Изв.вузов «ПНД», т.6, № 5, 1998 УДК 517. 9

НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В. В. Цегельник

В работе рассматривается нелинейная автономная система трех дифференциальных уравнений, совпадающая (при определенном выборе параметров) с некоторыми моделями турбулентности и нейронной динамики. Получены условия для параметров, обеспечивающие существование у системы точных аналитических решений, выражающихся через решения полного третьего уравнения Пенлеве. Указан также случай интегрируемости системы в эллиптических функциях.

Введение

Целью настоящей работы является исследование аналитических свойств решений нелинейной динамической системы

$$\dot{x} = ax + by + z - 2y^2 + cz^2, \quad \dot{y} = py + qx + 2xy, \quad \dot{z} = -2z - 2zx \tag{1}$$

с постоянными параметрами a, b, c, p, q; точка означает производную по независимой переменной t.

Система (1) в случае $p=a$, $q=-b$, $c=0$ описывает модель турбулентности со спектрально узкой областью возбуждения [1]. С качественной точки зрения характерным признаком системы (1) при дополнительном условии $ab\neq 0$ является наличие в ней хаотических (нерегулярных) движений.

Система (1) при значениях параметров $p=c=0$, $q=-b$ является частным случаем предложенной в [2] модели нейрона, обладающего сложной осцилляторной активностью.

Для исследования аналитических свойств решений системы (1) используется подход, предложенный в [3] и развитый в [4], основой которого является метод Пенлеве–анализа, тесно связанный с методом обратной задачи рассеяния [5], и который применительно к (1) заключается в отыскании решений, подвижными особенностями которых могут быть только полюсы.

Упомянутый выше критерий, известный как свойство Пенлеве, был введен Пенлеве в связи с изучением обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка $w''=R(z, w, w')$ (функция R является рациональной по w, w' и локально аналитической по z), свойством которых было то, что единственным типом сингулярностей, положение которых зависит от начальных данных, являются полюсы. Пенлеве и его ученики обнаружили, что существует 50 типов уравнений (удовлетворяющих требованию отсутствия подвижных критических точек), состоящих из сорока четырех приводимых к известным уравнениям и шести новых уравнений, решения которых названы трансцендентами Пенлеве.

История появления уравнений Пенлеве, возникающие при их исследовании задачи и полученные при этом результаты, а также обзор этапов развития теории указанных уравнений и связанных с этой темой исследований, достаточно полно изложены в [6].

Говоря о приложениях уравнений Пенлеве, необходимо указать на использование этих функций для описания определенных переходных и автомодельных режимов [7,8], а также подчеркнуть тот факт, что трансценденты Пенлеве играют в нелинейной теоретической физике ту же роль, что и классические специальные функции (типа Эйри, Бесселя, Вебера – Эрмита) для линейных дифференциальных уравнений с частными производными [9].

Аналитические свойства решений системы (1) в случае $p=a$, $q=-b$, $c=0$, то есть системы вида

$$\dot{x} = ax + by + z - 2y^2, \quad \dot{y} = ay - bx + 2xy, \quad \dot{z} = -2z - 2zx \tag{2}$$

исследовались в [3] с использованием метода Пенлеве–анализа. При этом было замечено, что отсутствие у системы (2) решений с хаотическим поведением связано с наличием у нее свойства Пенлеве. (Подобная ситуация имеет место и для других трехмерных динамических систем с квадратичными нелинейностями, которые сводятся к известным моделям [3], обладающим хаотическим поведением.) Данное обстоятельство позволило, с одной стороны, сузить область поиска значений параметров a,b, при которых решения системы (2) обладают хаотическим поведением, а с другой стороны, дало возможность получить условия для параметров (обеспечивающие существование) и построить [4] специальные классы точных решений (2), обладающих свойством Пенлеве.

В предлагаемой работе получены условия на параметры системы (1), при выполнении которых она обладает свойством Пенлеве, а также предложен алгоритм построения ее точных решений, порождаемых решениями полного третьего уравнения Пенлеве. Основой предлагаемого подхода является существование у системы (1) неавтономных первых интегралов.

1. Аналитические свойства решений системы (1) в случае $a = p = 0, q = -b, c \neq 0$

Система (1) (ниже переменную t считаем комплексной) в случае $a=p=0$, $q=-b$ заменой $x \to x$, $y \to y+b/2$, $z \to z$ преобразуется в систему

$$\dot{x} = -by + z - 2y^2 + cz^2, \quad \dot{y} = 2xy, \quad \dot{z} = -2z - 2zx, \tag{3}$$

имеющую первый интеграл $zy=H\exp(-2t)$, где H – постоянная интегрирования. Понизим порядок системы (3), а именно, рассмотрим систему

$$\dot{x} = -by + He^{-2t}y^{-1} - 2y^2 + cH^2e^{-4t}y^{-2}, \quad \dot{y} = 2xy. \tag{4}$$

Так как $x = \dot{y}(2y)^{-1}$, то уравнение, определяющее функцию y, имеет вид

$$y\ddot{y} = \dot{y}^2 - 2by^3 + 2Hye^{-2t} - 4y^4 + 2cH^2e^{-4t}. \tag{5}$$

Заменой $w = y^{-1}e^{-t}$, $\tau=e^{-t}$ (5) преобразуется в уравнение

$$\tau ww'' = \tau w'^2 - ww' + 2bw - 2Hw^3 - 2cH^2\tau w^4 + 4\tau, \tag{6}$$

где $w'=dw/d\tau$, $w''=d^2w/d\tau^2$, которое является третьим уравнением Пенлеве [10, с. 463]

$$\tau w w'' = \tau w'^2 - w w' + \alpha w^3 + \beta w + \gamma\tau w^4 + \delta\tau, \qquad (P_3)$$

при значениях параметров $\alpha=-2H$, $\beta=2b$, $\gamma=-2cH^2$, $\delta=4$. Таким образом, справедлива

***Теорема* 1.** *Пусть* $w=w\ (\tau,\alpha,\beta,\gamma)$ *– решение уравнения* (P_3) *в случае* $\delta=4$. *Тогда функции*

$$y(t) = e^{-t}w^{-1}(\tau) + b/2,\quad \tau = e^{-t},\quad x(t) = \dot{y}_1(2y_1)^{-1},$$
$$z(t) = -\alpha(2y_1)^{-1}e^{-2t},\quad y_1 = y - b/2 \qquad (7)$$

определяют решение системы (1) *при*

$$a = p = 0,\quad q = -b = \beta/2,\quad c = -2\alpha^{-2}\gamma. \qquad (8)$$

Замечание. Редукция системы (1) в случае $a=p=0$, $q=-b$, $c=0$ к уравнению (P_3) при значении $\gamma=0$ получена в [3].

Для этих же условий в работе [4] предложен метод построения и указаны условия существования точных решений системы (1), выражающихся через решения уравнения (P_3).

Как показано в [6], если $\gamma=0$ и $\alpha=0$ или $\beta=\delta=0$, то (P_3) интегрируется в элементарных функциях.

Укажем алгоритм построения точных решений системы (1) при $a=p=0$, $q=-b$, $c\neq0$, выражающихся через решения уравнения (6), в котором $H\neq0$, то есть уравнения (P_3) в случае $\gamma\delta\neq0$. Ниже без ограничения общности будем считать $\gamma=1$, $\delta=-1$, то есть рассматривать уравнение

$$\tau w w'' = \tau w'^2 - w w' + \alpha w^3 + \beta w + \tau w^4 - \tau, \qquad (P'_3)$$

чего можно добиться масштабным преобразованием в (P_3) независимой переменной τ и функции w.

i) Для уравнения (P'_3) получено в [11] преобразование Беклунда, позволяющее (при определенных условиях) по известному решению $w=w\ (\tau,\alpha_0,\beta_0)$ строить решения уравнения (P'_3) при других значениях α, β. Более точно, справедлива

***Теорема* 2.** *Пусть* $w=w(\tau,\alpha_0,\beta_0)$ *– решение уравнения* (P'_3) *такое, что*

$$zw' - zw^2 - (\alpha_0-1)w - z \equiv 0.$$

Тогда функция

$$w = 1/w + (\beta_0 + \alpha_0 - 2)/[zw' - zw^2 - (\alpha_0 - 1)w - z]$$

является решением уравнения (P'_3) *при* $\alpha=\alpha_0-2$, $\beta=\beta_0-2$.

Замечание. Если параметры (P'_3) подчинены условию $\beta+\alpha-2=0$, то все решения уравнения $zw'-zw^2-(\alpha-1)w-z=0$ (сводящегося преобразованием $w=-u'/u$ к уравнению Бесселя) являются одновременно решениями уравненения (P'_3). Отметим также, что преобразование Беклунда в другой более громоздкой форме приведено в [6].

ii) В [6, с. 100] для (P'_3) получены необходимые и достаточные условия существования рациональных решений, а также указана фундаментальная область изменения α, β, знание общего решения (P'_3) в которой позволяет с помощью преобразования Беклунда строить его во всей области изменения α, β. В [6,12] для (P'_3) получены также необходимые и достаточные условия (представленные через параметры α, β) существования однопараметрических семейств решений, выражающихся через функции Бесселя.

iii) В силу (7), (8) рациональные решения (P'_3) порождают рациональные по e^{-t} решения системы (1) в случае $a=p=0$, $q=-b$, $c\neq 0$, а однопараметрические семейства решений порождают специальные классы двухпараметрических семейств решений. Знание фундаментальной области изменения параметров α, β общего решения уравнения (P'_3) и соотношения (8) позволяют указать фундаментальную область изменения параметров системы (1) в случае $a=p=0$, $q=-b$, $c\neq 0$.

2. Случай $a = q = 0$

Система (1) в случае $q=0$ имеет первый интеграл

$$zy = H_1 e^{(p-2)t} \tag{9}$$

с прозвольной постоянной H_1. Заметим, что наличие интеграла (9) у системы (1) в случае $b=c=q=0$, $a=p$ установлено в [13].

Понизим порядок системы (1) в случае $a=q=0$, а именно, рассмотрим систему

$$\dot{x} = by + H_1 y^{-1} e^{(p-2)t} - 2y^2 + cH_1^2 y^{-2} e^{2(p-2)t}, \quad \dot{y} = py + 2xy. \tag{10}$$

Так как $x = y^{-1}(\dot{2y}) - p/2$, то уравнение, определяющее функцию y, имеет вид

$$y\ddot{y} = \dot{y}^2 + 2by^3 + 2H_1 y e^{(p-2)t} - 4y^4 + 2cH_1^2 e^{2(p-2)t}. \tag{11}$$

2.1. Уравнение (11) в случае $p = 2$ входит в число уравнений [10, с. 450] со свойством Пенлеве и имеет первый интеграл

$$\dot{y}^2 = -4y^4 + 4by^3 - 4H_1 y - 2cH_1^2 + Ky^2, \tag{12}$$

где K – постоянная интегрирования. Уравнение (12) в общем случае интегрируется в эллиптических функциях.

2.2. Если $p\neq 2$, то преобразованием $y=w^{-1}(\tau)\tau$, $\tau=\exp(k\tau)$, $2k=p-2$ уравнение (11) сводится к (P_3) с параметрами

$$\alpha = -2H_1 k^{-2}, \quad \beta = -2bk^{-2}, \quad \gamma = -2cH_1^2 k^{-2}, \quad \delta = 4k^{-2}.$$

Замечание. Для полноты изложения отметим, что в случае $a=p=-1$, $b=c=q=0$ система (1) имеет первый интеграл $zy=ke^{-3t}$ с произвольной постоянной k_1 и ее решения, как показано в [3,4], также обладают свойством Пенлеве.

Заключение

Как уже отмечалось во введении, с качественной точки зрения, характерным признаком системы (2) при условии $ab\neq 0$ является наличие в ней хаотических (нерегулярных) движений. С аналитической точки зрения, этот факт объясняется отсутствием у системы (2) в данном случае решений, обладающих свойством Пенлеве. В связи с этим небезынтересным является вопрос о возможности существования хаоса в системе (1) в случае $a=p\neq 0$, $q=-b\neq 0$, $c\neq 0$. При этих условиях, с одной стороны, система (1) не имеет решений, обладающих свойством Пенлеве, а с другой – она может быть получена из (2) добавлением лишь одного нелинейного слагаемого cz^2 в первое уравнение системы (2).

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект 97–3020).

Библиографический список

1. *Вышкинд С.Я., Рабинович М.И.* Механизм стохастизации фаз и структура волновой турбулентности // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, вып. 2 (8). С. 557.

2. *Баженов М.В., Рабинович М.И., Рубчинский Л.А.* Простая модель нейрона, обладающего сложной осцилляторной активностью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 1. С. 33.

3. *Bountis T.S., Ramani A., Grammaticos B. and Dorizzi B.* On the complete and partial integrability of non–Hamiltonian systems // Physica. 1984. Vol. 128A, № 1–2. P. 268.

4. *Громак В.И., Цегельник В.В.* О решениях системы трех дифференциальных уравнений с квадратичными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 3. С. 396.

5. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

6. *Громак В.И., Лукашевич Н.А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск: Университетское, 1990.

7. *Манаков С.В.* О распространении импульса в длинном лазерном усилителе // Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35, вып. 5. С. 193.

8. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А., Мушер С.Л.* О квазиклассическом режиме трехмерного волнового коллапса // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41, вып. 3. С. 125.

9. *Итс А.Р., Капаев А.А.* Метод изомонодромных деформаций и формулы связи для второго трансцендента Пенлеве // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51, № 4. С. 364.

10. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИУ, 1939.

11. *Цегельник В.В.* Об одном соотношении между решениями третьего уравнения Пенлеве // Теорет. и матем. физика. 1995. Т. 102, № 3. С. 364.

12. *Громак В.И.* О трансцендентности уравнений Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 2. С. 154.

13. *Giagomini H.J., Repeto C.E. and Zandron O.P.* Integrals of motion for three–dimensional non–Hamiltonian dynamical systems // J. Phys: Math. Gen. 1991. Vol. 24, № 19. P. 4567.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 19.04.98
после переработки 5.10.98

SOME ANALYTICAL PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE 3D–DYNAMICAL SYSTEM WITH SQUARE NONLINEARITY

V.V. Tsegel'nik

We consider the analytical properties of solutions of the 3D–dynamical system, related with a model of turbulence with spectrally narrow range and model a neuron with complex oscillatory activity. The algorithm of forming of the system exact solutions, expressed in terms of the solutions of the third Painleve's equation, is offered.

Цегельник Владимир Владимирович родился в 1954 году. Доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Окончил механико–математический факультет Белорусского государственного университета (1977). Кандидат физико–математических наук (1985). Соросовский доцент. Область научных интересов: нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения (аналитические свойства решений) Пенлеве–типа и их приложения. Автор и соавтор более 20 научных статей.