как в зависимости от изменения параметра α меняется характер взаимодействия «темных» импульсов в цепочке.

При достаточно малых α (см. рис. 6, 7 работы [1]) импульсы как «светлого», так и «темного» профиля в ограниченной цепочке поглощаются на ее границах. При столкновении импульсов, бегущих навстречу друг другу (рис. 3, *а*), происходит



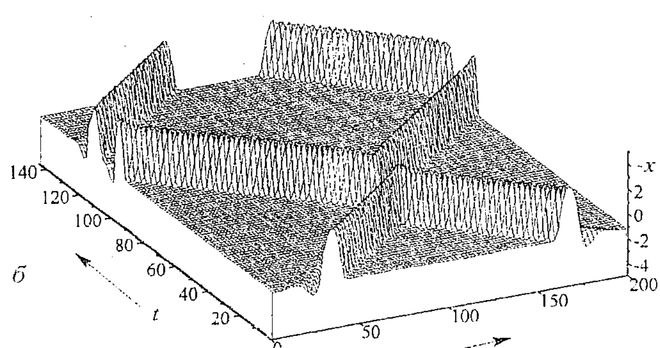


Рис. 3. Взаимодействие двух одиночных импульсов «темного» типа: *а* –аннигиляция импульсов при столкновении, α=2.8, D=4; *б* – отражение импульсов от границ цепочки и при столкновении друг с другом, α=2.9, D=4. Импульсы ведут себя как солитоны – волны–частицы

их аннигиляция и цепочка возвращается в исходное однородное состояние. Эти свойства являются типичными для автоволн в возбудимых средах типа «реакция–диффузия». Подобным образом, например, взаимодействуют автоволновые решения в известной модели Фитц – Хью – Нагумо. Однако в отличие от классических моделей наша возбудимая среда может принципиально изменять свои динамические характеристики. На рис. 3, *б* представлена пространственно-временная диаграмма взаимодействия двух одиночных импульсов при выборе значений параметров из области выше кривой B_2 (см. рис. 1). Импульсы здесь ведут себя подобно классическим солитонам – волнам–частицам. Они отражаются друг от друга и от границ цепочки. Однако это свойство сохраняется лишь до определенной границы (кривая B_3), когда в достаточной мере начинают сказываться колебательные свойства среды. Выше этой границы столкновение импульсов приводит к возникновению некоторого когерентного колебательного режима (рис. 4, *а*).

Заметим, этот переход к преобладанию колебательных свойств среды происходит не скачкообразно (кривая B_3 дает лишь оценку сверху, полученную из численного эксперимента). Вблизи границы возможны экзотические типы взаимодействий. Так, например, рис. 4, *б* иллюстрирует ситуацию, когда при столкновении двух импульсов среда динамически *воспроизводит* два дополнительных импульса, бегущих вслед за отраженными.

В качестве кратких выводов приведем таблицу изменения динамических свойств цепочки как модели трехкомпонентной системы «реакция–диффузия» согласно диаграмме рис. 1.

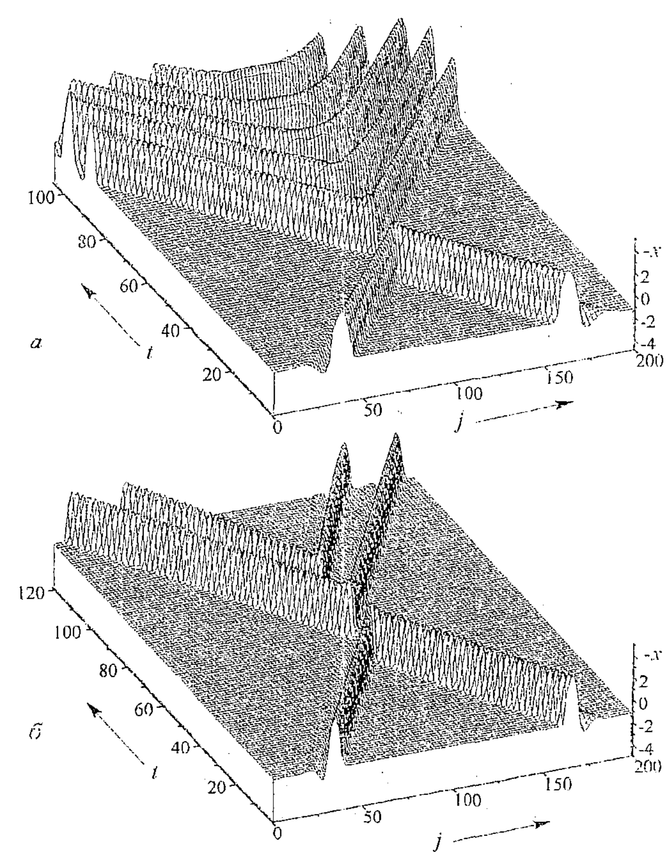


Рис. 4. *а* – разрушение импульсов при столкновении, переход среды в автоколебательный режим, α=3.63, D=4; *б* – возникновение двух дополнительных импульсов при отражении, α=3.761, D=2

Таблица

Диапазон изменения параметров	Свойства среды	Свойства бегущих импульсов
Ниже B_1	Возбудимая среда с двумя возбудимыми состояниями	Автоволны «светлого» и «темного» типов
От B_1 до B_2	Возбудимая среда с одним возбудимым состоянием P^+	Автоволны «темного» типа
От B_2 до B_3	Возбудимая среда с одним возбудимым состоянием P^+	Солитоны «затемнения»
От B_3 до B_4	Является одновременно возбудимой и автоколебательной	Импульсы «темного» типа, разрушаются при взаимодействии
Выше B_4	Автоколебательная	

Заключение

Мы исследовали динамику бегущих импульсов в цепочке резистивно связанных электронных осцилляторов Чуа, которую можно трактовать как дискретную трехкомпонентную систему типа «реакция–диффузия». Такая система одновременно может сочетать в себе свойства всех трех основных типов классических сред «реакция–диффузия» – бистабильные, возбудимые и автоколебательные.

Изучение взаимодействия импульсов при столкновении показало наличие новых эффектов, обусловленных трехкомпонентной кинетикой реакции. В частности, в зависимости от управляющего параметра импульсы ведут себя либо как классические автоволны в системах «реакция–диффузия», поглощаясь на границах и исчезая при столкновении, либо как диссипативные солитоны, отражаясь от границы и при столкновении друг с другом. Кроме того, импульсы в такой цепочке могут взаимодействовать и более сложным образом, например, возбуждая дополнительную пару импульсов при столкновении (см. рис. 4, *б*). Этот эффект умножения импульсов можно с уверенностью отнести к еще одному нетривиальному проявлению *самоорганизации* в системах «реакция–диффузия».

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 97–02–16550), грантом поддержки ведущих научных школ РФ 96–1596593 и программой «Соросовские аспиранты» (грант а97–853).

Библиографический список

1. *Казанцев В.Б., Некоркин В.И.* Информационный транспорт в активных электронных волокнах. Часть I // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 3. С. 49 .
2. *Murray J.D.* Mathematical Biology. Berlin: Springer–Verlag, 1993.
3. *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
4. *Кринский В.И., Медвединский А.Б., Панфилов А.В.* Эволюция автоволновых вихрей // Математика и кибернетика. 1986. Т.8.
5. *Keener J.P.* Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells // SIAM J. Appl. Math. 1987. Vol. 47. P. 556.

6. *Жаботинский А.М.* Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1987.
7. *Nekorkin V.I., Chua L.O.* Spatial disorder and wave fronts in a chain of coupled Chua's circuits // Int. J. Bifurc. Chaos. 1993. Vol. 3. P. 1282.

Нижегородский государственный университет

Поступила в редакцию 9.05.98

INFORMATION TRANSPORT IN ACTIVE ELECTRONIC FIBERS.
Part II. The fiber as «reaction–diffusion» system

V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin

In this part we consider the active electronic fiber composed of resistively coupled Chua's circuits as a discrete three–species «reaction–diffusion» system. The dynamics of instabilities of the travelling pulses and effects of their interactions are studied. It is shown that the fiber can display both typical for «reaction–diffusion» system and quite new dynamical characteristics.