



МЕТОД КВАЗИПОТЕНЦИАЛА В АНАЛИЗЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ АВТОКОЛЕБАНИЙ К СТОХАСТИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

И.А. Башкирцева, Л.Б. Ряшко

На основе метода квазипотенциала исследуется чувствительность автоколебаний нелинейных систем к малым случайным возмущениям. Для случая орбиты на плоскости аппроксимация квазипотенциала задается некоторой скалярной функцией. Эта функция играет роль функции риска, позволяющей сравнивать степень чувствительности различных участков орбиты к случайным возмущениям. На примере стохастического броселятора показано, что функция риска является простой теоретической характеристикой, позволяющей предсказывать характерные особенности в распределении случайных траекторий около предельного цикла.

Для многих систем с автоколебаниями математической моделью служит нелинейная детерминированная n -мерная система

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

имеющая T -периодическое решение $x = \xi(t)$ с фазовой траекторией Γ (Γ – предельный цикл). Классический анализ устойчивости периодических движений к возмущению начальных данных [1,2] предполагает переход к линейной системе первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z, \quad F(t) = \partial/\partial x f(\xi(t))$$

и поиску ее мультипликаторов. Поскольку один из мультипликаторов всегда равен единице, данный подход в случае системы на плоскости ($n=2$) приводит к единственному количественному показателю устойчивости цикла – мультипликатору

$$\rho = \exp\left[\int_0^T \text{tr} F(t) dt\right]. \quad (2)$$

При этом необходимым и достаточным условием экспоненциальной орбитальной устойчивости является неравенство $\rho < 1$ (признак Пуанкаре), а сама величина ρ указывает (асимптотически), во сколько раз траектория приближается к циклу за один оборот. Таким образом, сравнивая степень устойчивости двух различных циклов, можно считать более устойчивым тот цикл, чей мультипликатор окажется меньшим.

Данная логика годится для возмущений, воздействующих однократно, когда

система, получив в начальный момент времени некоторый импульс, повлекший за собой сход с орбиты, движется далее идеально, безо всяких возмущений, асимптотически приближаясь к циклу. Вместе с тем большинство реальных систем функционирует в условиях постоянного воздействия помех самой различной природы, когда система испытывает достаточно большое число возмущающих импульсов уже на протяжении времени одного оборота. В этих обстоятельствах мультипликатор является слишком грубой интегральной характеристикой, не позволяющей различать и сравнивать между собой различные участки орбиты по степени их устойчивости.

В данной работе исследуется воздействие малых случайных возмущений, сопровождающих движения нелинейных систем в окрестности устойчивого предельного цикла.

Традиционной математической моделью здесь является система стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, \quad (3)$$

где $w(t)$ – n -мерный стандартный винеровский процесс; $\sigma(x)$ – $n \times n$ -матричная функция, характеризующая распределение помех по координатам; ε – параметр интенсивности случайных возмущений.

Исследование автоколебаний нелинейных систем в присутствии случайных возмущений было начато в [3] и продолжено в большом числе работ (см., например, [4–10]). Библиографический обзор последних результатов можно найти в [11].

Исчерпывающее вероятностное описание системы (3) в терминах плотности распределения дается уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова. Однако прямое использование этого уравнения даже в простейшей ситуации – нелинейного стохастического осциллятора с одной степенью свободы – весьма затруднительно. Для случая квазигармонических колебаний успешно использовались гауссовы приближения [10].

В последнее время при исследовании стохастической динамики активно разрабатывается новый подход, связанный с использованием некоторой функции, называемой квазипотенциалом. Впервые квазипотенциал появился в работах А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина в связи с решением известной задачи Колмогорова о выходе случайной траектории из окрестности устойчивой точки покоя (см., например, [12–14]).

Квазипотенциал $v(x)$ задает следующую асимптотику стационарной плотности распределения $\rho(x, \varepsilon)$

$$v(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \rho(x, \varepsilon).$$

При малых ε справедлива аппроксимация

$$\rho(x, \varepsilon) \approx K \exp[-v(x)/\varepsilon^2]. \quad (4)$$

Квазипотенциал позволяет находить некоторые важные вероятностные характеристики (среднее время выхода случайной траектории из области, наиболее вероятную точку выхода).

В п. 1 дается локальное описание функции $v(x)$ в окрестности предельного цикла Γ , использующее некоторую новую конструкцию – функцию риска. Функция риска определена в точках цикла Γ и характеризует на различных участках этого цикла разброс пучка случайных траекторий, формирующегося в результате стохастически возмущенного движения. Данная функция позволяет сравнивать степень чувствительности различных частей цикла к вносимым стохастическим помехам, предсказывая достаточно тонкие эффекты случайных воздействий. Возможности такого анализа демонстрируются в п. 2 на примере

стохастического брасселятора. При помощи функции риска удастся найти критические значения параметров, при которых система будет наиболее чувствительна к малым случайным возмущениям.

1. Квазипотенциал и его аппроксимация

Квазипотенциал $v(x)$ в окрестности D цикла Γ удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби

$$1/2(\partial v/\partial x, \sigma(x)\sigma^T(x)\partial v/\partial x) + (f(x), \partial v/\partial x) = 0$$

с условиями

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad v|_{D\Gamma} > 0.$$

Отыскание квазипотенциала путем непосредственного решения данного уравнения является достаточно сложной задачей. В [11] обсуждается возможность его решения на основе метода характеристик. Применительно к задачам устойчивости, когда основное внимание уделяется поведению системы в малой окрестности, для квазипотенциала достаточно иметь лишь хорошее приближение вблизи цикла.

Локальная аппроксимация квазипотенциала $v(x)$ в малой окрестности цикла Γ дается [15,16] орбитальной квадратичной формой $\varphi(x)$

$$v(x) \approx \varphi(x), \quad \varphi(x) = (\Delta(x), \Phi(\gamma(x))\Delta(x)). \quad (5)$$

Здесь $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка траектории Γ ; $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ вектор отклонения точки x от цикла Γ ; $\Phi(\gamma)$ – $n \times n$ матричная функция, задаваемая на Γ и связанная с $v(x)$ равенством

$$\Phi(\gamma) = 1/2 \partial^2 / \partial x^2 v(\gamma).$$

Функция $x = \xi(t)$, T -периодическое решение системы (1), задает естественную параметризацию цикла Γ , устанавливая соответствие между точками γ цикла Γ и моментами времени t интервала $[0, T)$. Действительно, для любого t из $[0, T)$ выделяется точка $\gamma = \xi(t)$ с цикла Γ и, наоборот, для произвольной точки γ можно указать момент времени $t = t(\gamma)$, где $t(\gamma)$ – функция, обратная к $\xi(t)$ на $[0, T)$. При этом справедливо равенство $\Phi(\gamma) = V(t(\gamma))$, где $V(t) = 1/2 \partial^2 / \partial x^2 v(\xi(t))$. Таким образом, функция $\Phi(\gamma)$, а вслед за ней и аппроксимация $\varphi(x)$ квазипотенциала $v(x)$ однозначно определяется по T -периодической матрице $V(t)$.

Матрица $V(t)$ является единственным решением уравнения

$$\dot{V} + F^T(t)V + VF(t) + 2VS(t)V = 0, \quad (6)$$

где

$$F(t) = \partial / \partial x f(\xi(t)), \quad S(t) = \sigma(\xi(t))\sigma^T(\xi(t)).$$

Замена $W = V^+$ («+» означает псевдообращение) приводит к линейному уравнению

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + 2P(t)S(t)P(t). \quad (7)$$

Здесь $P(t) = P_{f(\xi(t))}$, где $P_r = I - r r^T / r^T r$ – матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$. Итогом всех преобразований является формула

$$\varphi(x) = (\Delta(x), W^+(t(\gamma(x)))\Delta(x)).$$

Случай цикла на плоскости. Функция риска

В случае системы на плоскости ($n=2$) $P(t)=p(t)p^T(t)$, где $p(t)$ – нормированный вектор, ортогональный касательному вектору $f(\xi(t))$. При этом решения уравнений (6), (7) задаются соотношениями

$$W(t) = \mu(t)P(t), \quad V(t) = (1/\mu(t))P(t) \quad (8)$$

и выражаются через T -периодическую функцию $\mu(t)>0$. Функция $\mu(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mu} = a(t)\mu + b(t)$$

с T -периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^T(t)[F^T(t) + F(t)]p(t), \quad b(t) = 2p^T(t)S(t)p(t).$$

Искомое T -периодическое решение этого уравнения дается следующим равенством

$$\mu(t) = g(t)[c + h(t)],$$

где

$$g(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right), \quad h(t) = \int_0^t [b(s)/g(s)]ds,$$

$$c = g(T)h(T)/[1-g(T)].$$

Отметим, что мультипликатор (2) и соответствующий характеристический показатель $\lambda=(1/T)\ln\rho$ связаны с функцией $a(t)$ следующими соотношениями

$$\rho = \exp[1/2 \int_0^T a(s)ds], \quad \lambda = [1/(2T)] \int_0^T a(s)ds. \quad (9)$$

В свою очередь функция $\varphi(x)$, задающая аппроксимацию квазипотенциала $v(x)$, приобретает в двумерном случае (см.(5), (8)) весьма простой вид

$$\varphi(x) = |\Delta(x)|^2/m(x), \quad (10)$$

где числитель определяется исключительно формой предельного цикла, а знаменатель $m(x)=\mu(t(\gamma(x)))$ однозначно выражается через введенную выше T -периодическую скалярную функцию $\mu(t)$. По существу функция $\mu(t)$ и определяет характер зависимости $\varphi(x)$ от воздействующих на цикл Γ случайных возмущений.

В результате стационарная плотность $\rho(x,\varepsilon)$ вблизи цикла при малых помехах может быть записана в форме нормального распределения

$$\rho(x,\varepsilon) \approx K \exp\{-|\Delta(x)|^2/[\varepsilon^2 m(x)]\}. \quad (11)$$

При этом функция $D(\gamma)=1/2\varepsilon^2 m(\gamma)$ задает асимптотику дисперсии нормальной составляющей отклонения исследуемого случайного процесса $x(t)$ от цикла Γ в окрестности точки γ .

Будем трактовать исследуемую систему (3) как некоторый преобразователь стохастичности (см.[9]), связывающий стохастический вход интенсивности ε со стохастическим выходом интенсивности D . Тогда функция $m(\gamma)$ играет роль коэффициента усиления стохастичности. Различные участки цикла Γ по-разному реагируют на одну и ту же величину ε стохастичности входа (даже при $\sigma(x)\equiv\text{const}$).

Дисперсия $D(\gamma)$ в различных точках цикла в соответствии с изменением

значений функции $m(\gamma)$ может меняться весьма существенно (см. п. 2). По сути дела $m(\gamma)$ задает для цикла Γ некоторую функцию риска. Эта функция характеризует разброс вокруг детерминированного цикла Γ пучка случайных траекторий, сформировавшегося в результате воздействия на движения исходной детерминированной системы малых случайных возмущений.

В анализе влияния случайных возмущений на стохастическую динамику системы около предельного цикла важную роль играет величина

$$M = \max_{\gamma \in \Gamma} m(\gamma) = \max_{[0, T]} \mu(t). \quad (12)$$

Величину M будем называть коэффициентом чувствительности цикла Γ к случайным возмущениям. Действительно, в случае $M > 2$ имеем $\max D > \varepsilon^2$, то есть исследуемая система функционирует как усилитель стохастичности. При очень больших значениях M , когда малые (фоновые) помехи приводят к ощутимым флуктуациям случайных траекторий, система практически работает как генератор стохастичности. Точки γ , в которых функция $m(\gamma)$ принимает значения, близкие к максимальным, отмечают на цикле участки, наиболее чувствительные к случайным помехам.

Другой естественной характеристикой здесь будет величина

$$\eta = \max m(\gamma) / \min m(\gamma)$$

характеризующая перепад дисперсии случайного пучка траекторий при движении вдоль цикла. Величина η есть параметр стохастической жесткости цикла Γ .

Введенные здесь параметры: функция риска $m(\gamma)$, коэффициент чувствительности $M = \max m$, коэффициент стохастической жесткости $\eta = \max m / \min m$ позволяют предсказывать достаточно тонкие эффекты воздействия малых случайных возмущений на весьма общие нелинейные системы с предельными циклами.

2. Стохастический брюсселятор

Рассмотрим стохастическую систему

$$\dot{x} = a - (b+1)x + x^2y + \varepsilon \dot{w}_1,$$

$$\dot{y} = bx - x^2y + \varepsilon \dot{w}_2,$$

полученную добавлением малых аддитивных стохастических возмущений в классическую детерминированную модель – брюсселятор [17]. Здесь $w_1(t)$, $w_2(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы, ε – малый параметр. Известно, что при $b > b' = 1 + a^2$ у детерминированной системы ($\varepsilon = 0$) появляется предельный цикл (b' – бифуркационное значение). Рассмотрим результаты сравнительного анализа устойчивости циклов этой системы, проведенного при $a = 0.2$ для различных значений параметра $b > b' = 1.04$ в диапазоне [1.06, 1.07]. Зависимость основных характеристик цикла от величины b представлена в таблице. Для двух важнейших – характеристического показателя λ и коэффициента чувствительности M (см. (9) и (12)) – эта зависимость представлена на рис. 1 и 2 графически.

Как видно из рис. 1, показатель λ с ростом b монотонно убывает, что означает увеличение степени устойчивости цикла к возмущению начальных данных. Казалось бы это должно сопровождаться соответствующим снижением чувствительности цикла и к случайным возмущениям. Однако, здесь наблюдается обратное. Величина M ведет себя совсем иначе (см. рис. 2).

Зависимость от параметра b характеристик цикла брюсселятора ($a=0.2$):
 T – период цикла, ρ – мультипликатор, λ – характеристический показатель,
 $M=\max m$ и $\min m$ – экстремальные значения функции риска,
 η – коэффициент стохастической жесткости

b	T	ρ	λ	$\max m$	$\min m$	$\eta=\max m/\min m$
1.060	40.8	$1.3 \cdot 10^{-1}$	$-5.0 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^5$	4.56	$9.8 \cdot 10^4$
1.062	44.3	$3.9 \cdot 10^{-2}$	$-7.3 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^6$	3.03	$7.1 \cdot 10^5$
1.064	63.7	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$-2.4 \cdot 10^{-1}$	$5.6 \cdot 10^9$	1.12	$5.0 \cdot 10^9$
1.066	86.4	$1.6 \cdot 10^{-27}$	$-7.1 \cdot 10^{-1}$	$3.3 \cdot 10^6$	0.58	$5.7 \cdot 10^6$
1.068	85.4	$3.2 \cdot 10^{-28}$	$-7.4 \cdot 10^{-1}$	$6.6 \cdot 10^5$	0.58	$1.2 \cdot 10^6$
1.070	84.7	$1.2 \cdot 10^{-28}$	$-7.6 \cdot 10^{-1}$	$2.6 \cdot 10^5$	0.57	$4.7 \cdot 10^5$

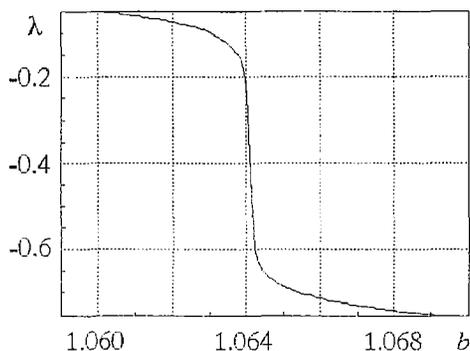


Рис. 1. Зависимость характеристического показателя λ от параметра b

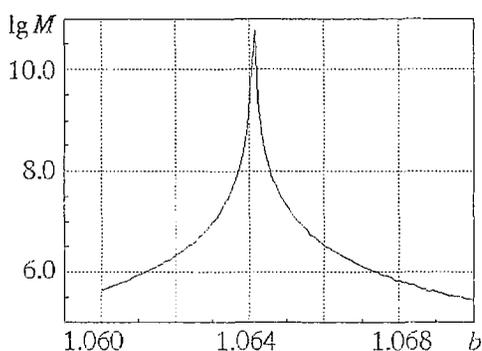


Рис. 2. Зависимость коэффициента чувствительности брюсселятора к случайным возмущениям M от параметра b

На рассматриваемом интервале функция $M(b)$ резко возрастает, график ее имеет острый высокий пик и лишь затем начинает убывать. При этом перепад значений $M(b)$ достигает нескольких порядков. Критическим значением параметра b здесь является

$$b_* = \arg \max_b M(b) = 1.064085,$$

при котором $M(b_*)=8.8 \cdot 10^{10}$. Сравним поведение случайных траекторий стохастического брюсселятора при значениях параметра b , близких к b_* .

На рис. 3 для трех значений параметра b , одно из которых критическое, изображены пучки случайных траекторий, найденные прямым численным моделированием брюсселятора, возбуждаемого малой случайной помехой интенсивности $\varepsilon=10^{-5}$.

На рис. 4 представлены графики соответствующих функций риска. На рис. 5 представлены значения этих функций риска, соотношенных с точками соответствующих детерминированных циклов. В каждой точке цикла значение функции риска представлено кругом с радиусом, пропорциональным этому значению.

В расположении пучков на циклах можно заметить следующие характерные особенности. Наиболее широкая часть пучка располагается в нижней части цикла, при этом оставшаяся часть пучка практически не выступает за линию, изображающую идеальную детерминированную траекторию невозмущенного цикла. Как видим при $b=b_*$ (см. рис. 3, б) бруссельатор наиболее чувствителен к выбранному весьма малому случайному возмущению. Как видно из рис. 5 и 4, функция риска достаточно хорошо передает замеченные особенности. Эта функция позволяет предсказывать как местонахождение наиболее и наименее чувствительных к помехам участков, так и величины перепада этой чувствительности вдоль циклов. Действительно, максимумы функции риска (см. рис. 5) соответствуют наиболее чувствительным участкам, а пики (см. рис. 4) отмечают моменты времени прохождения траектории по этим чувствительным участкам.

Высота пика (μ_{max}) определяет максимальную ширину пучка. Величина η характеризует перепад величины разброса случайных траекторий около цикла.

Как видим, в рассмотренном диапазоне параметров модель бруссельатора со случайными возмущениями является примером стохастической системы с высокой степенью жесткости. Воздействие малых (по сути – фоновых) помех приводит к ощутимым флуктуациям случайных траекторий. Как показали приведенные выше примеры, функция риска является достаточно простой аналитической

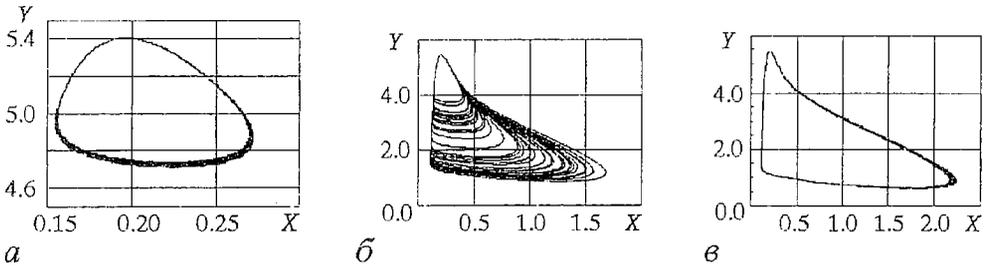


Рис. 3. Пучки случайных траекторий бруссельатора, возбуждаемого случайной помехой, для различных значений параметров b : а – 1.06; б – 1.064085 (критическое значение); в – 1.065

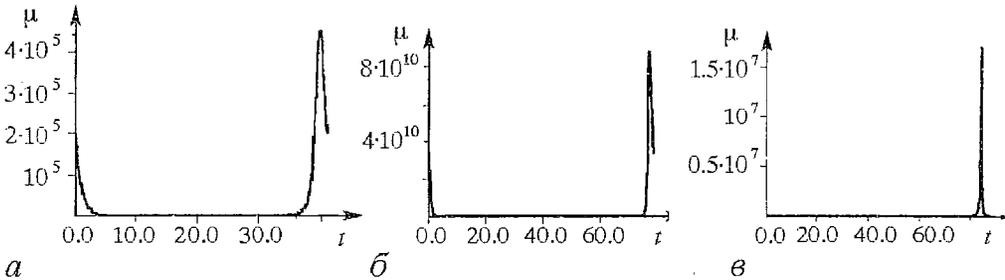


Рис. 4. Функции риска пучков случайных траекторий, изображенных на рис. 3, а, б, в, соответственно

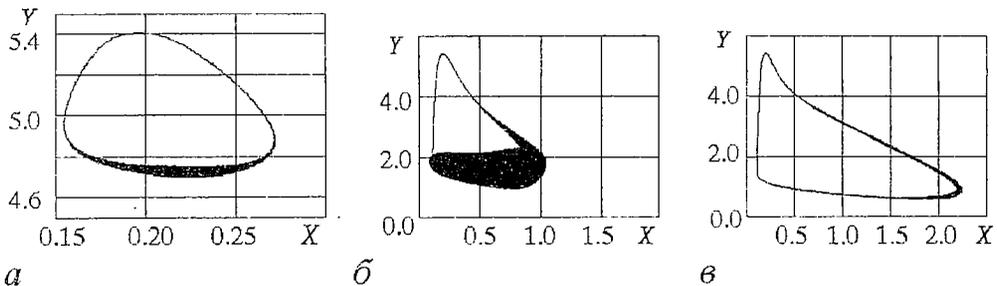


Рис. 5. Значения функций риска, соотнесенные с точками соответствующих детерминированных циклов

характеристикой, позволяющей предсказывать замеченные особенности в реакции нелинейной системы на стохастические возмущения.

Функция риска по существу есть мера чувствительности отдельных участков цикла к малым случайным помехам. Чувствительность цикла в целом характеризуется величиной $M = \max t$.

Анализ функции $M(b)$ позволяет исследовать зависимость стохастической чувствительности системы от параметра b , дает возможность находить для этого параметра критические значения. Наряду с характеристическим показателем, дающим грубую интегральную оценку запаса устойчивости предельного цикла к разовым возмущениям начальных данных, функция риска позволяет вести тонкий анализ чувствительности предельного цикла к постоянно действующим случайным помехам.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства общего и профессионального образования № 97-0-1.7-72.

Библиографический список

1. Андронов А.А., Витт А.А. Об устойчивости по Ляпунову // ЖЭТФ. 1933. Т. 2, вып. 5. С. 373.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
3. Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А. О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165.
4. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
5. Рытов С.М. Введение в стохастическую радиофизику. М.: Наука, 1976.
6. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
7. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
8. Анищенко В.С. Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч. 1,2. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985.
9. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
10. Soong T.T., Grigoriu M. Random vibration of mechanical and structural systems. Englewood Cliffs, New Jersey: RTR Prentice-Hall, 1993.
11. Smelyanskiy V.N., Dykman M.I., Maier R.S. Topological features of large fluctuations to the interior of a limit cycles // Physical Review E. 1997. Vol. 55, № 3. P. 2369.
12. Венцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
13. Day M.V. Regularity of boundary quasi-potentials for planar systems // Applied Mathematics and Optimization. 1994. Vol.30. P.79.
14. Naeh T., Klosek M.M., Matkowsky B.J., Schuss Z. A direct approach to the exit problem // SIAM Journal Appl. Math. 1990. Vol.50, № 2. P.595.
15. Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б. Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 1. С.51.
16. Ряшко Л.Б. Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып.4. С. 582.
17. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1977.

Уральский государственный
университет

Поступила в редакцию 23.06.98
после переработки 7.10.98

QUASIPOTENTIAL IN SENSITIVITY ANALYSIS OF THE STOCHASTICALLY FORCED AUTO-OSCILLATIONS

I.A. Bashkirtseva, L.B. Ryashko

The problem of auto-oscillations sensitivity of nonlinear system with respect to small stochastic disturbances is considered. The sensitivity analysis on the base of the quasipotential function is used. For the plane orbit case the quasipotential approximation is given by some scalar function. This function plays a role of risk function allowing to compare the sensitivity levels of the different pieces of orbits. For stochastically forced brusselator we demonstrate that risk function is a simple theoretical predictor of the characteristics of random trajectories distribution about the stable limit cycle.



Башкирцева Ирина Адольфовна – родилась в 1965 году, окончила Уральский госуниверситет (1987), кандидат физико-математических наук (1997), старший преподаватель кафедры вычислительной математики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных динамических систем.



Ряшко Лев Борисович – родился в 1953 году, окончил Уральский госуниверситет (1975), кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой вычислительной математики Уральского госуниверситета, Соросовский доцент (1996,1998). Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.