



ФЛУКТУАЦИОННОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ

П.С. Ланда

Рассматривается задача о перемещении броуновских частиц, индуцированном неравновесными флуктуациями, в поле сил с периодическим по пространству потенциалом, обладающим определенной асимметрией. Наличие такого перемещения означает, что энергия случайного источника с нулевым средним значением может быть превращена в энергию направленного движения. В силу того, что флуктуации являются неравновесными, данное явление не противоречит второму закону термодинамики. Показано, что рассматриваемое перемещение в какой-то степени аналогично широко известному в механике вибрационному перемещению. На ряде примеров излагаются результаты приближенных аналитических расчетов указанного перемещения.

Введение

В последние несколько лет появилось множество работ, посвященных явлению перемещения броуновских частиц, индуцированного неравновесными флуктуациями, то есть превращению энергии случайного источника в энергию направленного движения. В силу того, что флуктуации являются неравновесными, рассматриваемое явление не противоречит второму закону термодинамики. В большинстве своем эти работы были инспирированы потребностями биологии и химии (см., например, [1–6]). Физический эксперимент, показывающий возможность указанного перемещения, описан в [7]. Он состоит в измерении среднего перемещения электрона в периодическом по координате потенциальном поле сил, создаваемом при помощи лазера.

Системы, в которых указанное явление рассматривается, в западной литературе часто называют «stochastic ratchets» по аналогии с механизмом «храповик–собачка», который по-английски называется «ratchet-and-pawl». Такой механизм, являющийся механическим выпрямителем, был рассмотрен в лекциях по физике Р.Фейнманом [8] с точки зрения невозможности превращения энергии теплового движения молекул в направленное движение храповика.

Следует отметить, что подобные явления обсуждались и до лекций Фейнмана, начиная с работы М. Смолуховского [9] и кончая дискуссией по поводу электрических выпрямителей [9–14]. В работах [11,12] было получено, что в простейшем электрическом выпрямителе, состоящем из конденсатора и диода, конденсатор может заряжаться без внешнего источника, только за счет тепловых флуктуаций. Этот парадоксальный результат вызвал даже некоторые сомнения в справедливости второго начала термодинамики для таких систем [14]. Правда, еще раньше, в 1950 году, Л.Бриллоэн [10], рассматривая диод как нелинейное

сопротивление, показал, что второй закон термодинамики будет справедливым, если учесть некоторый сдвиг вольт-амперной характеристики этого нелинейного сопротивления. Однако, работа Бриллюэна долгое время оставалась, по существу, незамеченной. Только в 1960 году Р.Л.Стратонович [15] на примере конкретной модели диода строго доказал, что такой сдвиг, действительно, имеет место, и вычислил этот сдвиг. При учете полученного сдвига среднее значение напряжения на конденсаторе и средний ток в цепи в равновесном случае оказываются равными нулю.

Отметим далее, что во всех работах, касающихся флуктуационного перемещения броуновских частиц, утверждается, что необходимым условием для получения этого эффекта является наличие периодического в пространстве потенциала сил, обладающего определенной асимметрией. Как будет показано в первом разделе настоящей работы, асимметрия, действительно, является необходимым условием, тогда как периодичность потенциала необязательна.

Как и большинство исследователей флуктуационного перемещения броуновских частиц, мы ограничим наше рассмотрение случаем, когда масса частицы достаточно мала, а коэффициент трения достаточно велик, так что движение частицы с той или иной степенью точности может быть описано одним дифференциальным уравнением первого порядка со случайными источниками вида

$$\dot{x} = -f(x) + \zeta(x,t) + \xi(t), \quad (1)$$

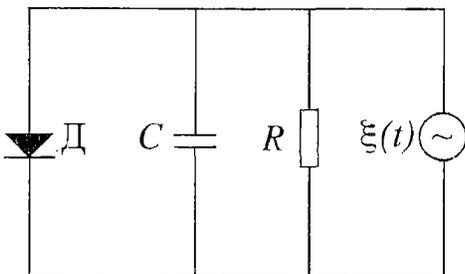
где $f(x)$ – некоторая периодическая функция x , обладающая определенной асимметрией; $\zeta(x,t)$ – некоторый случайный процесс, который может содержать и регулярную составляющую; $\xi(t)$ – белый шум, имитирующий тепловые флуктуации. Предполагается, что процесс $\zeta(x,t)$ либо является заданным, либо описывается другим дифференциальным уравнением.

Когда речь идет об устройствах типа храповика, обычно различают два вида таких устройств [4–6,16,17]: 1) $\zeta(x,t)$ не зависит от x (флуктуирующая сила) и 2) $\zeta(x,t)$ зависит от x (флуктуирующий барьер). Второй вид, в свою очередь, может быть разделен на два класса: а) зависимость функции $\zeta(x,t)$ от x является такой же, как и функции $f(x)$, а от t она является случайной, то есть $\zeta(x,t)=f(x)\chi(t)$ [4], и б) $\zeta(x,t)$ является случайной функцией x и t [17].

Ниже мы рассмотрим ряд примеров флуктуационного перемещения и покажем, что имеется некоторая аналогия между таким перемещением и широко известным в механике вибрационным перемещением тел [18].

1. Электрический выпрямитель и перемещение тела по горизонтальной шероховатой вибрирующей плоскости

Прежде всего рассмотрим электрический выпрямитель, простейшая схема которого показана на рис. 1. Принимая во внимание сдвиг вольт-амперной характеристики диода, мы можем записать следующее уравнение для падения напряжения на диоде V :



$$\dot{V} = -F(V-V_0) - V/\tau + \xi(t), \quad (2)$$

где $CF(V-V_0)$ – ток, текущий через диод; $\tau=RC$ – постоянная времени; $\xi(t)$ – белый шум интенсивности K с нулевым средним значением. Интенсивность

Рис. 1. Схематическое изображение электрического выпрямителя

шума мы определяем из соотношения $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = K\delta(\tau)$, где угловые скобки означают усреднение по статистическому ансамблю.

Для простоты положим $F(v)$ в виде

$$F(v) = \begin{cases} a_1 v & \text{для } v \geq 0, \\ a_2 v & \text{для } v \leq 0. \end{cases}$$

Значение V_0 может быть рассчитано по методике, предложенной Стратоновичем [19]. При этом мы находим

$$V_0 = [K_0\tau(1+a_1\tau)(1+a_2\tau)/\pi]^{1/2}(a_1-a_2)\tau/[(1+a_1\tau)^{1/2}+(1+a_2\tau)^{1/2}], \quad (3)$$

где K_0 – интенсивность тепловых флуктуаций.

Решая соответствующее уравнение Фоккера – Планка, мы получаем следующее выражение для стационарной плотности вероятности:

$$w(V) = C \begin{cases} \exp[-(1+a_1\tau)(V-V_0)^2/(K\tau)] & \text{для } V \geq V_0, \\ \exp[-(1+a_2\tau)(V-V_0)^2/(K\tau)] & \text{для } V \leq V_0, \end{cases} \quad (4)$$

где $C = 2[(1+a_1\tau)(1+a_2\tau)]^{1/2}/\{(\pi K\tau)^{1/2}[(1+a_1\tau)^{1/2}+(1+a_2\tau)^{1/2}]\}$ – постоянная нормировки.

Если шум $\xi(t)$ содержит не только равновесную (тепловой шум), но и неравновесную составляющую, то есть его интенсивность больше или равна K_0 , то

$$\langle V \rangle = (\tau/\pi)^{1/2}(K^{1/2}-K_0^{1/2})(a_2-a_1)\tau/[(1+a_1\tau)(1+a_2\tau)]^{1/2}/[(1+a_1\tau)^{1/2}+(1+a_2\tau)^{1/2}]. \quad (5)$$

Отсюда следует, что $\langle V \rangle$ равно нулю при отсутствии неравновесной составляющей, то есть при $K=K_0$ и отлично от нуля при ее наличии, то есть при $K>K_0$. Знак $\langle V \rangle$ определяется знаком разности a_2-a_1 . Итак, как и следовало ожидать, при $a_1 \neq a_2$ мы получаем выпрямление неравновесных флуктуаций, то есть превращение энергии этих флуктуаций в энергию направленного движения электронов.

Рассмотрим теперь простейший пример вибрационного перемещения и покажем, что оно полностью аналогично перемещению электронов в электрическом выпрямителе. Пусть тело массы m лежит на горизонтальной плоскости и на него в некотором направлении, которое мы примем за ось x , действует сила $F(t)$ ¹. Предположим, что сила сухого трения между телом и плоскостью имеет различные значения при $\dot{x}>0$ и $\dot{x}<0$. Это возможно, например, если плоскость является ворсистой. Тогда можно записать следующее уравнение движения тела:

$$m\ddot{y} = -f(y) + F(t), \quad (6)$$

где $y=x$; $f(y)$ – сила сухого трения, равная

$$f(y) = \begin{cases} mga_1 & \text{при } y > 0, \\ -mga_2 & \text{при } y < 0, \end{cases} \quad (7)$$

$a_{1,2}$ – коэффициенты трения.

Рассмотрим вначале случай, когда сила $F(t)$ изменяется по гармоническому закону, то есть $F(t)=B\sin\omega t$, хотя, как будет показано ниже, аналогичный эффект возникает и при случайной силе. При гармонической силе наличие или отсутствие перемещения определяется значением B и разностью между a_1 и a_2 . Если $B < \min mga_{1,2}$, то тело, находясь при $t=0$ в покое, остается неподвижным при всех t .

¹ К подобной задаче сводится также задача о перемещении тела на горизонтальной вибрирующей плоскости.

Если $mg a_1 < B < mg a_2$, то тело движется вправо в течение промежутков времени, заключенных между $t_1 + nT$ и $t_2 + nT$ (здесь $t_1 = (1/\omega) \arcsin(mg a_1/B)$, t_2 определяется уравнением $(B/\omega)(\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) = mg a_1(t_2 - t_1)$, n – целое число, $T = 2\pi/\omega$ – период изменения силы), и остается в покое все остальное время. Очевидно,

что $\bar{y} = (1/T) \int_0^T y(t) dt > 0$. Итак, тело в среднем движется, хотя никаких постоянных сил на него не действует. Причем движение происходит в сторону меньшего сопротивления со стороны сил трения. В наиболее интересном случае, когда $B/mg > \max a_{1,2}$, тело движется как вправо, так и влево, но в среднем оно, как и раньше, совершает движение в направлении меньшего сопротивления. Расчет показывает, что в этом случае

$$\bar{y} = 1/(m\omega) \{ B^2 - [\pi mg a_1 a_2 / (a_1 + a_2)]^2 [\sin(\pi a_2 / (a_1 + a_2))]^{-2} \}^{1/2} \cos(\pi a_1 / (a_1 + a_2)). \quad (8)$$

Очевидно, что это выражение справедливо при $B \geq B_0$, где

$$B_0 = [\pi mg a_1 a_2 / (a_1 + a_2)] [\sin(\pi a_2 / (a_1 + a_2))]^{-1}.$$

Из выражения (8) легко видеть, что, как и следовало ожидать, \bar{y} равно нулю при $a_1 = a_2$, положительно при $a_1 < a_2$ и отрицательно при $a_1 > a_2$.

Заметим, что приближенное выражение, следующее из (8) при $mg a_{1,2} \ll B$, получено И.И. Блехманом в [18] методом прямого разделения движений. В этом приближении скорость вибрационного перемещения обратно пропорциональна массе тела и частоте действующей силы. Заметим, что в случае вибрации плоскости, когда $B \sim m\omega^2$, скорость перемещения в указанном приближении не зависит от массы тела и тем больше, чем больше частота вибрации.

Пусть теперь сила $F(t)$ является случайной, то есть $F(t) = \xi(t)$, где $\xi(t)$ – достаточно широкополосный случайный процесс интенсивности K с нулевым средним значением. В этом случае мы можем использовать уравнение Фоккера – Планка, соответствующее уравнению (6). Стационарное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию отсутствия потока вероятности, имеет вид

$$w(y) = C \exp[-\psi(y)], \quad (9)$$

где C определяется из условия нормировки, а

$$\psi(y) = -(2m/K) \int f(y) dy. \quad (10)$$

Из условия нормировки следует, что

$$C^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\psi(y)] dy. \quad (11)$$

Используя выражения (9)–(11), можно найти среднее значение y

$$\langle y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y \exp[-\psi(y)] dy \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\psi(y)] dy \right\}^{-1}. \quad (12)$$

Если $f(y)$ описывается выражением (7), то

$$\psi(y) = (2m^2 g/K) \begin{cases} a_1 y & \text{для } y \geq 0, \\ -a_2 y & \text{для } y \leq 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$C = 2m^2 g a_1 a_2 / [K(a_1 + a_2)] \quad \text{и}$$

$$\langle y \rangle = K(a_2 - a_1) / (2m^2 g a_1 a_2). \quad (14)$$

Итак, в этом случае мы получаем результат, подобный случаю

гармонической силы: при $a_1=a_2$ тело в среднем покоится, а при $a_1 \neq a_2$ движется в направлении меньшего сопротивления. Этот результат очень близок к электрическому выпрямлению флуктуаций. Вместе с тем имеется отличие от случая гармонической силы: там эффект перемещения имел пороговый характер, а здесь перемещение может происходить при сколь угодно малой интенсивности флуктуаций.

2. Перемещение легкой броуновской частицы в вязкой среде с пилообразным потенциалом под действием регулярных и случайных сил

Предполагая, что масса m рассматриваемой броуновской частицы достаточно мала, а коэффициент вязкого трения β достаточно велик ($m\ddot{x} \ll \beta\dot{x}$, где x – смещение частицы), можно записать следующее уравнение движения в нулевом приближении по массе²:

$$\dot{x} + f(x) = \varphi(t) + \zeta(x,t) + \xi(t), \quad (15)$$

где $f(x)$ – периодическая функция x ; $\varphi(t)$ – регулярная сила, которая предполагается периодической функцией времени; $\xi(t)$ – белый шум интенсивности K , имитирующий равновесные тепловые флуктуации; $\zeta(x,t)$ – неравновесный достаточно широкополосный шум интенсивности $K_2(x)$ с нулевым средним значением (считаем, что этот шум не коррелирован с $\xi(t)$). Для определенности полагаем

$$f(x) = \begin{cases} a_2 & \text{для } nL < x < nL + x_1, \\ -a_2 & \text{для } nL - x_2 < x < nL, \end{cases} \quad (16)$$

$n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $L=x_1+x_2$ – период функции $f(x)$. Заметим, что такая форма функции $f(x)$ соответствует пилообразному потенциалу (рис. 2), рассмотренному в целом ряде работ, например, [3,4,16,17,21,22].

Уравнению (15) соответствует следующее уравнение Фоккера – Планка:

$$\partial w / \partial t = -\partial / \partial x \{ [\varphi(t) - f(x)] w(x,t) \} + 1/2 \partial^2 / \partial x^2 \{ [K + K_2(x)] w(x,t) \}. \quad (17)$$

Если $K_2(x)$ – периодическая функция x с тем же периодом, что и $f(x)$, то $w(x,t)$ является также периодической функцией x . Последнее позволяет решать уравнение (17) только на интервале от $-x_2$ до x_1 .

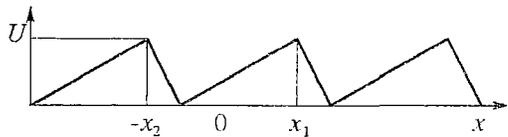


Рис. 2. Пилообразный потенциал

2.1. Случай, когда действует периодическая сила, а модуляция высоты потенциального барьера отсутствует. В этом пункте мы рассмотрим случай, когда модуляция высоты потенциального барьера отсутствует, что эквивалентно $\zeta(x,t)=0$, но действует регулярная периодическая сила $\varphi(t)$. Если функция $\varphi(t)$ изменяется достаточно медленно, то для решения уравнения (17) можно использовать метод последовательных приближений, полагая

$$w(x,t) = w_0(x,\varphi) + w_1(x,\varphi)\dot{\varphi} + w_{21}(x,\varphi)\dot{\varphi}^2 + w_{22}(x,\varphi)\ddot{\varphi} + \dots \quad (18)$$

В качестве нулевого приближения возьмем решение уравнения (17) при $\partial w / \partial t = 0$. В этом приближении мы получаем из (17) следующее уравнение для $w_0(x,\varphi)$:

² Учет малой массы для ряда частных случаев проведен в [20].

$$G_0(\varphi) = [\varphi - f(x)]w_0(x, \varphi) - (K/2)\partial w_0/\partial x, \quad (19)$$

где $G_0(\varphi)$ – мгновенный поток вероятности в нулевом приближении.

Решая теперь уравнение (19) с учетом (16), находим

$$w_0(x, \varphi) = \begin{cases} [C_0(\varphi) - G_0(\varphi)/q_1]\exp(2q_1x/K) + G_0(\varphi)/q_1 & \text{для } 0 \leq x \leq x_1, \\ [C_0(\varphi) - G_0(\varphi)/q_2]\exp(2q_2x/K) + G_0(\varphi)/q_2 & \text{для } -x_2 \leq x \leq 0, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$q_{1,2} = \varphi \mp a_{1,2}, \quad (21)$$

$C_0(\varphi)$ – произвольная функция φ .

Из условия периодичности функции $w_0(x, \varphi)$ получаем соотношение между G_0 и C_0

$$C_0(\varphi) = Q(\varphi)G_0(\varphi), \quad (22)$$

где

$$Q(\varphi) = \frac{1}{q_1q_2} \frac{q_2 \exp[2U_0\varphi/(Ka_1)] - q_1 \exp[-2U_0\varphi/(Ka_2)] - (q_2 - q_1) \exp(2U_0/K)}{\exp[2U_0\varphi/(Ka_1)] - \exp[-2U_0\varphi/(Ka_2)]}, \quad (23)$$

$U_0 = a_1x_1 = a_2x_2$ – высота потенциального барьера.

Поток вероятности $G_0(\varphi)$ может быть найден из условия нормировки плотности вероятностей $w_0(x, \varphi)$. В результате находим

$$G_0^{-1}(\varphi) = U_0 \left(\frac{1}{a_1q_1} + \frac{1}{a_2q_2} \right) + \frac{K(a_1+a_2)^2 \exp(-2U_0/K)}{2q_1^2q_2^2} \times \\ \times \frac{\{\exp[2U_0\varphi/(Ka_1)] - \exp(2U_0/K)\} \{\exp[-2U_0\varphi/(Ka_2)] - \exp(2U_0/K)\}}{\exp[2U_0\varphi/(Ka_1)] - \exp[-2U_0\varphi/(Ka_2)]}. \quad (24)$$

В наиболее интересном случае, когда φ достаточно мало, а именно,

$$\max \varphi \ll a_1a_2/(a_2 - a_1) \min(1, K/U_0), \quad (25)$$

мы получаем

$$G_0(\varphi) = G_{00}\varphi + G_{01}\varphi^2 + \dots, \quad (26)$$

где

$$G_{00} = U_0a_1a_2/[K^2(a_1+a_2)\text{sh}^2(U_0/K)], \quad (27)$$

$$G_{01} = G_{00}(a_2 - a_1)/(a_1a_2) \{U_0^2/[K^2\text{sh}^2(U_0/K)] + U_0/[K\text{th}(U_0/K)] - 2\}.$$

Ради простоты, при получении высших приближений мы ограничимся случаем, когда условие (25) выполняется. В этом случае из (23), (21), (26) и (18) мы имеем

$$C_0(\varphi) = C_{00} + C_{01}\varphi + \dots, \quad (28)$$

где

$$C_{00} = 2a_1a_2/[K(a_1 + a_2)[1 - \exp(-2U_0/K)]],$$

$$C_{01} = [(a_2 - a_1)/(a_1a_2)]C_{00}\{U_0^2/[K^2\text{sh}^2(U_0/K)] - 1\},$$

$$w(x, t) = w_0(x, \varphi) + (w_{10}(x) + w_{11}(x)\varphi)\dot{\varphi} + (w_{20}(x) + w_{21}(x)\varphi)\ddot{\varphi} + w_{22}(x)\dot{\varphi}^2 + \dots \quad (29)$$

Покажем теперь, что статистическое среднее скорости частицы x определяется соотношением

$$\langle \dot{x} \rangle = \int_{-x_2}^{x_1} G(x,t) dx, \quad (30)$$

где

$$G(x,t) = (-K/2) \partial w(x,t) / \partial x + [\varphi(t) - f(x)] w(x,t) \quad (31)$$

можно трактовать как мгновенный поток вероятности.

Усредняя уравнение (15) по статистическому ансамблю и принимая во внимание, что случайные процессы $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ имеют нулевые средние значения, находим

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle \varphi(t) - f(x) \rangle = \int_{-x_2}^{x_1} [\varphi(t) - f(x)] w(x,t) dx.$$

В соответствии с (31) это выражение можно переписать в виде

$$\langle \dot{x} \rangle = \int_{-x_2}^{x_1} [\varphi(t) - f(x)] w(x,t) dx = \int_{-x_2}^{x_1} [G(x,t) + (K/2) \partial w(x,t) / \partial x] dx.$$

Отсюда, в силу пространственной периодичности функции $w(x,t)$, получаем формулу (30).

Усредняя (30) по времени, получаем

$$\overline{\langle \dot{x} \rangle} = \int_{-x_2}^{x_1} \overline{G(x,t)} dx, \quad (32)$$

где

$$\overline{G(x,t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T G(x,t) dt.$$

Итак, мы нашли, что средняя скорость частицы, которая как раз и определяет ее направленное движение, пропорциональна потоку вероятности, усредненному как по пространству, так и по времени.

Из (18) и (29) следует, что функции $w_{10}(x)$, $w_{11}(x)$, $w_{20}(x)$, $w_{21}(x)$ и $w_{22}(x)$ описываются следующими уравнениями:

$$(K/2) dw_{10}(x) / dx + f(x) w_{10}(x) = -G_{10}(x), \quad \text{где } G_{10}(x) = -\int_0^x \partial w_0(x, \varphi) / \partial \varphi |_{\varphi=0} dx + G_{10}, \quad (33)$$

$$(K/2) dw_{11}(x) / dx + f(x) w_{11}(x) = -G_{11}(x), \quad \text{где } G_{11}(x) = -\int_0^x \partial^2 w_0 / \partial \varphi^2 |_{\varphi=0} dx - w_{10}(x) + G_{11}, \quad (34)$$

$$(K/2) dw_{20}(x) / dx + f(x) w_{20}(x) = -G_{20}(x), \quad \text{где } G_{20}(x) = -\int_0^x w_{10}(x) dx + G_{20}, \quad (35)$$

$$(K/2) dw_{21}(x) / dx + f(x) w_{21}(x) = -G_{21}(x), \quad \text{где } G_{21}(x) = -\int_0^x w_{11}(x) dx - w_{20}(x) + G_{21}, \quad (36)$$

$$(K/2) dw_{22}(x) / dx + f(x) w_{22}(x) = -G_{22}(x), \quad \text{где } G_{22}(x) = -\int_0^x w_{10}(x) dx + G_{22}. \quad (37)$$

Из этих уравнений следует, что для малых φ

$$\overline{\langle \dot{x} \rangle} \approx \overline{G_0} L + (B^2 \omega^2 / 2) \int_{-x_2}^{x_1} [G_{22}(x) - G_{21}(x)] dx = (\overline{G_0} + G_2 B^2 \omega^2 / 2) L, \quad (38)$$

где $G_2 = G_{22} - G_{21}$ ³. Таким образом, поправка к квазистационарному решению пропорциональна квадрату частоты и величине G_2 .

Вычитая (36) из (37), получаем уравнение для функции $W(x) \equiv w_{22}(x) - w_{21}(x)$

³ Здесь учтено, что, как следует из условия нормировки для функции $w(x,t)$, интегралы от функций $w_1(x,\varphi)$, $w_{21}(x,\varphi)$ и $w_{22}(x,\varphi)$ по x от $x=-x_2$ до $x=x_1$ должны обращаться в нуль.

$$(K/2)dW(x)/dx + f(x)W(x) = -[w_{20}(x) + G_2], \quad (39)$$

решение которого имеет вид

$$W(x) = \begin{cases} [C + G_2/a_1 - (2/K) \int_0^x w_{20}(x') \exp(2a_1 x'/K) dx'] \exp(-2a_1 x/K) - G_2/a_1 & \text{для } 0 \leq x \leq x_1, \\ [C - G_2/a_2 - (2/K) \int_0^x w_{20}(x') \exp(-2a_2 x'/K) dx'] \exp(2a_2 x/K) + G_2/a_2 & \text{для } -x_2 \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (40)$$

Из условия периодичности этого решения находим G_2

$$G_2 = -2a_1 a_2 / \{K(a_1 + a_2) [\exp(2U_0/K) - 1]\} \int_{-x_2}^{x_1} w_{20}(x) \exp(2f(x)x/K) dx. \quad (41)$$

Итак, чтобы рассчитать G_2 , нужно найти $w_{20}(x)$, которая определяется уравнением (35). В свою очередь, чтобы решить это уравнение, мы должны предварительно решить уравнение (33). Хотя, в принципе, эта процедура довольно простая, она приводит к весьма громоздким выражениям. Поэтому дальше мы ограничимся только анализом нулевого приближения.

В случае выполнения условия (25) из (26) и (27) следует, что если $\varphi = b = \text{const}$, то есть в дополнение к $f(x)$ на частицу действует постоянная сила b , то

$$\langle \bar{x} \rangle \approx U_0^2 b / [K^2 \text{sh}^2(U_0/K)]. \quad (42)$$

В этом случае, как и следовало ожидать, усредненное движение частицы происходит в направлении постоянной силы и не зависит от соотношения между a_1 и a_2 . Вместе с тем, поскольку сила мала и сама по себе не может перебросить частицу через потенциальный барьер, направленное движение частицы оказывается возможным только при наличии флуктуаций (легко видеть из (42), что при $K \rightarrow 0$ средняя скорость частицы также стремится к нулю). Таким образом, наличие беспорядочного движения является необходимым условием получения упорядоченного движения.

В другом частном случае, когда $\varphi(t) = B \sin \omega t$, получаем

$$\langle \bar{x} \rangle \approx \{U_0^2 (a_2 - a_1) B^2 / [2K^2 a_1 a_2 \text{sh}^2(U_0/K)]\} \{U_0^2 / [K^2 \text{sh}^2(U_0/K)] + U_0 / [K \text{th}(U_0/K)] - 2\}, \quad (43)$$

то есть частица движется в среднем в направлении меньшей скорости нарастания потенциала. Легко видеть, что в этом случае направленное движение частицы также оказывается возможным только при наличии флуктуаций.

Примеры зависимостей $\langle \bar{x} \rangle / B^2$, определяемых формулами (24) и (32) при

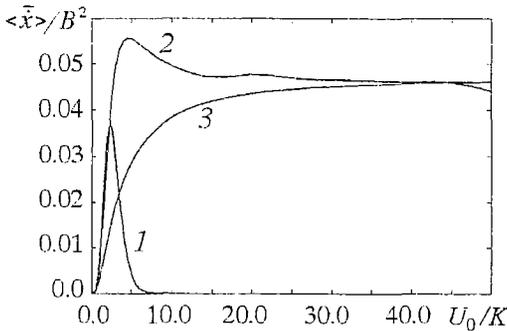


Рис. 3. Зависимость $\langle \bar{x} \rangle / B^2$ от U_0 / K при $a_1 = 1.25$, $a_2 = 5$ и различных значениях B : 1 - 0.1; 2 - 2.0; 3 - 5.0

$\varphi(t) = B \sin \omega t$, от U_0 / K при фиксированных значениях B приведены на рис. 3. Мы видим, что при малых B средняя скорость перемещения частицы является наибольшей при $U_0 / K \approx 2.3$. В этом случае при очень малой относительной высоте потенциального барьера, как и при очень большой, перемещение частицы оказывается невозможным. Результаты расчетов показали, что при $B < 0.5$ найденные зависимости практически совпадают с определяемыми приближенной формулой (43), тогда как при B больше или порядка единицы они существенно отличаются. С ростом B максимум скорости смещается в сторону больших

значений U_0/K и становится более пологим. Кроме того, появляется несколько слабых дополнительных максимумов (см. рис. 3, кривая 2).

Заметим, что в рассмотренном квазистационарном приближении средняя скорость движения частицы оказалась не зависящей от частоты периодического воздействия. Учет высших приближений дает зависимость от частоты.

Полученные результаты могут быть объяснены следующим образом. Флуктуационное перемещение частиц может происходить только в том случае, если средняя частота флуктуационных переходов через потенциальный барьер (см. [23,24]) в одну сторону больше, чем в другую. Так как вероятность перехода через некоторый потенциальный барьер зависит только от высоты барьера и интенсивности флуктуаций, то в отсутствие некоторой дополнительной силы перемещение невозможно. Дополнительная сила $\varphi(t)$, изменяющая потенциал, приводит к тому, что вероятности перехода через барьер в разных направлениях становятся различными. Это особенно наглядно в случае постоянной силы, поскольку при этом высоты потенциальных барьеров при движении частицы вправо и влево оказываются разными.

Заметим, что задача, подобная рассмотренной здесь, но при $b=0$, решалась в работе [25] путем численного решения уравнения Фоккера – Планка. Было показано, что для низких частот численные результаты совпадают с полученными в квазистационарном приближении, тогда как для высоких частот они имеют принципиально иной характер, а именно, при некоторых значениях амплитуды воздействия средняя скорость частицы изменяет знак. Этот результат авторы объяснить не смогли. Качественное объяснение данного эффекта может быть дано из следующих соображений. Введем в уравнении (15) новую переменную y согласно формуле

$$x = y + (B/\omega)\sin\omega t. \quad (44)$$

Подставляя (44) в (15), получаем следующее уравнение для переменной y :

$$\dot{y} + f(y + (B/\omega)\sin\omega t) = \xi(t). \quad (45)$$

Функцию $f(y + (B/\omega)\sin\omega t)$ в этом уравнении можно разложить в ряд Фурье как по времени, так и по координате y :

$$\begin{aligned} f(y + (B/\omega)\sin\omega t) &= \overline{f(y + (B/\omega)\sin\omega t)} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2/(n\pi) \{ [(a_1 + a_2)\cos(2\pi ny/L) - a_1\cos(2\pi n(y-x_1)/L) - a_2\cos(2\pi n(y+x_2)/L)] \times \\ &\quad \times J_{2m-1}[2\pi nB/(\omega L)] \sin((2m-1)\omega t) + \\ &+ [(a_1 + a_2)\sin(2\pi ny/L) - a_1\sin(2\pi n(y-x_1)/L) - a_2\sin(2\pi n(y+x_2)/L)] \times \\ &\quad \times J_{2m}[2\pi nB/(\omega L)] \cos((2m-1)\omega t) \}, \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{f(y + (B/\omega)\sin\omega t)} &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2/(n\pi) \{ [(a_1 + a_2)\sin(2\pi ny/L) - a_1\sin(2\pi n(y-x_1)/L) - a_2\sin(2\pi n(y+x_2)/L)] \times \\ &\quad \times J_0[2\pi nB/(\omega L)] \}. \end{aligned} \quad (47)$$

Если частота ω достаточно велика, то функция $f(y + (B/\omega)\sin\omega t)$ мало отличается от $\overline{f(y)} = \overline{f(y + (B/\omega)\sin\omega t)}$. Графики функций $\overline{f(y)}$ и $\overline{U(y)} = \int \overline{f(y)} dy$, построенные по формуле (47) с учетом 90 членов ряда, приведены на рис. 4. Мы видим, что высокочастотная сила существенно изменяет форму усредненного потенциала,

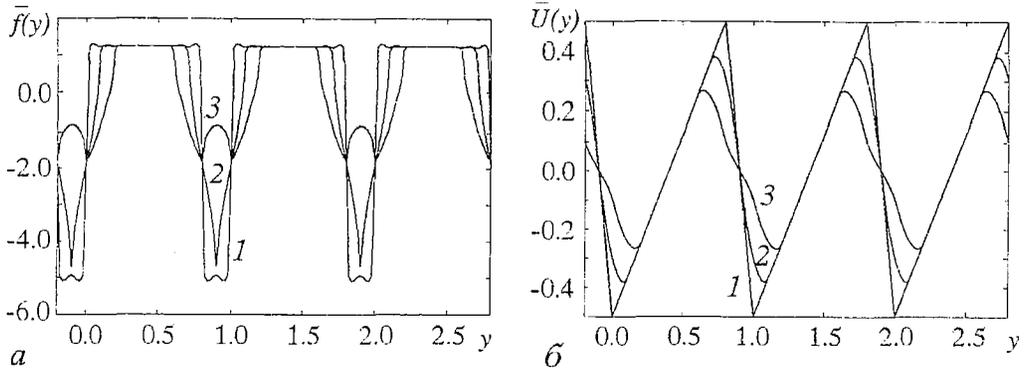


Рис. 4. Графики функций $\bar{f}(y)$ и $\bar{U}(y)$ при $a_1=1.25$, $a_2=5$ и различных значениях $V/(\omega L)$: 1 – 0.0; 2 – 0.1; 3 – 0.2

особенно влияя на соотношение значений крутизны его изменения. При некотором значении амплитуды силы разность значений крутизны может изменить знак, что и должно привести к изменению направления скорости частицы.

2.2. Случай, когда дополнительная сила отсутствует, но имеется случайная модуляция высоты потенциального барьера. Ради простоты предположим, что в уравнении (15) дополнительная регулярная сила $\varphi(t)=0$, а $\zeta(x,t)=f(x)\chi(t)$, где $\chi(t)$ – белый шум с интенсивностью K_1 . Тогда интенсивность случайного процесса $\zeta(x,t)$ равна $K_2(x)=K_1 f^2(x)$. В этом случае для определения средней скорости движения частицы нам достаточно найти стационарное решение уравнения Фоккера – Планка (17). Оно имеет вид

$$w(x) = \begin{cases} (-G/a_1)[1-\exp(-2a_1x/K^{(1)})] + C\exp(-2a_1x/K^{(1)}) & \text{для } 0 < x < x_1, \\ (G/a_2)[1-\exp(2a_2x/K^{(2)})] + C\exp(2a_2x/K^{(2)}) & \text{для } -x_2 < x < 0, \end{cases} \quad (48)$$

где

$$K^{(1,2)} = K + K_1 a_{1,2}^2.$$

Из условия периодичности функции $w(x)$ получаем следующее соотношение между G и C :

$$\begin{aligned} G[a_1[1-\exp(-2U_0/K^{(2)})] + a_2[1-\exp(-2U_0/K^{(1)})]] = \\ = Ca_1a_2[\exp(-2U_0/K^{(1)}) - \exp(-2U_0/K^{(2)})]. \end{aligned} \quad (49)$$

Учитывая (48) и (49), из условия нормировки находим G

$$\begin{aligned} G = [2a_1^2a_2^2/(a_1+a_2)][\exp(-2U_0/K^{(1)}) - \exp(-2U_0/K^{(2)})] \times \\ \times \{(a_1+a_2)(K+K_1a_1a_2)[1-\exp(-2U_0/K^{(1)})][1-\exp(-2U_0/K^{(2)})]- \\ - 2U_0(a_2-a_1)[\exp(-2U_0/K^{(1)}) - \exp(-2U_0/K^{(2)})]\}^{-1}. \end{aligned} \quad (50)$$

Из (50) следует, что $\langle \dot{x} \rangle = GL \neq 0$ только если $a_1 \neq a_2$ и $K_1 \neq 0$. Зависимости $\langle \dot{x} \rangle$ от K_1 при фиксированных значениях K и от K при фиксированных значениях K_1 показаны на рис. 5. Обратим внимание, что даже при $K=0$, мы имеем $\langle \dot{x} \rangle \neq 0$, то есть в случае флуктуаций потенциального барьера направленное перемещение частиц может происходить и в отсутствие тепловых флуктуаций.

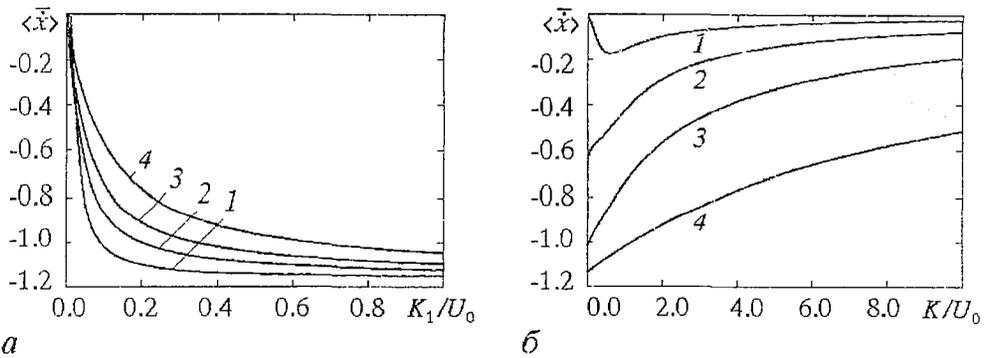


Рис. 5. *а* – зависимости $\langle \dot{x} \rangle$ от K_1 для различных значений K : 1 – 0.0, 2 – 0.5, 3 – 1.0, 4 – 2.0; *б* – зависимости $\langle \dot{x} \rangle$ от K для различных значений K_1 : 1 – 0.01, 2 – 0.035, 3 – 0.1, 4 – 0.4. В обоих случаях $U_0=1, L=1, a_1=1.25, a_2=5$

3. Перемещение броуновской частицы в вязкой жидкости под влиянием тепловых флуктуаций и коррелированной случайной силы

Проблема перемещения легкой броуновской частицы в вязкой среде, индуцированного тепловыми флуктуациями и коррелированным шумом, представляющим собой марковский процесс, решалась в работе [16]. Однако, конкретные результаты там были получены лишь для интенсивности тепловых флуктуаций, стремящейся к нулю, и только для двух частных случаев: когда коррелированный шум может принимать только два значения и когда он является скачкообразным (по терминологии автора типа «кенгуру»). В работе [21] интенсивность тепловых флуктуаций также полагалась равной нулю и рассматривался слабо коррелированный гауссов шум с заданной спектральной плотностью. При этом задача решалась путем приближенного вычисления вероятностей перехода через потенциальный барьер. В результате было получено, что в зависимости от формы спектра коррелированного шума средняя скорость частицы может изменять знак.

Как и в [21], мы рассмотрим два частных случая, когда коррелированная случайная сила представляет собой так называемый процесс Орнштейна – Уленбека [26] и когда она описывается уравнением второго порядка со случайным источником.

В первом случае можно записать следующие уравнения движения:

$$\dot{x} + f(x) = \zeta(t) + \xi(t), \quad (51)$$

$$\dot{\zeta} + \gamma\zeta = \xi_1(t), \quad (52)$$

где $f(x)$ определяется выражением (16); γ – величина, обратная времени корреляции случайного процесса $\zeta(t)$; $\xi(t)$ и $\xi_1(t)$ – случайные процессы типа белого шума, имеющие нулевые средние значения и интенсивности K и K_1 , соответственно. Предполагаем, что эти процессы не коррелированы друг с другом. Легко показать, что корреляционная функция процесса $\zeta(t)$ равна

$$\langle \zeta(t)\zeta(t+\tau) \rangle = [K_1/(2\gamma)] \exp(-\gamma\tau). \quad (53)$$

Отсюда следует, что дисперсия случайного процесса $\zeta(t)$ равна $K_1/2\gamma$.

Уравнениям Ланжевена (51), (52) соответствует следующее уравнение Фоккера – Планка для плотности вероятности $w(x, \zeta, t)$:

$$\partial w/\partial t = \partial/\partial x[(f(x) - \zeta)w] + \gamma \partial(\zeta w)/\partial \zeta + (K/2)\partial^2 w/\partial x^2 + (K_1/2)\partial^2 w/\partial \zeta^2. \quad (54)$$

Уравнение (54) не может быть решено точно даже в стационарном случае. Однако можно использовать тот факт, что стационарная плотность вероятности для переменной ζ не зависит от x и равна

$$p(\zeta) = [\gamma/(\pi K_1)]^{1/2} \exp(-\gamma \zeta^2/K_1). \quad (55)$$

Рассчитаем теперь стационарную условную плотность вероятности переменной x при фиксированном значении ζ . Уравнение для этой плотности вероятности может быть получено из уравнения (54) путем подстановки в него $w(x, \zeta) = w(x|\zeta)p(\zeta)$. При этом мы получим следующее уравнение:

$$\partial/\partial x[(f(x) - \zeta)w(x|\zeta)] + (K/2)\partial^2 w(x|\zeta)/\partial x^2 = \gamma \zeta \partial w(x|\zeta)/\partial \zeta - (K_1/2)\partial^2 w(x|\zeta)/\partial \zeta^2. \quad (56)$$

Если время корреляции случайного процесса $\zeta(t)$ достаточно велико, то есть параметр γ достаточно мал, и его интенсивность K_1 не очень велика, то правая часть уравнения (56) является малой. В этом случае можно решать уравнение (56) методом последовательных приближений аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.1. В нулевом приближении интересующая нас условная плотность вероятности $w(x|\zeta)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$G(\zeta) = (f(x) - \zeta)w(x|\zeta) - (K/2)\partial w(x|\zeta)/\partial x, \quad (57)$$

где $G(\zeta)$ – поток условной вероятности $w(x|\zeta)$.

Решение уравнения (57) имеет вид

$$w(x|\zeta) = \begin{cases} G(\zeta)/q_1 + [C(\zeta) - G(\zeta)/q_1] \exp(2q_1 x/K) & \text{при } 0 \leq x \leq x_1, \\ G(\zeta)/q_2 + [C(\zeta) - G(\zeta)/q_2] \exp(2q_2 x/K) & \text{при } -x_2 \leq x \leq 0, \end{cases} \quad (58)$$

где $C(\zeta)$ – произвольная функция ζ , $q_{1,2} = \zeta \mp a_{1,2}$.

Из условия периодичности функции $w(x|\zeta)$ по x находим соотношение между $G(\zeta)$ и $C(\zeta)$

$$C(\zeta) = \frac{G(\zeta)}{q_1 q_2} \frac{q_2 \exp(2U\zeta/Ka_1) - q_1 \exp(-2U\zeta/Ka_2) - (a_1 + a_2) \exp(2U/K)}{\exp(2U\zeta/Ka_1) - \exp(-2U\zeta/Ka_2)}. \quad (59)$$

В нулевом приближении функция $w(x|\zeta)$ должна удовлетворять условию нормировки. Учитывая (59), из этого условия определяем поток вероятности $G_0(\zeta)$

$$G_0^{-1}(\zeta) = U \left(\frac{1}{a_1 q_1} + \frac{1}{a_2 q_2} \right) - \frac{K(a_1 + a_2)^2}{2q_1^2 q_2^2} \exp\left(-\frac{2U}{K}\right) \times \\ \times \frac{[\exp(2U/K) - \exp(-2U\zeta/Ka_2)] [\exp(2U\zeta/Ka_1) - \exp(2U/K)]}{\exp(2U\zeta/Ka_1) - \exp(-2U\zeta/Ka_2)}. \quad (60)$$

В первом приближении по указанным выше малым параметрам полагаем

$$w(x|\zeta) = w_0(x|\zeta) + w_1(x|\zeta), \quad (61)$$

где $w_1(x|\zeta)$ описывается уравнением

$$\partial/\partial x[(f(x) - \zeta)w_1(x|\zeta)] + (K/2)\partial^2 w_1(x|\zeta)/\partial x^2 = -\partial G_2(x, \zeta)/\partial x, \quad (62)$$

в котором

$$G_2(x, \zeta) = \int_{-x_2}^x \{ (K_1/2) \partial^2 w_0(x'|\zeta) / \partial \zeta^2 - \gamma \partial / \partial \zeta [\zeta w_0(x'|\zeta)] \} dx' + D(\zeta), \quad (63)$$

$D(\zeta)$ – произвольная функция ζ , определяемая из условия периодичности функции $w_1(x|\zeta)$. Заметим, что в выражении (63) следует взять $w_0(x'|\zeta)$ в нулевом приближении.

Нетрудно показать, что

$$\dot{\langle x \rangle} = \langle G_0(\zeta) + G_1(\zeta) + (1/L) \int_{-x_2}^{x_1} G_2(x, \zeta) dx \rangle L, \quad (64)$$

где $G_1(\zeta)$ определяется из условия нормировки функции $w(x|\zeta) = w_0(x|\zeta) + w_1(x|\zeta)$.

Во втором случае уравнение для случайного процесса $\zeta(t)$ зададим в виде

$$\ddot{\zeta} + \gamma \dot{\zeta} + \zeta = \xi_1(t). \quad (65)$$

Легко показать, что спектральная плотность и корреляционная функция процесса $\zeta(t)$ определяются следующими выражениями:

$$S(\omega) = K_1 / \{ \pi [(\omega^2 - 1)^2 + \gamma^2 \omega^2] \}, \quad (66)$$

$$\langle \zeta(t) \zeta(t+\tau) \rangle = K_1 [(4 - \gamma^2)^{1/2} \cos((1 - \gamma^2/4)^{1/2} \tau) + \gamma \sin((1 - \gamma^2/4)^{1/2} \tau)] \exp(-\gamma \tau / 2) / [2\gamma(4 - \gamma^2)^{1/2}].$$

Отсюда следует, что дисперсия случайного процесса $\zeta(t)$ равна, как и в первом случае, $K_1/(2\gamma)$ и время корреляции обратно пропорционально γ .

Стационарная плотность вероятности для переменных $\zeta, u = \dot{\zeta}$ равна [27]:

$$w(\zeta, u) = p(\zeta)p(u), \quad (67)$$

где $p(x)$ определяется выражением (55). Отсюда видно, что стационарные плотности вероятности для процесса $\zeta(t)$, описываемого уравнением (65), и процесса Орнштейна – Уленбека совпадают. Следует однако заметить, что уравнения (65) и (52) эквивалентны только по отношению к плотности вероятности для переменной ζ . Во всех остальных отношениях они радикально отличаются.

Уравнениям (51), (65) соответствует следующее стационарное уравнение Фоккера – Планка для плотности вероятности $w(x, \zeta, u)$:

$$\partial / \partial x [(f(x) - \zeta) w] - u \partial w / \partial \zeta + \partial / \partial u [(\gamma u + \zeta) w] + (K/2) \partial^2 w / \partial x^2 + (K_1/2) \partial^2 w / \partial u^2. \quad (68)$$

Подставляя в (68) $w(x, \zeta, u) = w(x|\zeta, u)p(\zeta)p(u)$, получаем

$$\begin{aligned} & \partial / \partial x [(f(x) - \zeta) w(x|\zeta, u)] + (K/2) \partial^2 w(x|\zeta, u) / \partial x^2 = \\ & = u \partial w(x|\zeta, u) / \partial \zeta + (\gamma u - \zeta) \partial w(x|\zeta, u) / \partial u - (K_1/2) \partial^2 w(x|\zeta, u) / \partial u^2. \end{aligned} \quad (69)$$

Если характерное время изменения случайного процесса $\zeta(t)$ достаточно велико по сравнению с временем установления условной плотности вероятности $w(x|\zeta, u)$, то правая часть уравнения (69) является малой. В этом случае, как и раньше, можно решать уравнение (69) методом последовательных приближений. В нулевом приближении интересующая нас условная плотность вероятности $w(x|\zeta, u)$ не зависит от u и удовлетворяет тому же самому уравнению, как и в первом случае. Отличие возникает лишь в первом приближении, поскольку $w_1(x|\zeta, u)$ описывается уравнением

$$\partial/\partial x[(f(x)-\zeta)w_1(x|\zeta,u)] + (K/2)\partial^2 w_1(x|\zeta,u)/\partial x^2 = u\partial w_0(x|\zeta,u)/\partial \zeta. \quad (70)$$

Уравнение (70) может быть записано в виде

$$(f(x)-\zeta)w_1(x|\zeta,u) + (K/2)\partial w_1(x|\zeta,u)/\partial x = -uG_2(x,\zeta), \quad (71)$$

где

$$G_2(x,\zeta) = -\partial/\partial \zeta \int_{-x/2}^x w_0(x'|\zeta)dx' + D(\zeta), \quad (72)$$

$D(\zeta)$ – произвольная функция ζ , определяемая из условия периодичности функции $w_1(x|\zeta)$.

Поскольку дополнительный поток вероятности в первом приближении пропорционален u , то в силу (67), (55) его среднее значение равно нулю. Таким образом, здесь, как и раньше, поправка к средней скорости частицы в первом приближении отсутствует.

Как и в п. 2.1, при получении конкретных результатов мы ограничимся нулевым приближением. В этом приближении результаты для обоих рассмотренных случаев совпадают. Найденные зависимости $\langle \dot{x} \rangle$ от K_1/γ при различных значениях K приведены на рис. 6, а. Из рисунка видно, что при фиксированном K значение $\langle \dot{x} \rangle$ сначала растет при увеличении K_1/γ , а затем медленно уменьшается, стремясь к нулю при $K_1/\gamma \rightarrow \infty$. Максимум зависимости $\langle \dot{x} \rangle(K_1/\gamma)$ расположен при тем больших значениях K_1/γ , чем больше K . На рис. 6, б показаны зависимости $\langle \dot{x} \rangle$ от K при фиксированном значении K_1/γ . Эти зависимости также имеют максимум, который расположен при тем меньших значениях K , чем больше K_1/γ .

В заключение следует отметить, что, как видно из материала, представленного в данной работе, количество примеров возникновения направленного движения частиц под влиянием ненаправленных случайных и регулярных сил, поддающихся теоретическому анализу, крайне ограничено. Поэтому при исследовании указанной проблемы часто приходится использовать численное моделирование либо исходных стохастических уравнений, либо соответствующего им уравнения Фоккера – Планка. В первом случае возникает много трудностей, связанных с необходимостью весьма длительного счета,

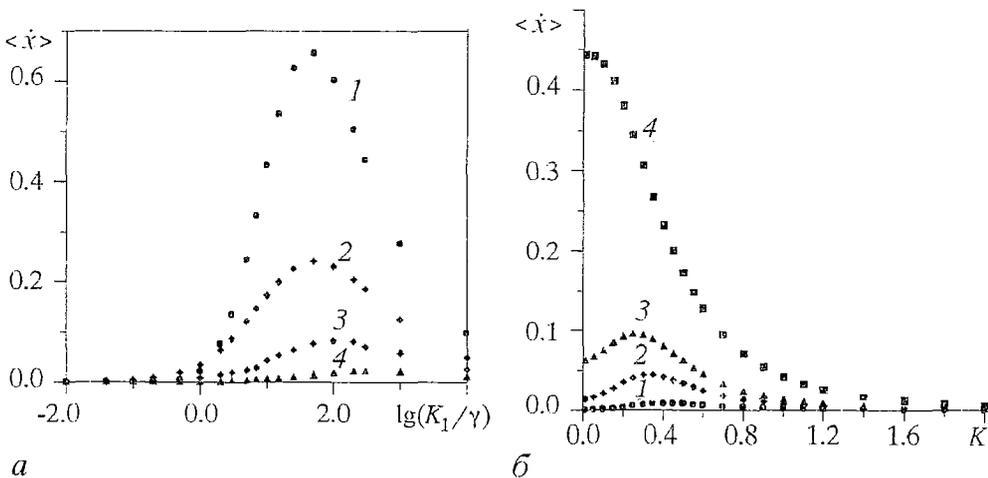


Рис. 6. а – зависимости $\langle \dot{x} \rangle$ от $\lg(K_1/\gamma)$ при различных значениях K : 1 – 0.1, 2 – 0.5, 3 – 1, 4 – 2; б – зависимости $\langle \dot{x} \rangle$ от K при фиксированных значениях K_1/γ : 1 – 0.2, 2 – 1, 3 – 2, 4 – 10. В обоих случаях $U=1, L=1, a_1=1.25, a_2=5$

особенно при малых интенсивностях воздействия, чтобы получить надежные результаты усреднения. Во втором случае задача также является весьма сложной. Этим, по-видимому, можно объяснить тот факт, что результатов численного исследования в данной области имеется сравнительно немного.

Библиографический список

1. *Peskin C., Odell G., and Oster G.* Cellular motions and thermal fluctuations – the Brownian ratchet // *Biophys. J.* 1993. Vol. 65. P. 316.
2. *Svoboda K., Schmidt C.F., Schnapp B.J., and Block S.M.* Direct observation of kinesin stepping by optical trapping // *Nature.* 1993. Vol. 365. P. 721.
3. *Magnasco M.O.* Forced thermal ratchets // *Phys.Rev.Lett.* 1993. Vol. 71. P.1477.
4. *Dean Astumian R., Bier M.* Fluctuation driven ratchets: molecular motors // *Phys.Rev.Lett.* 1994. Vol. 72. P. 1766.
5. *Doering C.R.* Randomly rattled ratchets // *Nuovo Cimento Soc. Ital. Fiz.* 1995. Vol. 17D. P. 685.
6. *Hänggi P., Bartussek R.* Brownian rectifiers: how to convert brownian motion into directed transport // *Nonlinear Physics and Complex Systems – Current Status and Future Trends: Lect. Notes in Physics.* Vol. 476. / Eds J. Parisi, S.C. Müller, and W. Zimmermann. Berlin: Springer-Verlag, 1996. P. 294.
7. *Faucheux L.P., Bourdieu L.S., Kaplan P.D., and Libchaber A.J.* Optical thermal ratchet // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74. P. 1504.
8. Фейнмановские лекции по физике. Т. 4, гл. 46. М.: Мир, 1965.
9. *Smoluchowski M.* // *Physik. Zeitschr.* 1912. Vol. 13. P. 1069.
10. *Brillouin L.* Can the rectifier become a thermodynamical demon? // *Phys. Rev.* 1950. Vol. 78. P. 627.
11. *MacDonald D.K.C.* Brownian movement // *Phys.Rev.* 1957. Vol. 108. P. 541.
12. *Alkemade C.T.J.* On the problem of Brownian motion of non-linear systems // *Physica.* 1958. Vol. 24. P. 1029.
13. *Van Kampen N.G.* Thermal fluctuations in a nonlinear system // *Phys. Rev.* 1958. Vol. 110. P. 319.
14. *Marek A.* A note to recent theories of Brownian motion in non-linear systems // *Physica.* 1959. Vol. 25. P. 1358.
15. *Стратонович Р.Л.* О парадоксе в теории тепловых флуктуаций нелинейных сопротивлений // *Вестник МГУ. Физика, астр.* 1960. № 4. С. 99.
16. *Doering C.R., Horsthemke W., and Riordan J.* Nonequilibrium fluctuation-induced transport // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72. P. 2984.
17. *Schimansky-Geier L., Kschicho M., and Fricke T.* Flux of particles in sawtooth media // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 3335.
18. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.:Наука, 1994.
19. *Стратонович Р.Л.* Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Наука, 1985.
20. *Landa P.S.* Noise-induced transport of Brownian particles with consideration for their mass // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 1325.
21. *Millonas M., Dykman M.I.* Transport and current reversal in stochastically driven ratchets // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 185. P. 65.
22. *Bier M.* Reversals of noise induced flow // *Phys.Lett. A.* 1996. Vol. 211. P. 12.
23. *Ланда П.С., Стратонович Р.Л.* К теории флуктуационных переходов различных систем из одного стационарного состояния в другое // *Вестник МГУ. Физика, астр.* 1962. № 1. С. 33.
24. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.:Наука, 1980.
25. *Bartussek R., Hänggi P., and Kissner J.G.* Periodically rocked thermal ratchets. *Europhys. Lett.* 1994. Vol. 28. P. 459.

26. Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S. On the theory of Brownian motion // Phys. Rev. 1930. Vol. 36. P. 823.

27. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Радио и связь, 1961.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 4.06.98

NOISE-INDUCED TRANSPORT OF BROWNIAN PARTICLES

P.S. Landa

A number of examples of the transport of Brownian particles induced by nonequilibrium fluctuations is considered. The results of approximate analytical calculations for the averaged particle velocity in periodic ratchet-like potential are presented. An analogy between fluctuation-induced transport and well known in mechanics vibrational transport is discussed.



Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много

научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Прикладная нелинейная динамика».