



ФИЛЬТРАЦИЯ И АНТИФИЛЬТРАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

А.А. Кипчатов, Е.Л. Козленко

В работе рассмотрена проблема диагностики хаотических колебаний, порожденных динамической системой и искаженных какой-либо линейной инерционной цепью. Предложен метод восстановления исходного сигнала и определения характеристик искажающего фильтра по временной реализации исследуемого процесса. Применение метода рассмотрено как на примере дискретных во времени систем, так и на примере потоковых систем.

Введение

В последнее время в области изучения динамических систем, демонстрирующих сложное поведение, все большее внимание уделяется диагностике динамики систем по виду аттрактора. В случае, когда система неизвестна и представляет из себя «черный ящик», о поведении системы судят по колебаниям на выходе «черного ящика». При этом молчаливо предполагается, что исходные колебания предстают перед нами в неискаженном виде. Однако, может оказаться, что сигнал, прежде чем попасть на выход «черного ящика», прошел через преобразователи, обладающие частотнозависимыми характеристиками в диапазоне частот исследуемого сигнала. С этой точки зрения их можно сопоставить с фильтром с определенными амплитудно-частотными и фазо-частотными характеристиками. Кроме того, чтобы избавиться от шума, помех и т.д., данные часто специально фильтруют либо подвергают специальной обработке, которая является аналогом фильтра, если система преобразования линейна. В то же время известно, что хаотические колебания, прошедшие через линейные инерционные системы, искажаются, их восстановленные аттракторы усложняются, а размерность возрастает [1,2].

В зависимости от свойств фильтра повышение размерности происходит двумя путями. Для цепей, обладающих свойствами рекурсивных цифровых фильтров, происходит фрактальное расслоение исходного аттрактора хаотических колебаний (суперфрактализация), влекущее за собой повышение размерности в пределе бесконечного разрешения ($\epsilon \rightarrow 0$) [3]. Это реальное повышение размерности. Величина этого повышения в пределе развитого хаоса и сильной фильтрации равна порядку фильтра [6]. Цепи, обладающие только лишь свойствами нерекурсивных цифровых фильтров не должны приводить к увеличению размерности [4], однако перестройка аттрактора имеет место и в этом случае: аттрактор становится «лохматым», но сохраняет тонкую структуру. Это

приводит к тому, что в области больших пространственных масштабов размерность оценивается как более высокая. Это наблюдаемое увеличение размерности. Потоковые фильтры всегда обладают свойствами рекурсивных фильтров и значит всегда будут приводить к увеличению размерности по крайней мере в области малых масштабов. В любом случае в доступном для вычислений диапазоне пространственных масштабов $[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$ при фильтрации будет фиксироваться повышение размерности, а исходная динамическая система будет замаскирована.

1. Идеология метода

Возникает вопрос: возможно ли устранить влияние таких передающих цепей не имея представления об устройстве исследуемой системы, а основываясь исключительно на информации, которую можно извлечь из временной реализации «черного ящика». В данной статье мы покажем, что это возможно, а также предложим процедуру, с помощью которой этого можно достичь на практике.

Идеология метода предложена в [5] и основана на линейности рассматриваемых инерционных систем, что позволяет синтезировать дополнительный фильтр, передаточная характеристика которого обратна передаточной характеристике скрытого фильтра. Тогда их общая передаточная характеристика не будет зависеть от частоты и на выходе дополнительного фильтра будут наблюдаться колебания, равные исходным с точностью до постоянного сдвига во времени.

Пусть скрытый фильтр имеет вид

$$z_n = \beta_0 x_n + \sum_{k=1}^m \beta_k x_{n-k} + \sum_{l=1}^p \alpha_l z_{n-l}, \quad (1)$$

где x_n – входной сигнал, z_n – выходной сигнал. Передаточная характеристика такого фильтра имеет вид

$$H(\omega) = [\beta_0 + \sum_{k=1}^m \beta_k \exp(-jk\omega T)] / [1 - \sum_{l=1}^p \alpha_l \exp(-jl\omega T)]. \quad (2)$$

Тогда если передаточную характеристику дополнительного фильтра обозначить за $H'(\omega)$, то должно выполняться $H(\omega)H'(\omega) \equiv 1$ и $H'(\omega)$ имеет вид

$$H'(\omega) = [1 - \sum_{l=1}^p \delta_l \exp(-jl\omega T)] / [\gamma_0 + \sum_{k=1}^m \gamma_k \exp(-jk\omega T)], \quad (3)$$

где $\gamma_k = \beta_k$, $\delta_k = \alpha_k$. В предположении отсутствия шумов такой дополнительный фильтр даст на выходе сигнал исходной динамической системы.

Задача сводится к нахождению коэффициентов «антифильтра» γ_k и δ_k . Подбор коэффициентов «антифильтра» основывается на гипотезе, что если хаотические колебания были порождены динамической системой (ДС), то линейный фильтр, если $H(\omega) \neq 1$, может только увеличить размерность аттрактора таких колебаний, то есть неизбежно приведет к подъему графика размерности как функции масштаба наблюдения. В то же время размерность аттрактора колебаний на выходе системы типа «ДС + фильтр» может быть уменьшена (в конечном итоге до уровня размерности аттрактора сигнала на выходе ДС) путем подбора дополнительного фильтра. Более того, размерность можно использовать в качестве критерия выбора коэффициентов дополнительного фильтра. Поясним на простом примере. Рассмотрим рекурсивный фильтр первого порядка

$$z_n = \alpha_1 z_{n-1} + x_n, \quad \alpha_1 \in [-1, 1]. \quad (4)$$

Легко убедиться, что в качестве дополнительного фильтра следует взять

нерекурсивный фильтр

$$w_n = \beta_1 z_{n-1} + z_n \quad (5)$$

при $\beta_1 = -\alpha_1$. Действительно

$$\begin{aligned} w_n &= \beta_1 z_{n-1} + z_n, \\ w_n &= -\alpha_1 z_{n-1} + \alpha_1 z_{n-1} + x_n, \\ w_n &= x_n. \end{aligned} \quad (6)$$

При $\beta_1 = -\alpha_1$ размерность аттрактора сигнала w_n будет минимальна и равна размерности аттрактора исходного сигнала x_n . При всех остальных значениях β_1 размерность будет выше, так как результирующий фильтр будет представлять из себя рекурсивный фильтр с отличным от нуля коэффициентом. Таким образом, если вычислить размерность аттрактора результирующих колебаний для всех $\beta_1 \in [-1, 1]$ и построить трехмерный график $D_c = D_c(E, \beta_1)$, где D_c – корреляционная размерность, E – масштаб наблюдения (в дБ) ($E = 20 \lg(\epsilon/\epsilon_0)$), то при $\beta_1 = -\alpha_1$ должен наблюдаться минимум по крайней мере в некотором эффективном диапазоне E (при 16-битном представлении данных динамический диапазон составляет 90 дБ. Отсекая область больших E из-за наличия красных эффектов [7] и область малых E из-за возможного недостатка точек реализации для корректного определения размерности [8], мы определяем эффективный диапазон E : $[-60 \text{ дБ}, -20 \text{ дБ}]$).

Так мы нашли искомый коэффициент $\alpha_1 = -\beta_1$, а сигнал на выходе дополнительного фильтра эквивалентен исходному сигналу. Понятно, что так как фильтры линейные, то в цепочке они могут быть переставлены местами и тогда если исходный сигнал был зафильтрован нерекурсивным фильтром, то в качестве дополнительного фильтра к нему будет служить рекурсивный фильтр.

2. Антифильтрация в каскадах

Обобщим процедуру на случай фильтра более высокого порядка. Допустим, что фильтр (1) можно представить в виде цепочки из p рекурсивных и m нерекурсивных фильтров первого порядка (заметим, что это не всегда возможно). Тогда дополнительный фильтр будет представлять из себя цепочку из m рекурсивных и p нерекурсивных фильтров первого порядка. Коэффициенты фильтров сконструированной цепочки находятся последовательно, используя вышеописанную схему. Фактически на вход k -го фильтра подается сигнал с выхода $k-1$ -го фильтра, для которого α_{k-1} – коэффициент, при котором на графике $D_c(E, \alpha)$ четко идентифицируется минимум.

Рассмотрим следующий пример. Исследуемая система состоит из логистического отображения, генерирующего хаотическую последовательность $\{x_n\}$

$$x_n = 1 - \lambda x_{n-1}^2 \quad (7)$$

при $\lambda = 1.9$ и цифрового фильтра

$$z_n = x_n + b_1 x_{n-1} + \sum_{k=1}^2 a_k z_{n-k}, \quad (8)$$

который сводится к цепочке из двух рекурсивных и одного нерекурсивного фильтра (коэффициенты будут другие)

$$\begin{aligned} z_{n,1} &= x_n + \alpha_1 z_{n-1,1}, \\ z_{n,2} &= z_{n,1} + \alpha_2 z_{n-1,2}, \\ z_{n,3} &= z_{n,2} + \beta_1 z_{n-1,2}. \end{aligned} \quad (9)$$

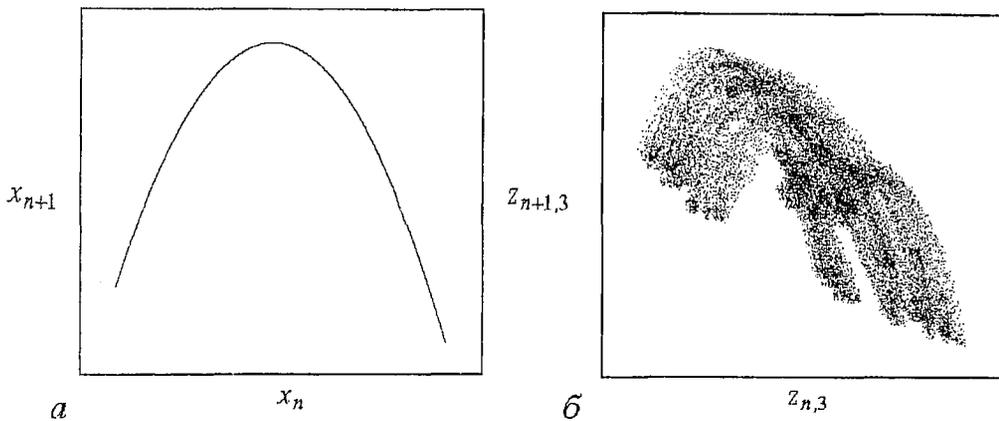


Рис. 1. а – аттрактор, восстановленный по последовательности $\{x_n\}$, генерируемой логистическим отображением; б – аттрактор, восстановленный по последовательности $\{z_{n,3}\}$ на выходе исследуемой системы

Здесь первый подстрочный индекс означает дискретное время, а второй – номер фильтра в цепочке. Значения α и β лежат в диапазоне $[-1,1]$. Объединенная система (7), (9) при $\alpha_1=-0.7$, $\alpha_2=0.8$, $\beta_1=-0.4$ представляет «черный ящик», и известна только последовательность z_n . Аттракторы, восстановленные по последовательности x_n (7) и по $z_{n,3}$ (9), представлены на рис. 1, а и б соответственно. Видно, что аттрактор фильтрованного сигнала значительно отличается от исходного, и привычными методами он не будет опознан как порожденный логистическим отображением.

Попробуем отыскать вначале коэффициенты рекурсивных фильтров. Для этого будем использовать нерекурсивный фильтр вида:

$$w_n = z_n - \gamma z_{n-1}, \quad (10)$$

где z_n – сигнал на входе «антифильтра», w_n – сигнал на выходе. Коэффициент γ будем варьировать в пределах от -1 до $+1$ с шагом $\Delta\gamma=0.1$. Для каждого γ из указанного диапазона будем производить расчет корреляционной размерности D_c для аттрактора сигнала w_n , используя алгоритм, основанный на методе, предложенном Грассбергером и Прокаччиа [9]. Параметры метода: число точек реализации $N=10^5$, число точек редукции $M=10^4$, размерность пространства вложения $d=5$, временная задержка $\tau=1$.

По полученным данным строим график зависимости $D_c(E, \gamma)$, $E \in [-60 \text{ дБ}, -20 \text{ дБ}]$, $\gamma \in [-1, 1]$ (рис. 2, а). Явно заметен минимум при $\gamma=-0.7$. Считаем, что мы нашли первый «рекурсивный коэффициент» «антифильтра» $\alpha_1=\gamma=-0.7$ ($\alpha_1=\gamma$, а не $-\gamma$ поскольку в (10) перед γ уже стоит минус). Теперь сигнал w_n , полученный при $\gamma=-0.7$, снова пропустим через фильтр (10) и построим график $D_c=D_c(E, \gamma)$ (рис. 2, б). На этот раз четкий минимум наблюдается при $\gamma=0.8$, из чего заключаем, что $\alpha_2=0.8$. На третьем шаге минимум не наблюдается (рис. 2, в) поэтому считаем, что все «рекурсивные коэффициенты» «антифильтра» найдены.

Следуя предложенному методу, коэффициенты нерекурсивных фильтров будем искать при помощи рекурсивного дополнительного фильтра вида

$$w_n = z_n - \delta w_{n-1}. \quad (11)$$

При этом в качестве входного сигнала будет выступать сигнал, полученный с выхода последнего дополнительного фильтра вида (10), при котором наблюдался минимум. На рис. 2, г представлен график зависимости $D_c=D_c(E, \delta)$. На графике

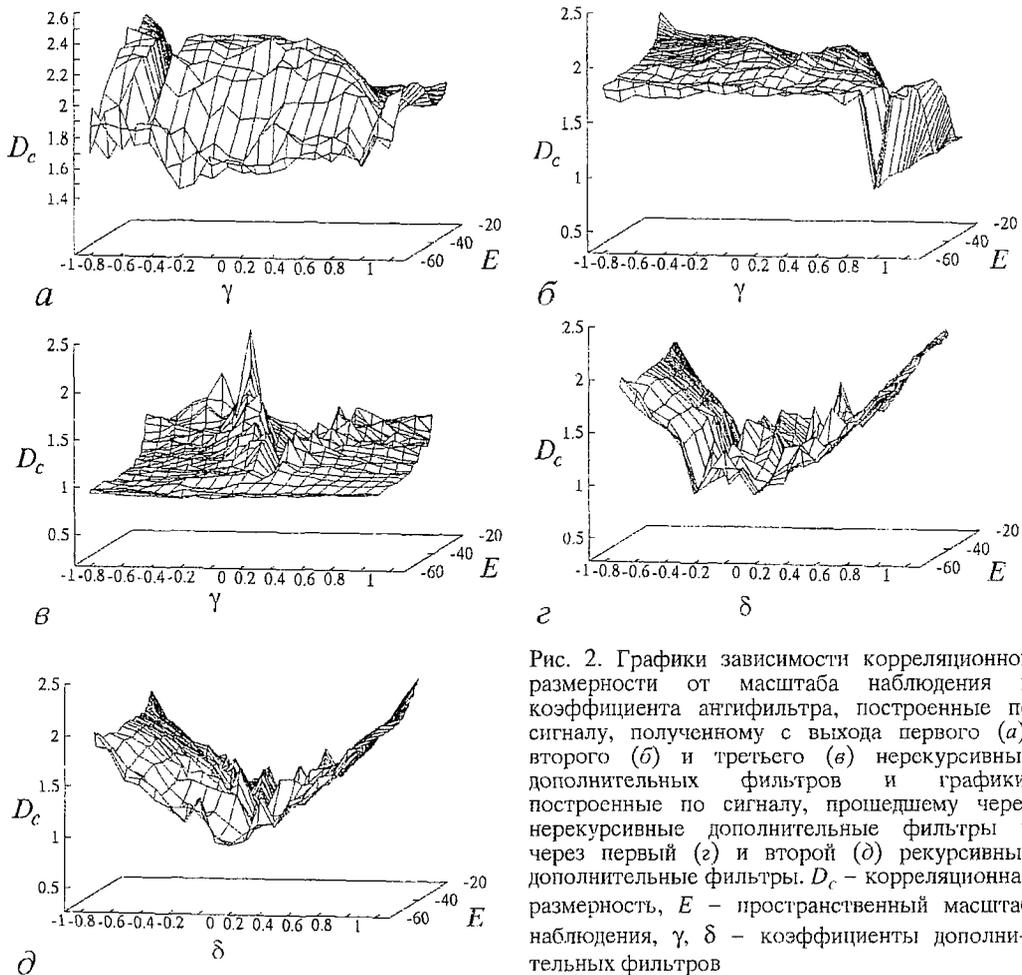


Рис. 2. Графики зависимости корреляционной размерности от масштаба наблюдения и коэффициента антифильтра, построенные по сигналу, полученному с выхода первого (а), второго (б) и третьего (в) нерекурсивных дополнительных фильтров и графики, построенные по сигналу, прошедшему через нерекурсивные дополнительные фильтры и через первый (г) и второй (д) рекурсивные дополнительные фильтры. D_c – корреляционная размерность, E – пространственный масштаб наблюдения, γ , δ – коэффициенты дополнительных фильтров

заметен минимум при $\delta = -0.4$, то есть $\beta_1 = -0.4$. Повторив процедуру, замечаем, что минимум на графике размерности отсутствует, а значит все «нерекурсивные коэффициенты» найдены (рис. 2, д).

В результате мы нашли $\gamma_1 = -0.7$, $\gamma_2 = 0.8$, $\delta_1 = -0.4$, что полностью совпадает с коэффициентами, заданными для исследуемого «черного ящика». Если восстановить аттрактор на выходе «антифильтра», то мы увидим знакомую параболу логистического отображения, что будет свидетельствовать о восстановлении исходного сигнала.

3. Антифильтрация в потоках

Покажем, что данный метод работает и в случае непрерывных во времени сигналов, рассмотрев более простую ситуацию, нежели предложенную в п. 2. Допустим, что мы не знаем, что из себя представляет динамическая система, но мы знаем или догадываемся, что хаотический сигнал, который она сгенерировала, прошел через фильтр близкий к полосовому. Задача состоит в том, чтобы определить характеристику этого фильтра и в итоге реконструировать исходный сигнал. Простейший потоковый полосовой фильтр может быть описан дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{i} = -2\alpha\dot{i} - \omega_0^2 i + 2\alpha x, \quad (12)$$

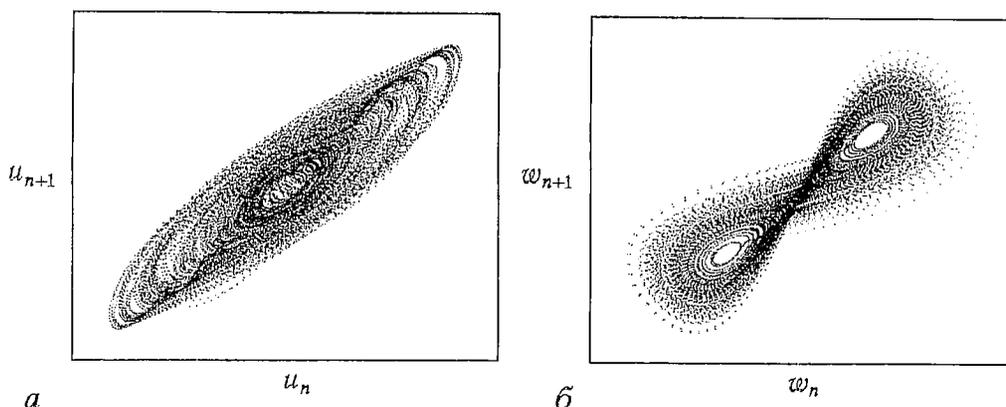


Рис. 3. *a* – аттрактор сигнала на выходе потоковой динамической системы, замаскированной полосовым фильтром; *б* – аттрактор, реконструированный при помощи дополнительного фильтра

где x – входной сигнал, u – выходной сигнал, ω_0 – резонансная частота фильтра, α определяет добротность фильтра (чем меньше α , тем уже полоса частот, вырезаемая фильтром). В соответствии с (12) можно записать разностную схему антифильтра

$$z_n = [1/(2\alpha')](u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})/h^2 + (u_{n+1} - u_{n-1})/(2h) + \omega_0^2 u_n / (2\alpha'), \quad (13)$$

$$w_n = \sum_{i=0}^n [(z_i + z_{i+1})/2]h.$$

Здесь h является фактически шагом дискретизации данных, что в численном эксперименте соответствует шагу Рунге – Кутты; u_n – отсчеты исследуемой временной реализации. Антифильтр условно разделялся на цифровой перекрестивный фильтр и интегратор. Определялись параметры α' и ω_0' . Для каждой пары задаваемых параметров вычислялась размерность. Наличие одновременно двух неизвестных параметров существенно увеличивало время счета, и если в случае одного неизвестного параметра время счета составляло T , то в случае двух параметров – T^2 . Шаг сетки был достаточно мелким, чтобы не «проскочить» искомое значение.

Вернемся к анализируемому сигналу и осуществим его предварительный анализ. Восстановленный аттрактор представлен на рис. 3, *a*. Параметры: шаг дискретизации $h=0.01$, время восстановления $\tau=10h$, размерность вложения $d_E=5$, число отсчетов временной реализации $N=10^5$, число точек редукции $M=10^4$. Корреляционная размерность как функция масштаба наблюдения представлена на рис. 4. Исходя из этой зависимости, мы определяем эффективный диапазон масштабов наблюдения: $[-55, -35]$ дБ. Так как зависимость демонстрирует плато в эффективном диапазоне, то размерность будем характеризовать числом и определять в середине диапазона: $E^*=-42$ дБ, для исследуемого сигнала $D_c(E^*)=2.5$.

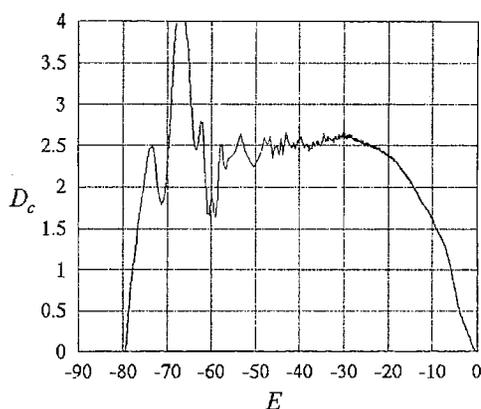


Рис. 4. Корреляционная размерность как функция масштаба наблюдения, вычисленная для аттрактора исследуемого потокового сигнала; шаг дискретизации $h=0.01$, время восстановления $\tau=10h$, размерность пространства вложения $d_E=5$, число отсчетов последовательности $N=10^5$, число точек редукции $M=10^4$

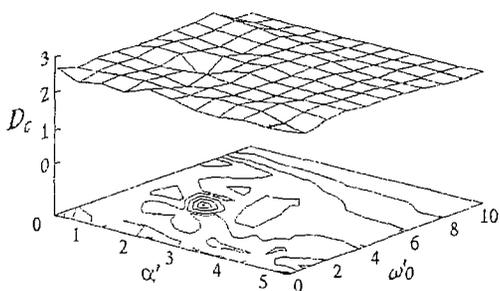


Рис. 5. Зависимость $D_c(\alpha', \omega'_0)$, полученная для сигнала на выходе антифильтра. D_c – корреляционная размерность, вычисленная в точке $E^* = -42$ дБ, α' , ω'_0 – коэффициенты антифильтра

представление размерности как числа вызвано в первую очередь желанием представить результаты на одном графике вместо того, чтобы строить серию графиков вида $D_c(\alpha', E)$ и $D_c(\omega'_0, E)$. Понятно, что в случае, когда плато на графике $D_c(E)$, построенного для аттрактора исходного сигнала, отсутствует, такой подход может привести к ошибочным результатам.

Заключение

Итак, предложенный метод позволяет из скалярной временной реализации хаотического процесса, замаскированного фильтром (линейной инерционной цепью), восстановить вид сигнала на выходе динамической системы и найти все характеристики фильтра, маскирующего сигнал. И та и другая возможности представляют большой интерес для диагностики систем по колебаниям ими порождаемым. Ясно, что в реальных системах возможны значительные трудности при применении этой методики. В частности, для систем с высокой размерностью и/или для фильтров высокого порядка требуется значительно увеличивать длину анализируемых реализаций, что связано с катастрофическим увеличением времени вычислений для нахождения коэффициентов «антифильтра». Кроме того, остается открытым вопрос, как в общем случае преобразование размерности как функции пространственных масштабов связано с порядком фильтра и с характерными частотами фильтра, в особенности для потоковых систем. Помимо перечисленных трудностей, наличие естественных шумов может привести к заметному подъему шумового порога «антифильтра», что необратимо замаскирует динамические характеристики исследуемого процесса.

Библиографический список

1. Badii R., Politi A. Strange attractors: Estimating the complexity of chaotic signals in turbulence // Proceedings of Workshop «Instabilities and Chaos in Quantum Optics II» // NY: Plenum, 1986. P. 335.
2. Sauer T., Yorke J. How many delay coordinates do you need? // Int. J. of Bif. and Chaos. 1993. Vol. 3, №3. P. 737.
3. Купчатов А.А., Красичков Л.В. Суперфрактализация аттрактора при линейной фильтрации // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21 № 4. С. 1.
4. Broomhead D., Huke J., Muldoon M. Linear filters and nonlinear systems // J. Roy. Stat. Soc. B. 1992. Vol. 54. P. 373.
5. Chennaoui A., Pawelzik K. Attractor reconstruction from filtered chaotic time series // Phys.Rev.A. 1990. Vol. 41, № 8. P. 4151.

6. *Kipchatov A.A., Kozlenko E.L.* Неограниченное возрастание размерности хаотических аттракторов при линейной фильтрации // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, № 7. С. 8.

7. *Ding M., Grebogi C., Ott E., Sauer T., Yorke J.* Estimating correlation dimension from a chaotic time series: when does plateau onset occur? // Physica D. 1993. Vol. 69. P. 404.

8. *Kipchatov A.A.* Оценка корреляционной размерности аттракторов, восстановленных по данным конечной точности и длины // Письма в ЖТФ. 1995.

9. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 346.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 10.07.98

FILTERING AND ANTIFILTERING OF CHAOTIC OSCILLATIONS

A.A. Kipchatov, E.L. Kozlenko

The problem of diagnostics of chaotic oscillations, generated by dynamical system and distorted by linear filters is considered. The method of recovering of original oscillations and extracting the parameters of unknown filter from time series is proposed. The method is applied to dynamical systems described by maps and differential equations.



Кипчатов Алексей Александрович – родился в 1958 году, окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики и нелинейной динамики (1996). Доцент кафедры электроники и волновых процессов, с 1998 года докторант этой кафедры. Научные интересы – анализ сложного поведения нелинейных систем в пространстве параметров, оценка количественных характеристик сложности по временным реализациям различных процессов, трансформация характеристик хаотических колебаний в инерционных цепях и средах. Автор ряда статей по этим направлениям.



Козленко Егор Львович – родился в 1973 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – диагностика сложного поведения динамических систем по временным реализациям, фильтрация хаотических сигналов. Автор 3 статей по данной тематике.