

КОЛЕБАНИЯ В ДВУХКОЛЬЦЕВОЙ СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

В.П. Пономаренко, С.А. Кузовкин

Исследованы динамические режимы и бифуркационные переходы в моделях системы двух генераторов с фазовой автоподстройкой частоты и автоподстройкой задержки во времени, взаимодействующих через однонаправленные связи. Изучены закономерности возникновения и преобразования динамических режимов в системе при изменении начальных рассогласований по частоте и задержке. Выяснено, что система может демонстрировать сложные колебательные режимы, невозможные в автономных парциальных системах.

1. Изучение явлений коллективного поведения связанных автоколебательных систем составляет сейчас одно из основных направлений в теории колебаний и нелинейной динамикс. Понимание процессов, сопровождающих такие явления, и, в первую очередь, процессов синхронизации и хаотизации, помимо фундаментального значения необходимо и для ряда важных практических приложений, связанных с генерацией, приемом и обработкой сигналов. Важное значение в классе связанных автоколебательных систем имеют системы взаимодействующих автогенераторов, управляемых по частоте с использованием принципов фазовой или частотной автоподстройки [1–3]. Существо этих принципов заключается в измерении текущего рассогласования фаз или частот колебаний управляемого генератора и входного сигнала и коррекции по результатам этого измерения частоты или фазы управляемого генератора в сторону уменьшения рассогласования. Проблема изучения процессов возникновения, развития и преобразования динамических режимов в таких системах и выяснения роли параметров цепей управления, структур и параметров связей между парциальными системами в этих процессах имеет как теоретическое, так и прикладное значение.

Объектом исследования в данной работе является система двух связанных генераторов, один из которых охвачен петлей фазовой автоподстройки (ФАП), а другой – петлей автоподстройки задержки во времени (АПЗ). Взаимодействие генераторов осуществляется через однонаправленную связь с выхода АПЗ на вход ФАП и связь по цепям управления, через которую реализуется передача управляющего сигнала ФАП в цепь управления АПЗ. Рассматриваемая двухкольцевая связанная система (ДСС) интересна тем, что она является одной из базовых структур при решении задач следящей оценки изменяющихся параметров фазоманипулированных псевдослучайных радиосигналов (фазы $\Theta(t)$ и задержки $T(t)$) в системах широкополосной связи [3–6]. Цепи управления не только

позволяют реализовать процесс слежения за параметрами Θ и T (в котором фаза Θ^* и задержка T^* сигнала, формируемого в ДСС, минимально отличаются от параметров Θ и T , соответственно), но и создают широкие возможности для возбуждения разнообразных асинхронных режимов (соответствующих автомодуляционным колебаниям генераторов) и проявления эффектов динамического хаоса. Варьируя параметры цепей управления, можно эффективно воздействовать на свойства и области существования генерируемых колебаний. Эта особенность делает ДСС интересным объектом для исследования закономерностей динамического поведения, демонстрируемых связанными автоколебательными системами. С другой стороны, изучение асинхронных движений, реализуемых в ДСС, важно в связи с имеющейся тенденцией к расширению функциональных возможностей систем на основе целенаправленного использования свойственных им многообразных состояний и динамических явлений. В данной работе проводится исследование процессов возникновения и эволюции асинхронных режимов, демонстрируемых динамическими моделями ДСС с одной и двумя степенями свободы.

2. Уравнения динамики исследуемой ДСС получаем из уравнений для оценок Θ^* и T^* , выведенных в [4,6]. Записанные для рассогласований фаз φ и задержек x входного сигнала и сигнала, формируемого в ДСС, уравнения динамики в операторной форме ($p \equiv d/dt$) имеют вид

$$p\varphi/k = \gamma - F_1(p)R(x)\sin\varphi, \quad x = \sigma - bF_2(p)(D(x) + \alpha b^{-1}R(x)\sin\varphi), \quad (1)$$

где γ и σ – относительные начальная частотная и временная расстройки, k и b – коэффициенты усиления цепей управления ФАП и АПЗ; α – степень связи через управляющие сигналы; $F_1(p)$ и $F_2(p)$ – коэффициенты передачи фильтров низких частот (ФНЧ) в цепях управления ФАП и АПЗ; $R(x)$ и $D(x)$ – нелинейности, определяемые зависимостями [4,5]

$$R(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad D(x) = \begin{cases} -2-x, & -2 \leq x \leq -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

Конкретный вид и размерность уравнений (1) зависят от коэффициентов передачи $F_1(p)$ и $F_2(p)$, которые, в свою очередь, определяются принятыми моделями изменения оцениваемых параметров Θ и T . Будем рассматривать $F_1(p) = (1+mT_1p)/(1+T_1p)$ и $F_2(p) = 1/[1+(T_2+T_3)p+T_2T_3p^2]$ (здесь T_1 , T_2 и T_3 – постоянные времени, $0 \leq m < 1$), соответствующие достаточно распространенным моделям динамики параметров Θ и T [4]. Вводя безразмерные время $\tau = kt$ и параметры инерционности $\varepsilon_1 = kT_1$, $\varepsilon_2 = kT_2$, $\varepsilon_3 = kT_3$, а также вспомогательную переменную $u = d\varphi/d\tau + mR(x)\sin\varphi$, из (1) получим следующие уравнения динамики рассматриваемой ДСС

$$\begin{aligned} d\varphi/d\tau &= u - mR(x)\sin\varphi, \\ \varepsilon_1 du/d\tau &= \gamma - u - (1-m)R(x)\sin\varphi \equiv Q_1(\varphi, u, x), \\ dx/d\tau &= v, \\ \varepsilon_2 \varepsilon_3 dv/d\tau &= \sigma - x - bD(x) - \alpha R(x)\sin\varphi - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)v \equiv Q_2(\varphi, x, v). \end{aligned} \quad (2)$$

Система (2) имеет цилиндрическое фазовое пространство $U = \{\varphi(\text{mod } 2\pi), u, x, v\}$.

Поведение автономной подсистемы ФАП описывается двумя первыми уравнениями системы (2), в которых надо положить $R(x)=1$. В «парциальном фазовом пространстве» $(\varphi(\text{mod}2\pi), u)$ существует два типа аттракторов: состояние равновесия (соответствующее состоянию синхронизации) и вращательный $(2\pi$ -периодический по φ) предельный цикл (соответствующий асинхронному режиму биений второго рода) [1,2]. Уравнения динамики автономной АПЗ получаем из двух последних уравнений системы (2), если в них положить $\alpha=0$. Согласно результатам [7] для динамики АПЗ с ФНЧ второго порядка характерны движения в «парциальном фазовом пространстве» (x, v) , стремящиеся к одному из двух устойчивых состояний равновесия, автоколебательные движения невозможны. Таким образом, система (2) описывает поведение ДСС, в которой парциальные системы ФАП и АПЗ в отдельности демонстрируют регулярную динамику.

Исследование системы (2) проведено с помощью качественно-численных методов и моделирования по следующей схеме. Вначале система (2) рассматривается в случае $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_3 \ll 1/\varepsilon_2$, когда она содержит малые параметры при производных du/dt и dv/dt . Так как $Q'_{1u} + Q'_{2v} = -(1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) < 0$ и $Q'_{1u}Q'_{2v} - Q'_{1v}Q'_{2u} = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 > 0$, то согласно [8] в этом случае система (2) имеет в фазовом пространстве U асимптотически устойчивую интегральную поверхность $V = \{Q_1(\varphi, u, x) = 0, Q_2(\varphi, x, v) = 0\}$, движения на которой определяются системой уравнений

$$d\varphi/dt = \gamma - R(x)\sin\varphi, \quad dx/dt = (1/\varepsilon_2)(\sigma - x - bD(x) - \alpha R(x)\sin\varphi) \quad (3)$$

на цилиндрической фазовой поверхности $U_0(\varphi(\text{mod}2\pi), x)$. Согласно [8] при $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_3 \ll 1/\varepsilon_2$ движения системы (2) в фазовом пространстве U происходят в два этапа: при любых начальных условиях изображающая точка за короткий промежуток времени приходит в малую окрестность поверхности V , затем следуют «медленные» движения, описываемые уравнениями (3), которые стремятся к одному из притягивающих движений системы (3). Динамика системы (3) рассмотрена в случае $\varepsilon_2 \gg 1$, когда удается получить полную картину возможных движений и бифуркаций. Изучение явлений динамики, возникающих при увеличении параметров ε_1 и ε_3 (демонстрируемых моделью (2)) проведено методами численного моделирования [9]

3. В силу инвариантности системы (3) относительно замены $(\varphi, x, \gamma, \sigma) \rightarrow (-\varphi, -x, -\gamma, -\sigma)$ достаточно рассматривать ее при значениях $\gamma \geq 0$. При значениях параметров $(\gamma, \sigma, b, \alpha) \in C_0$, где

$$C_0 = \max(\sigma_2, \sigma_3) < \sigma < \min(\sigma_1, \sigma_4),$$

$$\sigma_1 = (1+b)(1-\gamma) + \alpha\gamma, \quad \sigma_2 = -(1+b)(1-\gamma) + \alpha\gamma,$$

$$\sigma_3 = -(1+b)(1+\gamma) + \alpha\gamma, \quad \sigma_4 = (1+b)(1+\gamma) + \alpha\gamma,$$

система (3) имеет два состояния равновесия $A_1(\varphi_0, x_0)$ и $A_2(\pi - \varphi_0, x_0)$, расположенные в области фазового цилиндра U_0 . Координаты φ_0 и x_0 определяются равенствами $\varphi_0 = \arcsin\{\gamma/[1 - x_0 \text{sign}(\sigma - \alpha\gamma)]\}$, $x_0 = (\sigma - \alpha\gamma)/(1+b)$. Состояние равновесия A_1 — устойчиво при следующих значениях параметров из области C_0 : $\sigma - \alpha\gamma < 0$; $\sigma - \alpha\gamma < 0$, $\alpha > b$; $\alpha\gamma < \sigma < 1+b$, $\alpha > b$. При значениях $\alpha > b$, $\sigma > \max(\alpha\gamma, 1+b)$ состояние равновесия A_1 устойчиво, если

$$\delta = (1+b)^{-1}[(1+b - \sigma + \alpha\gamma)^2 - \gamma^2(1+b)^2]^{1/2} + (1+b)\varepsilon_2^{-1}(1+b - \sigma + \alpha\gamma)^{-1}(1+b - \sigma) > 0,$$

и неустойчиво, если $\delta < 0$. Состояние равновесия A_2 — седло. Устойчивому

состоянию равновесия A_1 отвечает режим слежения ДСС, а область устойчивости A_2 определяет область удержания этого состояния при изменении параметров γ , σ , α , b и ε_2 .

Рассмотрим систему (3) в случае $\varepsilon_2 \gg 1$, соответствующем сильно инерционной цепи управления АПЗ, который интересен тем, что здесь удается получить аналитические оценки областей значений параметров, отвечающих различным типам движений в системе. При помощи замены $d\tau_1 = (\gamma - R(x) \sin \varphi) d\tau$ система (3) преобразуется в систему

$$d\varphi/d\tau_1 = 1 = \partial H(\varphi, x)/\partial x + \mu p(\varphi, x), \quad (4)$$

$$dx/d\tau_1 = \mu(\sigma - x - bD(x) - \alpha R(x) \sin \varphi) / (\gamma - R(x) \sin \varphi) = -\partial H(\varphi, x)/\partial \varphi + \mu q(\varphi, x)$$

(где $H(x, \varphi) = x$, $p(\varphi, x) = 0$, $q(\varphi, x) = (\sigma - x - bD(x) - \alpha R(x) \sin \varphi) / (\gamma - R(x) \sin \varphi)$, $\mu = 1/\varepsilon_2$), исследование которой проведем методом малого параметра (методом Понтрягина). При $\mu = 0$ система (4) является консервативной, ее фазовые траектории определяются уравнением $H(\varphi, x) = h$ ($h = \text{const}$) и представляют собой замкнутые кривые, охватывающие фазовый цилиндр U_0 (при $0 < \gamma < 1$ эти кривые для значений $|h| > 1 - \gamma$ расположены в области $\gamma - R(x) \sin \varphi > 0$). Значения h , соответствующие замкнутым кривым консервативной системы, от которых при малых $\mu > 0$ рождаются вращательные предельные циклы системы (4), находятся из уравнения [10]

$$\Psi(h) = \int_{x=h}^{\pi} [q(\varphi, x) - p(\varphi, x)] dx = \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma - x - bD(x) - \alpha R(x) \sin \varphi] / [\gamma - R(x) \sin \varphi] d\varphi = 0.$$

Функция $\Psi(h)$ для системы (4) имеет вид

$$\Psi(h) = \begin{cases} 2\pi[\sigma + 2b + (b-1)h]/\gamma, & 2 \leq h \leq -1, \\ 2\pi\{\alpha + [\sigma - \alpha\gamma - (1+b)h]/[\gamma^2 - (1+h)^2]^{1/2}\}, & 1 \leq h \leq 0, \\ 2\pi\{\alpha + [\sigma - \alpha\gamma - (1+b)h]/[\gamma^2 - (1-h)^2]^{1/2}\}, & 0 \leq h \leq 1, \\ 2\pi[\sigma - 2b + (b-1)h]/\gamma, & 1 \leq h \leq 2, \\ 2\pi(\sigma - h)/\gamma, & |h| \geq 2. \end{cases} \quad (5)$$

Исследование функции $\Psi(h)$ по уравнениям (5) позволило выяснить следующие свойства динамического поведения системы (4). Значения $\gamma = (\sigma^2 + \alpha^2) / 2\alpha\sigma \equiv \gamma_1^*(\sigma, \alpha)$, где $\alpha\{[(1+b)^2 + \alpha^2]^{1/2} - \alpha\} / (1+b) < \sigma < \alpha$, и значения $\sigma = \pm 2$ и $\sigma = \pm(1+b)$, соответствующие существованию двойных корней у уравнения $\Psi(h) = 0$, являются бифуркационными; они отвечают наличию в системе (4) при $0 < \mu \ll 1$ двойных вращательных предельных циклов, которые рождаются от кривых $h=0$, $h=\pm 2$ и $h=\pm(1+b)$, соответственно. Условия $\Psi(h^*) = 0$, $\Psi'(h^*) = 0$ ($1 - \gamma < h^* < 1$ при $0 < \gamma < 1$, $0 < h^* < 1$ при $\gamma > 1$) определяют значения параметров $\gamma = (1+b-\sigma) / \{[(1+b)^2 + \alpha^2]^{1/2} - \alpha\} \equiv \gamma_2^*(\sigma, b, \alpha)$, где $\alpha\{[(1+b)^2 + \alpha^2]^{1/2} - \alpha\} / (1+b) < \sigma < 1+b$, которые также соответствуют двойному вращательному предельному циклу, появляющемуся от кривой $h=h^*$. При значениях $\gamma = (1+b-\sigma) / (1+b-\alpha) \equiv \gamma_1(\sigma, b, \alpha)$, где $\min(\alpha, 1+b) < \sigma < \max(\alpha, 1+b)$, и $\gamma = (1+b+\sigma) / (1+b+\alpha) \equiv \gamma_2(\sigma, b, \alpha)$, где $-1-b < \sigma < \alpha$, определяемых из условий $\Psi(h_{1,2}) = 2\pi\alpha$, $\Psi'(h_{1,2}) = -\infty$ ($h_1 = 1 - \gamma > 0$, $h_2 = -1 + \gamma < 0$, $0 < \gamma < 1$), система (4) имеет при $0 < \mu \ll 1$ петли сепаратрис седло-узлов в областях $x > 0$ и $x < 0$, соответственно. Уравнение $\Psi(h) = 0$ не имеет корней, а система (4) при $0 < \mu \ll 1$ не имеет предельных циклов, при значениях $(\sigma, \gamma, b, \alpha) \in D_s$, где

$$D_s = \begin{cases} -2 < \sigma < 2, \gamma < \min(\gamma_2(\sigma, b, \alpha), \gamma_2^*(\sigma, b, \alpha)), & \text{если } \alpha < \alpha_0, \\ -2 < \sigma < 2, \gamma < \gamma_2(\sigma, b, \alpha), & \text{если } \alpha \geq \alpha_0, \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \{-2(1+b)(b^2-1) + 2(1+b)[(b^2-1)^2 + 2(1+b)(4(1+b)^2 - (3+b)^2)]^{1/2} / [4(1+b)^2 - (3+b)^2].$$

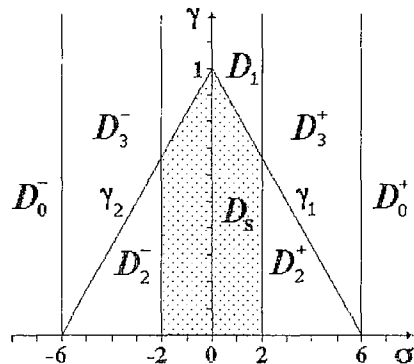


Рис. 1. Параметрический портрет системы (4) при $\alpha=0$

В области D_s единственным аттрактором системы служит состояние равновесия A_1 (рис. 2, а), которому соответствует режим слежения ДСС. При переходе с изменением σ и γ через границы области D_s ($\sigma=\pm 2$, $\gamma=\gamma_1$, $\gamma=\gamma_2$) в системе (4) возникают предельные циклы вращательного типа (рис. 2, б-д). Устойчивым предельным циклом соответствуют периодические асинхронные режимы ДСС, при которых разность фаз φ неограниченно нарастает, а рассогласование задержек x периодически изменяется относительно некоторого среднего значения. Отметим, что для значений параметров из областей D_2^+ и D_2^- предельные циклы сосуществуют на фазовом цилиндре U_0 с состояниями равновесия A_1 и A_2 (рис. 2, в, г). Неустойчивые циклы Γ_1 и Γ_2 разделяют области притяжения состояния равновесия A_1 и предельных циклов.

При увеличении α параметрический портрет, изображенный на рис. 1, претерпевает две существенные перестройки, связанные с бифуркациями двойных предельных циклов при $\gamma=\gamma_1^*$ и $\gamma=\gamma_2^*$. Влияние параметра связи α на структуру параметрического портрета (σ, γ) иллюстрирует рис. 3, соответствующий значениям $b=5$, $\alpha=10$. Видно, что образовались новые области D_4, D_5, D_6 и D_7 и фазовые портреты, отвечающие этим областям. В областях D_4 и D_5 система (4) имеет соответственно четыре (два устойчивых L_2 и L_3 и два неустойчивых Γ_1 и Γ_2) и два (устойчивый L_2 и неустойчивый Γ_2) вращательных предельных цикла (рис. 4, а,

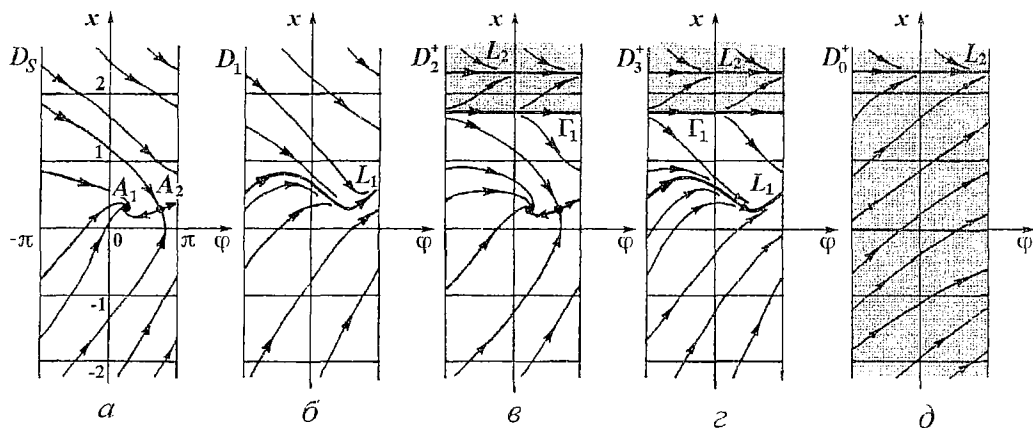


Рис. 2. Фазовые портреты системы (4) при $\alpha=0$

б). В области D_6 аттракторами системы (4) на фазовом цилиндре U_0 служат предельные циклы L_1, L_2 и L_3 (рис. 4, е), а в области D_7 – предельные циклы L_1 и L_2 (рис. 4, з).

Таким образом, система (4) имеет довольно сложную структуру параметрического портрета: в зависимости от начальных условий на фазовом цилиндре U_0 могут быть одно, два или три притягивающих движения. Единственными притягивающими движениями могут быть состояния равновесия A_1 при значениях параметров в области D_3 (см. рис. 2, а); предельный цикл в областях D_1, D_0^+ и D_0^- (см. рис. 2, б, д). При значениях параметров, лежащих в областях $D_2^+, D_2^-, D_3^+, D_3^-, D_5$ и D_7 , в системе одновременно существует два (см. рис. 2, в, г и рис. 4, б, з), а при значениях параметров, находящихся в областях D_4 и D_6 , – три притягивающих движения (см. рис. 4, а, е). В зависимости от начальных условий в ДСС устанавливается режим слежения или периодический асинхронный режим, соответствующий устойчивым предельным циклам. Из установленных фазовых портретов следует, что возмущения состояния равновесия могут приводить к двум исходам: при возмущениях, не выбрасывающих фазовую точку за пределы области притяжения A_1 , система возвращается в режим слежения; при возмущениях, выводящих систему за пределы области притяжения A_1 , происходит переход к одному из асинхронных режимов. Если зафиксировать в качестве исходного состояния ДСС режим слежения, тогда, как следует из параметрического (σ, γ) и фазовых портретов, приведенных на рис. 1–4, при выходе с изменением γ и σ через границы γ_1 и γ_2 в системе наблюдается жесткий переход от состояния слежения к асинхронному режиму, соответствующему предельным циклам L_2 или L_1 .

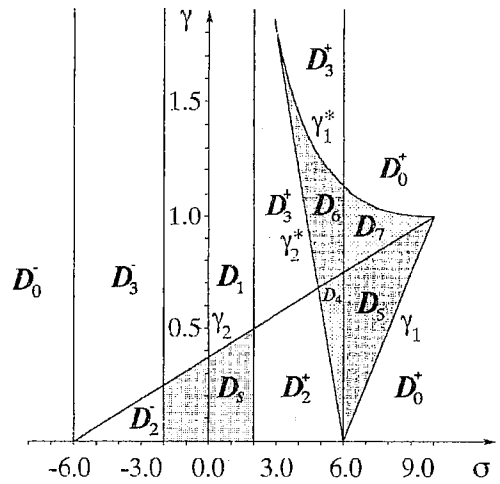


Рис. 3. Структура параметрического портрета системы (4) при $\alpha=10$

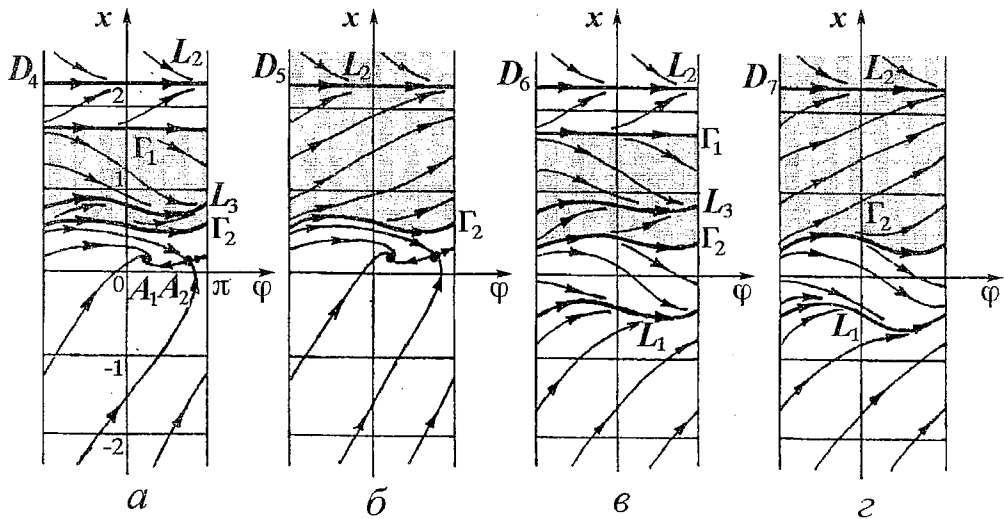


Рис. 4. Фазовые портреты системы (4), обусловленные влиянием параметра связи α

4. При увеличении параметров инерционности ε_1 и ε_2 в ДСС появляются новые колебательные режимы и наблюдается существенно более сложная картина бифуркационных переходов. Рассмотрим развитие динамики системы (2) с изменением параметров γ и σ при фиксированных значениях остальных параметров. Для этого обратимся к результатам численного исследования системы (2), выполненного при значениях $\alpha=18$, $b=5$, $\varepsilon_1=10$, $m=0.1$, $\varepsilon_2=2$, $\varepsilon_3=3$. По этим результатам на рис. 5 построена бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (σ, γ) . Охарактеризуем построенные на рис. 5 бифуркационные кривые.

Линия $\gamma=\gamma_2$ ограничивает область существования устойчивого $A_1(\varphi_1, m\gamma, x_1, 0)$ и седлового $A_2(\pi-\varphi_1, m\gamma, x_1, 0)$ состояний равновесия. Кривая $\gamma=\gamma_p$ соответствует бифуркации петли сепаратрисы седла A_2 . Кривые $\gamma=\gamma_c$, $\gamma=\gamma_{c0}$, $\gamma=\gamma_{c1}$, $\gamma=\gamma_{c2}$ и $\gamma=\gamma_{c3}$, а также линии $\sigma=\pm 2$ отвечают седло-узловым бифуркациям предельных циклов. Линии $\gamma=\gamma_{d1}$ и $\gamma=\gamma_{d2}$ соответствуют потере устойчивости предельных циклов в результате бифуркации удвоения периода.

В области $G_s=\{0 \leq \gamma < \gamma_p, -2 < \sigma < 2\}$ аттрактором системы (2) в фазовом пространстве U служит состояние равновесия A_1 , которому соответствует режим слежения ДСС. Двумерным аналогом фазового портрета системы (2) в области G_s является рис. 2, а. При переходе с увеличением γ через кривую γ_p из петли сепаратрисы рождается устойчивый вращательный (2π -периодический по φ) предельный цикл S_0 . При пересечении с увеличением (с уменьшением) σ линии $\sigma=2$ ($\sigma=-2$) появляется устойчивый предельный цикл Q_1 (Q_2) в области $x>2$ ($x<-2$) фазового пространства. В областях параметров $G_{sp}=\{\gamma_p < \gamma < \gamma_2\}$, $G_{p+}=\{0 < \gamma < \gamma_p, \sigma > 2\}$ и $G_{p-}=\{0 < \gamma < \gamma_p, \sigma < -2\}$ одновременно существуют режим слежения и режимы колебаний на предельных циклах S_0 , Q_1 или Q_2 . Цикл S_0 существует в области параметров $G_c=\{\gamma_p < \gamma < \gamma_c\}$, при переходе с увеличением γ через кривую γ_c происходит исчезновение цикла S_0 в результате седло-узловой бифуркации. Анализ движений

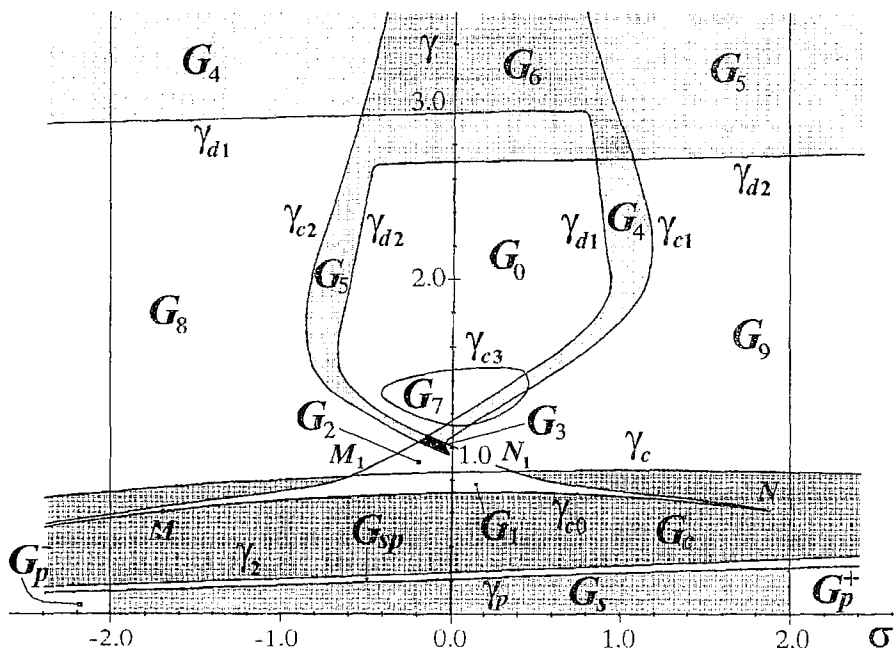


Рис. 5. Области динамических режимов ДСС

системы (2) в окрестности кривой γ_c , выполненный при $\gamma=0.87$ и изменении параметра σ от -2.0 до 2.0 , позволил обнаружить существование в этой окрестности областей двух-, трех-, четырех- и шестиоборотных предельных циклов, чередующихся с областями хаотических колебаний. В связи с этим переход с увеличением γ через кривую γ_c приводит к различным исходам в зависимости от значения σ . Если такой переход совершается через часть M_1N_1 кривой γ_c , то режим предельного цикла S_0 сменяется режимом на предельном цикле S_1 ; при переходе через часть кривой γ_c , расположенную слева от точки M_1 , в системе наблюдается возникновение хаотических колебаний через перемежаемость; при переходе через часть кривой γ_c , проходящую справа от точки N_1 , происходит установление режимов двух-, трех- и шестиоборотных предельных циклов, а также хаотических колебаний.

При пересечении с увеличением γ части MN линии γ_{c0} в фазовом пространстве системы (2) рождается устойчивый вращательный (2π – периодический по φ) предельный цикл S_1 . В точке N смыкаются бифуркационные линии γ_{c0} и γ_{d2} . В точке M с кривой γ_{c0} смыкается кривая $\gamma=\gamma_n$, проходящая в узкой области между кривыми γ_{c0} и γ_{d1} ($\gamma_{c0} < \gamma_n < \gamma_{d1}$) слева от точки M (на рис. 5 кривая γ_n не построена). При переходе с уменьшением γ через кривую γ_n предельный цикл S_1 теряет устойчивость с рождением в фазовом пространстве устойчивого двумерного тора, который быстро разрушается с удалением от линии γ_n . При пересечении с дальнейшим уменьшением γ линии γ_{c0} ставший абсолютно неустойчивым цикл S_1 исчезает в результате седло-узловой бифуркации. В области G_1 , ограниченной частями MN кривой γ_{c0} , M_1N_1 кривой γ_c , N_1N кривой γ_{d2} , частью кривой γ_{d1} , расположенной ниже точки M_1 , и кривой γ_n , в фазовом пространстве U существуют два предельных цикла S_0 и S_1 , когда $\sigma > -2$, и три предельных цикла S_0 , S_1 и Q_2 , когда $\sigma < -2$. В этой области реализуется один из асинхронных режимов ДСС (на циклах S_0 , S_1 или Q_2) в зависимости от начальных условий. В области параметров G_2 , заключенной между частью M_1N_1 кривой γ_c и отрезками кривых γ_{d1} , γ_{d2} , γ_{c1} и γ_{c2} , для ДСС характерен режим колебаний на цикле S_1 .

В области G_3 , ограниченной частями кривых γ_{c1} , γ_{c2} , γ_{d1} и γ_{d2} , в фазовом пространстве системы (2) существуют два вращательных (2π -периодических по φ) предельных цикла S_1 и S_2 . Цикл S_2 рождается при пересечении с увеличением γ части кривой γ_{c2} или при переходе с уменьшением σ через часть кривой γ_{c1} . При выходе из области G_3 через часть кривой γ_{d2} цикл S_2 испытывает бифуркацию удвоения периода, а цикл S_1 продолжает существовать в области параметров G_4 , заключенной между частями кривых γ_{d2} , γ_{c1} и γ_{d1} . При выходе из области G_3 через часть кривой γ_{d1} предельный цикл S_1 претерпевает бифуркацию удвоения периода, а цикл S_2 продолжает существовать в области параметров G_5 , ограниченной частями кривых γ_{d1} , γ_{c2} и γ_{d2} . Из рис. 5 видно, что области G_4 и G_5 пересекаются, в области $G_6=G_4 \cap G_5$ в фазовом пространстве снова одновременно существуют оба цикла S_1 и S_2 . При значениях $\sigma > 2$ ($\sigma < -2$) в области G_5 (G_4) одновременно с циклом S_2 (S_1) существует предельный цикл Q_1 (Q_2). Как показало численное исследование системы (2), при выходе с изменением γ и σ из областей G_1 , G_2 , G_3 и G_4 через кривую γ_{d1} и удалении от этой кривой на базе цикла S_1 через последовательность бифуркации удвоения периода в фазовом пространстве формируется хаотический аттрактор P_1 . Аналогичные явления наблюдаются при выходе с изменением γ и σ из областей G_1 , G_2 , G_3 и G_5 через кривую γ_{d2} и удалении от этой кривой – на базе

предельного цикла S_2 , существующего в областях G_3 и G_5 , и цикла S_1 , существующего в областях G_1 и G_2 , образуется хаотический аттрактор P_2 . Таким образом, в области G_7 , в окрестности частей кривых γ_{d1} и γ_{d2} реализуется сложная динамика системы (2).

Линия γ_{c3} , ограничивающая область G_7 , соответствует седло-узловой бифуркации трехоборотного (6л-периодического по φ) предельного цикла S^* системы (2). Цикл S^* рождается при переходе с изменением γ и σ через линию γ_{c3} внутрь области G_7 . Численное исследование системы (2) показало, что при продвижении внутрь области G_7 на базе цикла S^* через последовательность бифуркаций удвоения периода возникает хаотический аттрактор P^* . На рис. 6 представлены примеры временных реализаций $x(\tau)$ для колебательных режимов ДСС, определяемых предельными циклами S_0, S_1, S_2, S^* (рис. 6, а-г) и хаотическими аттракторами P_1, P_2 и P^* (рис. 6, д-ж).

Наиболее сложное динамическое поведение исследуемая система демонстрирует в областях G_0 (между частями кривых γ_{d1}, γ_{d2} и γ_{c3}), G_8 (между частями кривых γ_{c2}, γ_{d1} и γ_c) и G_9 (между частями кривых γ_{c1}, γ_{d2} и γ_c). Изучение полученных по результатам численного исследования сценариев развития динамических режимов при изменении параметров σ и γ дает основание сделать заключение о сложной слоистой структуре областей G_0, G_8 и G_9 , содержащей чередующиеся области регулярных и хаотических асинхронных режимов ДСС.

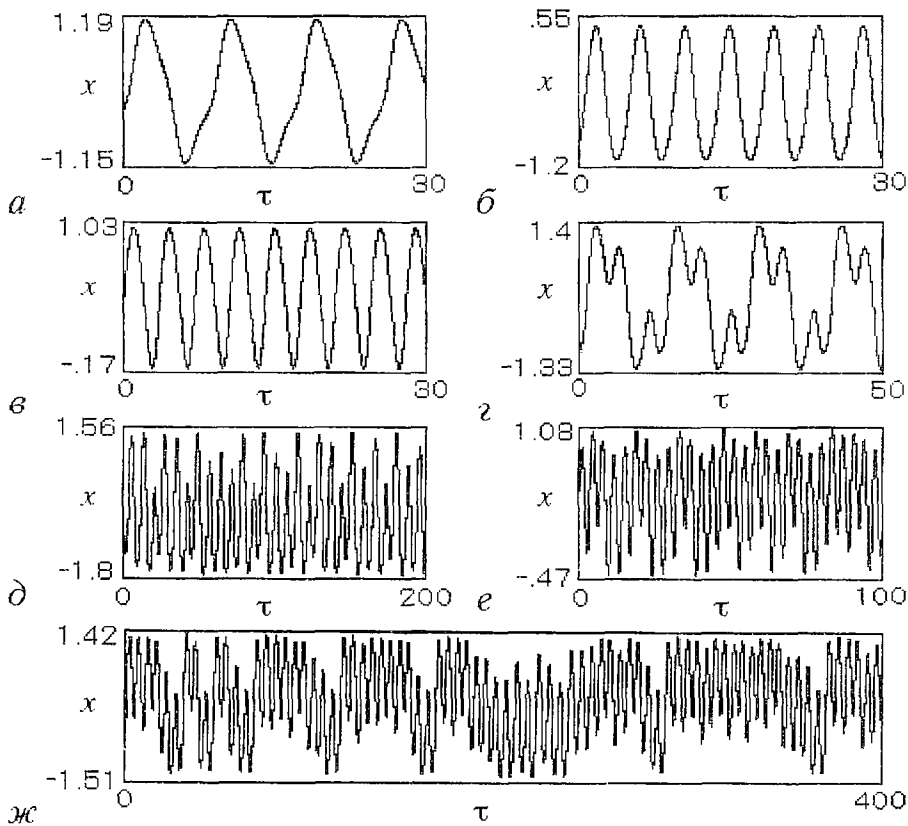


Рис. 6. Временные реализации $x(\tau)$, соответствующие аттракторам системы (2), при $\alpha=18, b=5, m=0.1, \epsilon_1=10, \epsilon_2=2, \epsilon_3=3$ для различных значений σ и γ : а - $\sigma=0.1, \gamma=0.75$; б - $\sigma=0.75, \gamma=1.6$; в - $\sigma=-0.75, \gamma=1.6$; г - $\sigma=-0.08, \gamma=1.4$; д - $\sigma=-0.65, \gamma=0.9$; е - $\sigma=-0.45, \gamma=1.6$; ж - $\sigma=-0.08, \gamma=1.18$

Таким образом, из проведенного анализа бифуркационной диаграммы $\{\sigma, \gamma\}$ следует, что в области значений $\gamma < 0.84$ и $\gamma > 3.0$ исследуемая система демонстрирует регулярную динамику, а в промежуточной области значений $0.84 < \gamma < 3.0$ для системы свойственны сложные регулярные и хаотические асинхронные режимы.

5. Рассмотрим поведение системы (2) при изменении параметра σ в областях G_0, G_8 и G_9 . Обратимся к однопараметрическим бифуркационным диаграммам $\{\sigma, x\}$, построенным при $\gamma = 1.6$ и приведенным на рис. 7. Они показывают характер эволюции предельного цикла S_2 при увеличении σ от -0.75 до 2.45 (рис. 7, а) и при уменьшении σ от -0.8 до -2.2 (рис. 7, б).

На $\{\sigma, x\}$ -диаграмме, изображенной на рис. 7, а, можно выделить две области $\Sigma_1 = -0.68 < \sigma < 0.831$ и $\Sigma_2 = 0.831 < \sigma < 2.3989$. В области Σ_1 динамика системы связана с преобразованием режима колебаний на предельном цикле S_2 в колебательный режим, соответствующий предельному циклу S_1 , при переходе из области G_5 в область G_4 через область G_0 . При этом вначале в результате бифуркаций удвоения периода цикла S_2 образуется хаотический аттрактор P_2 , затем аттрактор P_2 через колебания на четырехоборотном (8π -периодическом по φ) предельном цикле (рис. 8, а) преобразуется в хаотический аттрактор P_3 с большим размахом колебаний (рис. 8, б). При увеличении σ аттрактор P_3 преобразуется в хаотический аттрактор P_1 с меньшим размахом колебаний, который затем трансформируется в предельный цикл S_1 через обратные бифуркации удвоения периода.

При переходе в область Σ_2 колебания на предельном цикле S_1 прекращаются, через перемежаемость в системе вновь возникают хаотические колебания (рис. 8, в). Для области Σ_2 характерно чередование с увеличением σ хаотических и периодических колебаний, причем периодические колебания, которые определяются многооборотными предельными циклами системы (2), существуют в узких интервалах значений σ . При $\sigma > 2.3989$ после прекращения колебаний на шестиоборотном (12π -периодическом по φ) предельном цикле система переходит к режиму предельного цикла Q_1 , расположенного в фазовом пространстве U в области $x > 2$.

Бифуркационная диаграмма $\{\sigma, x\}$, приведенная на рис. 7, б, отражает изменение колебательных режимов в системе, реализуемых при переходе с уменьшением σ от предельного цикла S_2 к предельному циклу Q_2 , расположенному в области $x < -2$ фазового пространства. Видно, что в достаточно широких

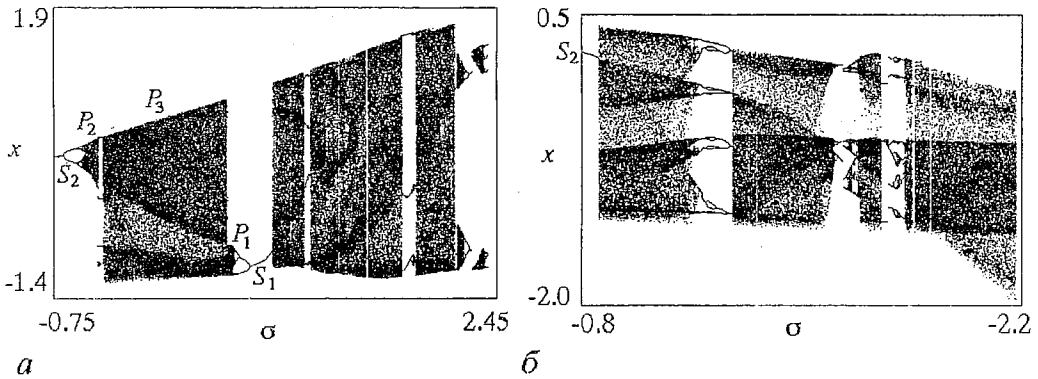


Рис. 7. Эволюция предельного цикла S_2 : а – при увеличении σ , б – при уменьшении σ ; $\gamma = 1.6$

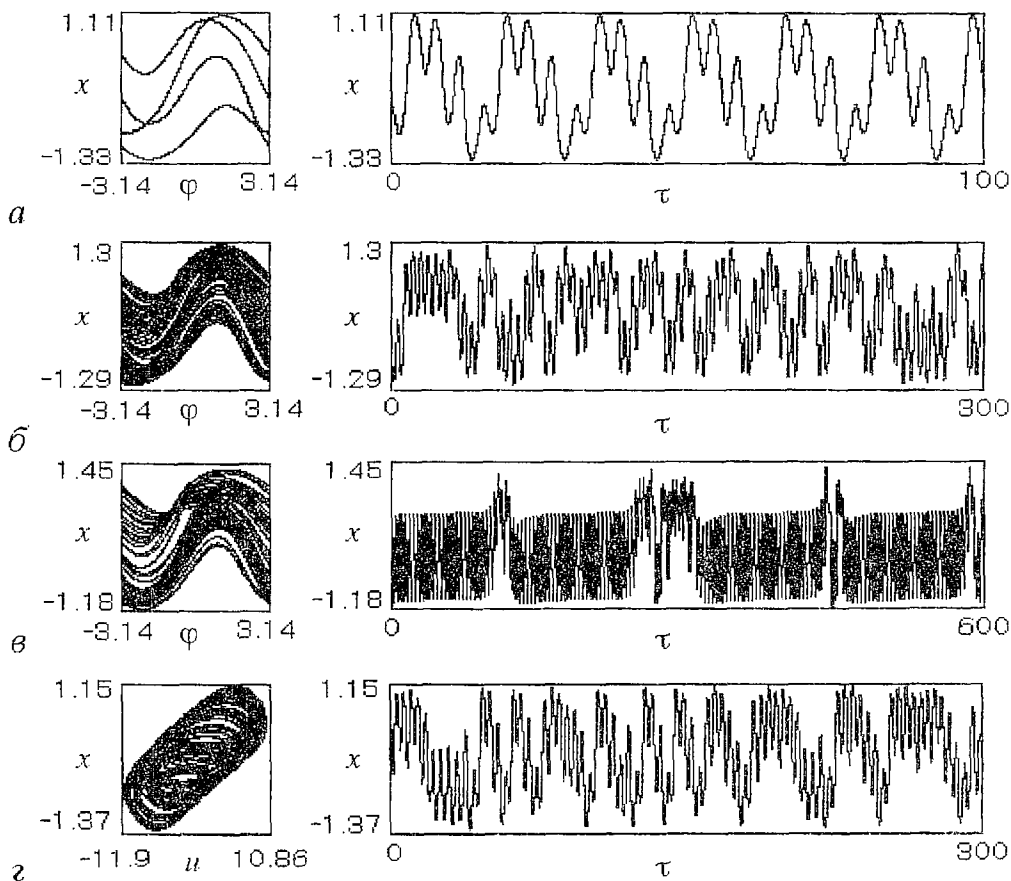


Рис. 8. Временные реализации $x(\tau)$, соответствующие аттракторам системы (2), при $\alpha=18$, $b=5$, $m=0.1$, $\varepsilon_1=10$, $\varepsilon_2=2$, $\varepsilon_3=3$, $\gamma=1.6$ для различных значений σ : -0.4 (а); 0.3 (б); 0.8332 (в); -0.3 (г)

интервалах значений σ реализуются хаотические колебания, причем переходы между областями хаотических режимов происходят через многооборотные предельные циклы.

В качестве примеров поведения ДСС при изменении параметра γ в областях G_0 , G_8 и G_9 приведем несколько характерных сценариев развития динамики системы (2), обнаруженных в результате вычислительного эксперимента, при различных значениях σ . На рис. 9 приведена $\{\gamma, x\}$ -диаграмма, построенная при $\sigma=-0.3$, где γ изменяется от 0.8 до 2.72. Если рассмотреть режим предельного цикла S_0 в качестве стартового состояния системы, то на начальном этапе увеличения γ (при $0.8 < \gamma < 1.401$) происходят следующие явления: переход от колебаний на цикле S_0 к колебаниям на цикле S_1 ; образование хаотического аттрактора P_1 на базе цикла S_1 ; разрушение аттрактора P_1 и переход на режим колебаний, соответствующий предельному циклу S_2 ; формирование хаотического аттрактора P_2 на базе цикла S_2 ; разрушение колебаний на аттракторе P_2 и переход к режиму трехоборотного

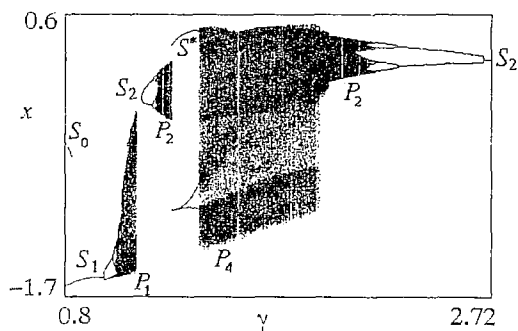


Рис. 9. Диаграмма развития режимов колебаний, соответствующая $\sigma=-0.3$ при изменении γ

предельного цикла S^* . Следующий этап развития колебаний в системе характеризуется переходом при $\gamma \sim 1.401$ через перемежаемость к режиму хаотического аттрактора P_4 (рис. 8, з), размеры которого в фазовом пространстве уменьшаются с увеличением γ , преобразованием этого аттрактора в хаотический аттрактор P_2 (при $\gamma \sim 1.939$) и мягким возвращением к колебаниям на предельном цикле S_2 через обратные бифуркации удвоения периода.

Анализ $\{\gamma, x\}$ -диаграмм, построенных при различных значениях σ , показывает, что как при увеличении, так и при уменьшении σ процесс развития динамики системы с увеличением γ характеризуется большим разнообразием регулярных колебательных режимов, наблюдаемых на начальном этапе этого процесса. Кроме этого, в соответствии с бифуркационной диаграммой $\{\sigma, x\}$ (см. рис. 5) увеличение абсолютной величины параметра σ приводит к уменьшению, а затем и к исчезновению областей значений γ на $\{\gamma, x\}$ -диаграммах, в которых система демонстрирует колебательные режимы и бифуркационные переходы, развивающиеся на базе предельных циклов S_1 и S_2 . Установленные особенности поведения системы иллюстрируют бифуркационные диаграммы $\{\gamma, x\}$, представленные на рис. 10–13, где в качестве начального состояния взят режим колебаний на предельном цикле S_0 .

На рис. 10 приведена $\{\gamma, x\}$ -диаграмма, построенная при $\sigma=0.3$. Видно, что в отличие от диаграммы $\{\gamma, x\}$, изображенной на рис. 9, здесь: во-первых, не реализуются колебательные движения на базе предельного цикла S_2 ; во-вторых, процесс перехода от режима предельного цикла S_1 к режиму трехоборотного цикла S^* характеризуется чередованием хаотических колебаний, соответствующих аттрактору P_1 , и периодических колебаний, определяемых трех- и четырехоборотными предельными циклами; в-третьих, переход к хаотическому аттрактору P_4 (через разрушение цикла S^*) происходит при большем значении γ и аттрактор P_4 существует в более широком интервале значений γ ($\gamma \in (1.476; 2.286)$). На рис. 11 дана $\{\gamma, x\}$ -диаграмма, соответствующая $\sigma=-1$. Особенность поведения системы в этом случае состоит в том, что после жесткого перехода от режима цикла S_0 к хаосу на $\{\gamma, x\}$ -диаграмме в области $0.802 < \gamma < 1.012$ наблюдается большое количество «окон» регулярных предельных циклов, период которых последовательно уменьшается на единицу. На рис. 12 представлен фрагмент диаграммы $\{\gamma, x\}$, построенный при изменении γ от 0.802 до 0.91, на котором отчетливо видны области предельных циклов с периодами от 10 до 3. В интервале $1.012 < \gamma < 1.541$ наблюдается чередование хаотических колебаний и регулярных

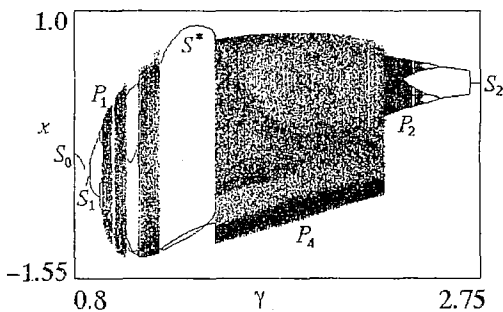


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая эволюцию режима предельного цикла S_0 при $\sigma=0.3$

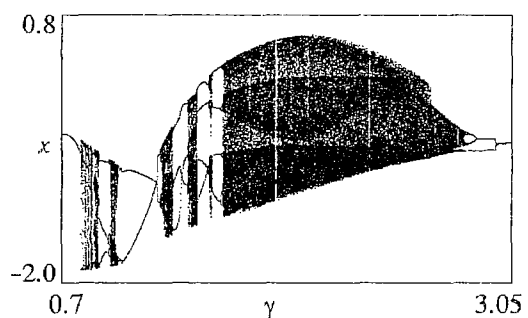


Рис. 11. Эволюция предельного цикла S_0 при $\sigma=-1$ и увеличении γ

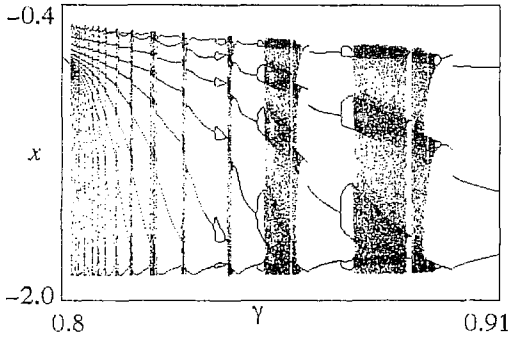


Рис. 12. Фрагмент бифуркационной диаграммы $\{\gamma, x\}$ при $\sigma = -1$ в области убавлений периода

особенность поведения исследуемой системы отражают $\{\gamma, x\}$ -диаграммы, представленные на рис. 13, а для $\sigma = -1.5$ и на рис. 13, б для $\sigma = 1.5$. Отметим, что переход к хаосу после прекращения колебаний на предельном цикле S_0 происходит через перемежаемость. Видно, что начальный этап процесса преобразования динамических режимов при $\sigma = 1.5$ характеризуется большим набором периодических колебаний. Обращает на себя внимание и тот факт, что переход к хаотическому поведению (при $\gamma \sim 1.401$ в случае $\sigma = -1.5$ и при $\gamma \sim 1.369$ в случае $\sigma = 1.5$) реализуется через бифуркации удвоения периода двухоборотного (4π -периодического по φ) предельного цикла.

Представленные сценарии поведения системы (2) при изменении γ интересны еще и тем, что дают представление о возможных режимах, через которые проходит ДСС на пути от асинхронного режима в областях G_5 и G_6 к состоянию слежения в области G_s .

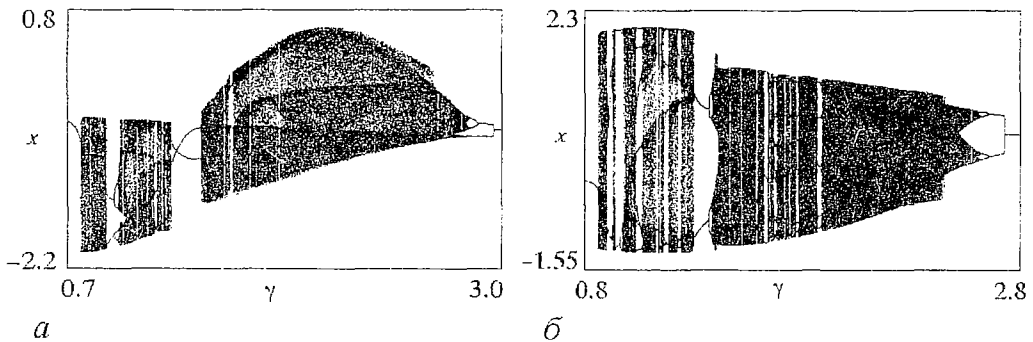


Рис. 13. $\{\gamma, x\}$ -диаграммы, соответствующие: а - $\sigma = -1.5$, б - $\sigma = 1.5$

6. Проведенное исследование динамических моделей (2) и (3) обнаруживает режимы ДСС, характерные для отдельных парциальных систем, и ряд новых режимов, бифуркационных переходов и сценариев преобразования режимов, не свойственных парциальным системам, обусловленных связями и инерционностью цепей управления. Примечательно, что периодические асинхронные режимы возникают даже в простейшем случае малых величин параметров инерционности ϵ_1 и ϵ_2 , когда обе парциальные системы не допускают существования таких режимов. Увеличение параметров инерционности приводит к возникновению в системе

сложных регулярных и хаотических асинхронных режимов, также не наблюдаемых в автономных парциальных системах. Регулярные режимы возникают в результате бифуркаций сепаратрис и седло–узловых предельных циклов, а также в результате разрушения хаотических аттракторов. Хаотические режимы формируются через бифуркации удвоения периода, через перемежаемость, а также жестким образом в результате седло–узловых бифуркаций предельных циклов. На плоскости начальных расстроек σ и γ определены бифуркации движений моделей (2) и (3) и выделены характерные области с различными режимами поведения ДСС. Рассмотрены примеры сценариев преобразования динамических режимов при медленном изменении параметров σ и γ , которые характеризуются цепочкой следующих друг за другом периодических и хаотических асинхронных режимов.

Полученные результаты о свойствах поведения ДСС за пределами традиционно используемой области параметров, соответствующей режиму слежения, дают представление об особенностях поведения ДСС в процессе ввода в режим слежения, а также при нарушении этого режима в результате возмущения фазовых переменных и параметров системы. Большое разнообразие колебательных режимов ДСС и легко реализуемая возможность управления их свойствами и областями существования с помощью изменения параметров цепей управления создают основу для увеличения круга возможных приложений таких систем: формирование широкополосных хаотических сигналов, синхронизация хаотических колебаний, контроль хаоса, передача информации [11,12] и др.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 96–02–16559), Программы поддержки ведущих научных школ (проект № 96–15–97220) и ФЦП «Интеграция» (проект К0392).

Библиографический список

1. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М: Связь, 1972.
2. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984.
3. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ.; Под ред. Ю.И.Бакаева, М.В.Капранова. М.: Сов. радио, 1978.
4. Тузов Г.И., Сивов В.А., Прытков В.И. и др. Помехозащищенность радиосистем со сложными сигналами / Под ред. Г.И.Тузова. М.: Радио и связь, 1985.
5. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985.
6. Тузов Г.И., Прытков В.И. Системы синхронизации, использующие сложные фазоманипулированные сигналы // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. Гл.7. С.104.
7. Пономаренко В.П. Исследование модели корреляционно–экстремальной системы слежения за задержкой шумового сигнала // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 5. С.177.
8. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
9. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
10. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.
11. Кислов В.Я. Динамический хаос и его использование в радиоэлектронике для генерирования, приема и обработки колебаний и информации // РЭ. 1993. Т. 38, № 10. С.1783.

12. Кислов В.Я., Кислов В.В. Новый класс сигналов для передачи информации. Широкополосные хаотические сигналы // РЭ. 1997. Т.42, № 8. С.962.

НИИ прикладной математики и
кибернетики ННГУ
Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 4.08. 98

OSCILLATIONS IN COUPLED CONTROLLED OSCILLATING SYSTEMS

V.P. Ponomarenko, S.A. Kuzovkin

The results of investigation of dynamical regimes and bifurcation transitions in phase and delay controlled coupled autogenerators are presented. Regularities of beginning and transformation of oscillatory motions depending on initial frequency and delay mismatch are studied. Numerical simulation of the equations which describe the dynamics of the system reveals complex oscillatory regimes, impossible in autonomous partial generators.



Пономаренко Валерий Павлович родился в 1941 году в Мурманске, окончил Горьковский государственный университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Соавтор коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.



Кузовкин Сергей Александрович – студент четвертого курса факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета. Область научных интересов – динамика систем, математическое моделирование.