



ЧЕРЕЗ ЭКРАН КОМПЬЮТЕРА – В МИР НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

А.П. Кузнецов

Представлена серия задач компьютерных семинаров по курсу «Динамические системы и бифуркации» для студентов, изучающих нелинейную динамику. Даны примеры компьютерных иллюстраций.

Введение

Изобретение компьютера – одно из наиболее значительных интеллектуальных событий XX века. Компьютеры радикально изменили методологию современного научного исследования. Естественно, что компьютерные «технологии» стали проникать в учебный процесс на всех его уровнях. Первым шагом в этом направлении было появление в учебных планах серии новых дисциплин, таких как «Численные методы в физике», «Информатика» и т.д. Однако со временем стало ясно, что просто научить студентов численным методам и уметь обращаться с компьютером совершенно недостаточно. Изучение области науки, в развитии которой компьютеры сыграли существенную роль, требует столь же существенного использования компьютеров: необходимы и компьютерные демонстрации на лекциях, и непосредственное «общение» студентов с компьютерами на практических занятиях. Таким образом, «педагогический успех» достигается, лишь если учебный процесс протекает с учетом компьютерных подходов соответствующей области науки. По этой причине стали появляться компьютерные практикумы, в рамках которых студенты выполняют своего рода лабораторные работы на компьютерах. (См., например, [1], где описан компьютерный практикум по нелинейной теории колебаний.). Представляется, однако, что при подготовке ученых-исследователей весьма эффективными окажутся своего рода компьютерные семинары. Отличие такой формы обучения от компьютерных практикумов примерно такое же, как теоретических семинаров от лабораторных работ. На компьютерном семинаре студент *решает* задачи с использованием компьютера. При этом он сам выбирает язык программирования, алгоритм, сам составляет программу и сам проводит как предварительное аналитическое, так и собственно компьютерное исследование. Разумеется, вся работа идет в контакте с преподавателем.

Одним из наиболее ярких примеров успеха синтеза компьютерных, математических, физических подходов и методов исследования являются достижения нелинейной динамики. Каждый удачный шаг в формировании

компьютерного инструментария нелинейной динамики вносит существенный вклад в ее методологию и приводит к новым открытиям. Можно указать в этом контексте на построение портретов аттракторов в фазовом пространстве, итерационные диаграммы (диаграммы Ламерея), бифуркационные деревья, идею карт динамических режимов и т.д. Поэтому создание компьютерных семинаров по нелинейной динамике является необходимым этапом в построении концепции профессиональной подготовки соответствующих специалистов–исследователей.

В настоящей работе мы предлагаем Вашему вниманию серию задач компьютерных семинаров по учебной дисциплине «Динамические системы и бифуркации» для студентов 3–го курса Высшего колледжа прикладных наук Саратовского государственного университета. Характер теоретического курса соответствует публикации [2]. Для удобства читателей, решивших воспользоваться этой подборкой задач, даны ссылки на литературные источники, которые могут быть полезными при постановке занятий. При выборе литературы доминировали соображения доступности, а не приоритета и даже не полноты изложения.

1. Задачи компьютерных семинаров

1.1. Эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве для потоковых систем. Задайте облако изображающих точек в фазовом пространстве, например, в виде прямоугольной «решетки» из набора точек. Напишите программу, позволяющую наблюдать за эволюцией этого облака во времени для одной из представленных ниже систем. Проследите за эволюцией облака. По результатам исследования ответьте на вопросы: консервативна или диссипативна система? Есть ли в ней аттракторы? Какого типа эти аттракторы? Проведите компьютерное моделирование для различных значений параметров системы. Изменяется ли при этом характер эволюции облака? Что происходит с аттракторами? Попробуйте изменить форму облака и его начальное положение.

Динамические системы для исследования.

- Нелинейный осциллятор Дуффинга [3]

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x + \beta x^3 = 0. \quad (1)$$

- Уравнение Ван–дер–Поля [3]

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2)x + x = 0. \quad (2)$$

- Уравнение Релея [3]

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0. \quad (3)$$

- Уравнение автогенератора с жестким возбуждением [3]

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0. \quad (4)$$

- Брюсселятор [4]

$$\dot{x} = A - Bx + x^2y - x, \quad \dot{y} = Bx - x^2y. \quad (5)$$

- Система Ресслера [5]

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + z(x - c). \quad (6)$$

1.2. Эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве для отображений. Проведите исследование, аналогичное описанному в предыдущей задаче, для одного из представленных ниже дискретных отображений.

- Отображение Эно [5,6]

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - by, \quad y_{n+1} = x_n. \quad (7)$$

- Шарик на вибрирующем столе (гравитационная машина Заславского) [5,7]

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon)v_n + K \sin \varphi_n, \quad (\varphi_n \bmod 2\pi), \quad (8)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + v_{n+1}.$$

- Возбуждаемый лазером кольцевой оптический резонатор со средой с фазовой нелинейностью (система Икеды) [8]

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(ilz_n|^2). \quad (9)$$

- Отображение Теннисона, Либермана и Лихтенберга, описывающее отражение света от гофрированного зеркала [7]

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - 2a \sin x_n, \quad (\varphi_n \bmod 2\pi), \quad (10)$$

$$x_{n+1} = x_n + \text{htg} \varphi_{n+1}, \quad (x_n \bmod 2\pi).$$

Если ваша система может быть консервативной, особо рассмотрите соответствующие значения параметров.

1.3. Однопараметрический анализ потоковых систем. Бифуркация Андронова – Хопфа. Создайте программу, позволяющую получать портреты аттракторов в фазовом пространстве и реализации (зависимости переменной от времени) для одной из представленных ниже динамических систем. Пронаблюдайте бифуркацию Андронова – Хопфа рождения предельного цикла. Пронаблюдайте эволюцию этого предельного цикла и эволюцию реализаций при дальнейшем увеличении параметра. Опишите наблюдаемые изменения в системе. Определите порог бифуркации Андронова – Хопфа из линейного анализа и сравните с результатами компьютерного моделирования.

Динамические системы для исследования.

- Уравнение Ван–дер–Поля (2) при различных λ .
- Брюсселятор (5) при фиксированном $A=1$ и различных B .
- Модель «хищник–жертва» вида [9]

$$\dot{x} = (a+bx-x^2)x - xy, \quad \dot{y} = xy - ty, \quad (11)$$

при $a=b=1$.

- Система Ресслера (6) при $b=2$, $c=4$ и различных a . Для системы Ресслера получите как проекции аттракторов на какую-либо координатную плоскость, так и аттракторы в трехмерном пространстве.

1.4. Двухпараметрическое исследование двумерных потоковых систем. Постройте плоскость параметров вашей системы, содержащую аналитически определенные линии и точки бифуркаций – свои для каждой динамической системы. Постарайтесь получить в ходе предварительного исследования максимум информации. Постройте портреты аттракторов (или фазовые портреты) в выбранных вами точках на плоскости параметров. Проведите компьютерные эксперименты, иллюстрирующие динамику системы вблизи линий и точек бифуркаций, а также внутри характерных областей на плоскости параметров. Не демонстрирует ли ваша система каких-либо иных бифуркаций, не представленных на плоскости параметров?

Динамические системы для исследования.

• Брюсселятор (5). Предварительно нанесите на плоскость A, B линию бифуркации Андронова – Хопфа.

• Нелинейный осциллятор в окрестности катастрофы сборки

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + ax + b + x^3 = 0. \quad (12)$$

Сначала исследуйте консервативный случай $\gamma=0$. Нанесите на плоскость a, b линии складок и укажите точку сборки [4]. Затем проведите исследование в диссипативном случае. Предварительно постройте линию превращения фокуса в узел.

• Автогенератор с жестким возбуждением (4). Нанесите на плоскость λ, k линии бифуркаций Андронова – Хопфа и линию рождения цикла из сгущения фазовых траекторий, найденную в рамках метода медленно меняющихся амплитуд. Насколько численные исследования подтверждают справедливость этого метода? (Не ограничивайтесь малыми значениями параметров λ и k .) Нанесите на плоскость параметров линию, отвечающую превращению фокуса в начале координат в узел. Пронаблюдайте эволюцию фазовых портретов в ее окрестности. Обратите внимание на существование релаксационных колебаний.

• Уравнение типа Ван-дер-Поля с нелинейностью, характерной для осциллятора с катастрофой складки

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x+1)^2 = 0. \quad (13)$$

Нанесите на плоскость параметров линии бифуркаций седло–узел, Андронова – Хопфа и точку бифуркации коразмерности два. Постройте все характерные фазовые портреты грубых систем в окрестности точки бифуркации коразмерности два. Попробуйте по результатам компьютерного моделирования нанести на плоскость параметров линию, выходящую из этой точки и отвечающую бифуркации, связанной с петлей сепаратрисы.

• Модель «хищник–жертва» (11) в случае $a=1$. Нанесите на плоскость b, m линию бифуркации Андронова – Хопфа. Есть ли в анализируемой системе бифуркации коразмерности два? Если есть, то какие?

1.5. От двумерных потоков – к одномерным отображениям. С помощью метода сечений Пуанкаре постройте одномерные отображения для двумерных потоков. Выберите прямую линию (или луч), пересечение с которым определит сечение Пуанкаре. (Для этого может понадобиться предварительно построить аттрактор на фазовой плоскости.) Изучите трансформацию вида одномерного отображения при вариации параметров. Для полученного численно отображения постройте несколько итерационных диаграмм, характеризующих типичные режимы динамики системы.

Динамические системы для исследования.

• Нелинейный диссипативный осциллятор Дуффинга (1).

• Уравнение Ван-дер-Поля (2).

• Автогенератор с жестким возбуждением (4).

• Трехпараметрическая модель автогенератора с жестким возбуждением

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 + px^4 - x^6)\dot{x} + x = 0. \quad (14)$$

д) Брюсселятор (5).

1.6. Двухпараметрическое исследование одномерных отображений. Постройте карту динамических режимов одного из предложенных отображений – то есть плоскость параметров, на которой оттенком серого цвета обозначены

циклы определенного периода. Линии каких бифуркаций коразмерности один обнаруживаются на карте? Какие точки бифуркаций коразмерности два? Укажите ситуации типа «crossroad area» и «spring area» (по терминологии Мира [10,11]). Создайте дополнительную программу, которая строит итерационные диаграммы в задаваемых вами точках карты. С помощью этой программы проведите следующее исследование:

а) выберите маршрут, пересекающий несколько линий удвоения и пронаблюдайте каскад удвоений периода на итерационной диаграмме,

в) получите циклы с небольшими периодами, например 3 или 5, в островках устойчивости в области хаоса,

в) выберите точку вблизи линии касательной бифуркации (до ее порога) и пронаблюдайте соответствующую эволюцию изображающей точки,

г) пронаблюдайте хаотические режимы,

д) исследуйте эволюцию аттракторов в окрестности точки сборки,

е) исследуйте эволюцию аттракторов в окрестности точки, в которой линия удвоения периода превращается в линию жесткого перехода через мультипликатор -1 (flip-бифуркация коразмерности два).

«Просмотрите» увеличенные фрагменты карты, внутри которых можно наблюдать интересную динамику.

Примеры динамических систем для исследования.

- Кубическое отображение (первый вариант)

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3. \quad (15)$$

- Кубическое отображение (второй вариант)

$$x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3. \quad (16)$$

- «Квартичное» отображение [11,12]

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4. \quad (17)$$

- Любое двух (и более) параметрическое отображение, представляющее интерес для вас и ваших исследований.

1.7. Двухпараметрическое исследование двумерных отображений.

Постройте карты динамических режимов двумерного двухпараметрического отображения. Идентифицируйте бифуркационные линии коразмерности один и точки коразмерности два, а также характерные композиции бифуркаций на карте. «Просмотрите» увеличенные фрагменты карты, внутри которых можно наблюдать интересную динамику. Создайте программу, которая демонстрирует аттракторы отображения. Пронаблюдайте эволюцию аттракторов при вариации параметров, в частности, каскады удвоений периода, а также хаотические аттракторы и их эволюцию. Особое внимание уделите фейгенбаумовским критическим аттракторам. Просмотрите увеличенные фрагменты критических и хаотических аттракторов. С помощью программы, демонстрирующей эволюцию изображающей точки на фазовой плоскости, пронаблюдайте последовательные «прыжки» этой точки при приближении к неподвижной точке и некоторому циклу.

Динамические системы для исследования.

- Отображение Эно (7).
- Шарик на вибрирующем столе (8).
- Система Икеды (9).

1.8. Квазипериодические движения, синхронизация и бифуркация

Неймарка. Получите карты динамических режимов для представленных ниже систем. Идентифицируйте на картах линию бифуркации Неймарка (линию рождения инвариантной кривой) и языки синхронизации. Постройте портреты

аттракторов в окрестности какого-либо языка синхронизации. Варьируя параметры, наблюдайте инвариантную кривую и цикл, отвечающий синхронизации. Пронаблюдайте «прыжки» изображающей точки, приближающейся к инвариантной кривой и к некоторому циклу. Определите число вращения, соответствующее этому циклу. Используя конденсацию изображающих точек в фазовом пространстве, наблюдайте в режиме компьютерной мультипликации многообразия цикла, реализующегося внутри языка синхронизации. Идентифицируйте точки бифуркации коразмерности два, характерные для двумерных отображений, если они имеются в вашей системе.

Динамические системы для исследования.

- Нелинейное модельное отображение

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= Jy_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.\end{aligned}\tag{18}$$

- Два идентичных логистических отображения с линейной связью [13]

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n), \\y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n).\end{aligned}\tag{19}$$

- Неидентичные связанные логистические отображения с квадратичной связью [14]

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - C y_n^2, \\y_{n+1} &= 1 - A y_n^2 - B x_n^2,\end{aligned}\tag{20}$$

для фиксированных $B=0.375$, $C=-0.25$.

1.9. Синхронизация и квазипериодические режимы для отображений окружности. Постройте карту динамических режимов для отображения окружности [5,6,15]

$$x_{n+1} = x_n + \Omega + K \sin x_n / (2\pi), \quad (x_n, \text{mod } 1).\tag{21}$$

Получите так называемую «чертову лестницу», дающую зависимость числа вращения от параметра Ω при $K < 1$ и $K = 1$. Укажите на этой лестнице ступеньки, отвечающие нескольким последовательным уровням построения дерева Фейри. Получите увеличенный фрагмент чертовой лестницы в окрестности иррационального числа вращения $\omega = (5^{1/2} - 1)/2$, известного как «золотое сечение», при $K = 1$. Идентифицируйте ступеньки этой лестницы, отвечающие аппроксимации золотого сечения при помощи чисел Фибоначчи. Получите итерационные диаграммы, демонстрирующие циклы с числами вращения $1/3$ и $2/5$. Получите итерационную диаграмму, отвечающую какому-либо квазипериодическому режиму. Используйте для определения соответствующих параметров чертову лестницу.

1.10. От трехмерных потоков – к двумерным отображениям. Создайте программу, позволяющую строить сечения Пуанкаре в виде двумерных обратимых отображений для трехмерных потоков. Для определения координат точки пересечения с секущей плоскостью используйте метод Эно [13]. Получите изображение аттракторов в сечении Пуанкаре для нескольких значений параметров. Пронаблюдайте регулярные и хаотические аттракторы. Используя эту программу, постройте бифуркационные деревья для одной из переменных в сечении Пуанкаре. Сопоставьте результаты исследования аттракторов и вид бифуркационного дерева.

Динамические системы для исследования.

- Система Ресслера (6).
- Система Лоренца [5,6]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x), \\ \dot{y} &= Px - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{22}$$

- Схема Чуа [16]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - h(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y,\end{aligned}\tag{23}$$

где
$$h(x) = \begin{cases} (2x-3)/7 & \text{при } x \geq 1, \\ -x/7 & \text{при } |x| \leq 1, \\ (2x+3)/7 & \text{при } x \leq -1. \end{cases}$$

- Генератор с инерционной нелинейностью [13]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= g(-z + \Phi(x)),\end{aligned}\tag{24}$$

где
$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

1.11. Двухпараметрическое исследование трехмерных потоков.

Используя предыдущую программу и программу построения карт динамических режимов двумерных отображений, постройте карты для трехмерных потоков. Постройте трехмерные портреты аттракторов в характерных точках плоскости параметров. Пронаблюдайте каскад удвоений периода, хаотические аттракторы, аттракторы, отвечающие «островкам устойчивости» в хаотической области.

Динамические системы для исследования.

- Система Ресслера (5) для $b=0.2$.
- Система Лоренца (22).
- Схема Чуа (23).
- Генератор с инерционной нелинейностью (24).

2. Примеры компьютерных иллюстраций

Приведем некоторые компьютерные иллюстрации для предложенных задач и дадим комментарии, которые могут быть полезными при постановке занятий.

На рис.1 показана конденсация изображающих точек на аттрактор уравнения Ван-дер-Поля (2) для значения параметра $\lambda=2$. Подобные картинки весьма эффектны в режиме компьютерной мультипликации и дают любопытную информацию о динамике системы, которая пропадает при традиционном изображении аттракторов. Очень быстро (за время $t \approx 1$) «визуализируется» контур

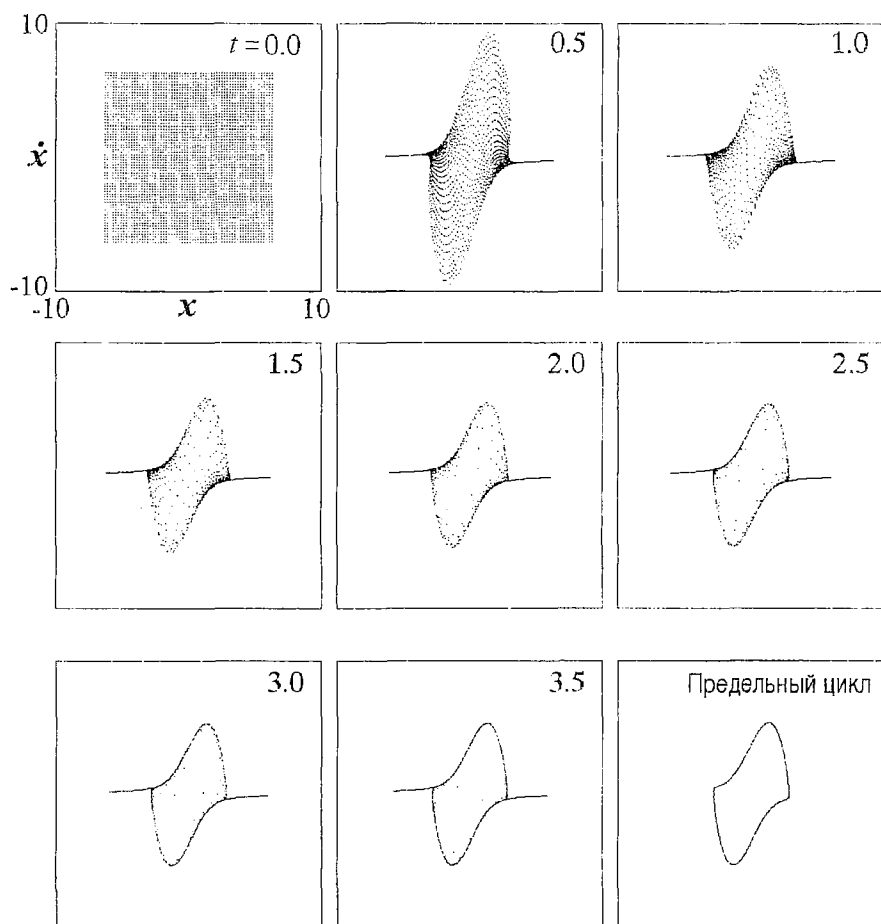


Рис. 1

формирующегося предельного цикла. Однако процесс конденсации развивается еще очень долго. За время $t \approx 3$ на предельный цикл приходит большинство точек из внутренней области. Точки же во внешней области сжимаются на две практически одномерные «ветви», которые необычайно долго «втягиваются» в предельный цикл. Отдельные точки во внутренней области также достаточно долго блуждают, прежде чем придти на аттрактор.

На рис. 2 можно видеть конденсацию изображающих точек на аттрактор отображения Эно (7). Выбраны «классические» значения параметров $\lambda=1.4$, $b=-0.3$, которым отвечает хаотический аттрактор. На рисунках, отвечающих первой и второй итерациям, хорошо видны процессы сжатия и складывания в фазовом пространстве. В целом конденсация точек происходит достаточно быстро, и уже на пятой итерации вид облака не отличается от изображения аттрактора.

На рис. 3 представлены фазовые портреты для задачи о динамике луча света в волноводе с гофрированным зеркалом (9) при $h=0.5$ и различных a , демонстрирующие характерную эволюцию изображающих точек консервативной системы. На рисунках четко идентифицируются инвариантные кривые и стохастический слой. С ростом параметра a стохастический слой становится все более «толстым». На верхнем правом рисунке ($a=0.1$) хорошо просматриваются окружающие стохастический слой вторичные резонансы. При $a=0.2$ граница стохастического слоя является волнистой, а при $a=0.3$ хотя и не гладкой, но достаточно регулярной.

На рис. 4 изображена карта динамических режимов одномерного кубического отображения (15). Различными оттенками серого цвета показаны

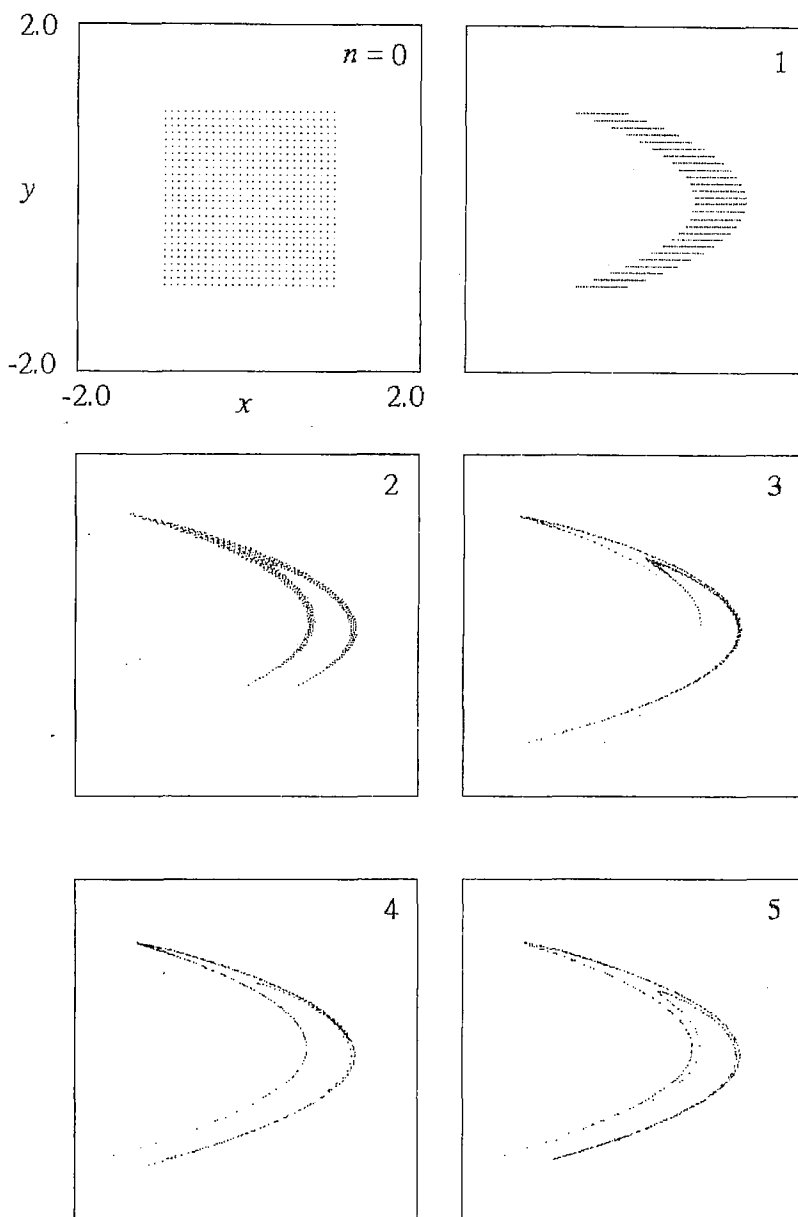


Рис. 2

режимы, отвечающие циклам определенных периодов. Белый цвет отвечает убеганию изображающей точки на бесконечность, а черный – хаотическим режимам. В нижней части рисунка видна граница между областями устойчивости неподвижной точки и цикла периода 2, представляющая собой линию бифуркации удвоения периода. Линий рождения 4-цикла в результате аналогичной бифуркации уже две, причем область устойчивости 2-цикла имеет характерный вид с уходящим «вверх» пересекающимися «отростками». Таким образом, область устойчивости 2-цикла ограничена этими линиями удвоений, а также двумя линиями складок, которые образуют нижнюю границы «отростков». Отметим, что линии складок продолжаютсЯ внутрь области устойчивости 2-цикла и сходятся в точке сборки ($a=0$, $b=2$), которая, однако, на рисунке не видна. Описанная совокупность бифуркационных линий представляет известную конфигурацию «crossroad area» [10,11]. На карте можно видеть две аналогичные конфигурации на базе 8-циклов. Самые широкие окна устойчивости реализуются на основе 3-циклов, внутри них

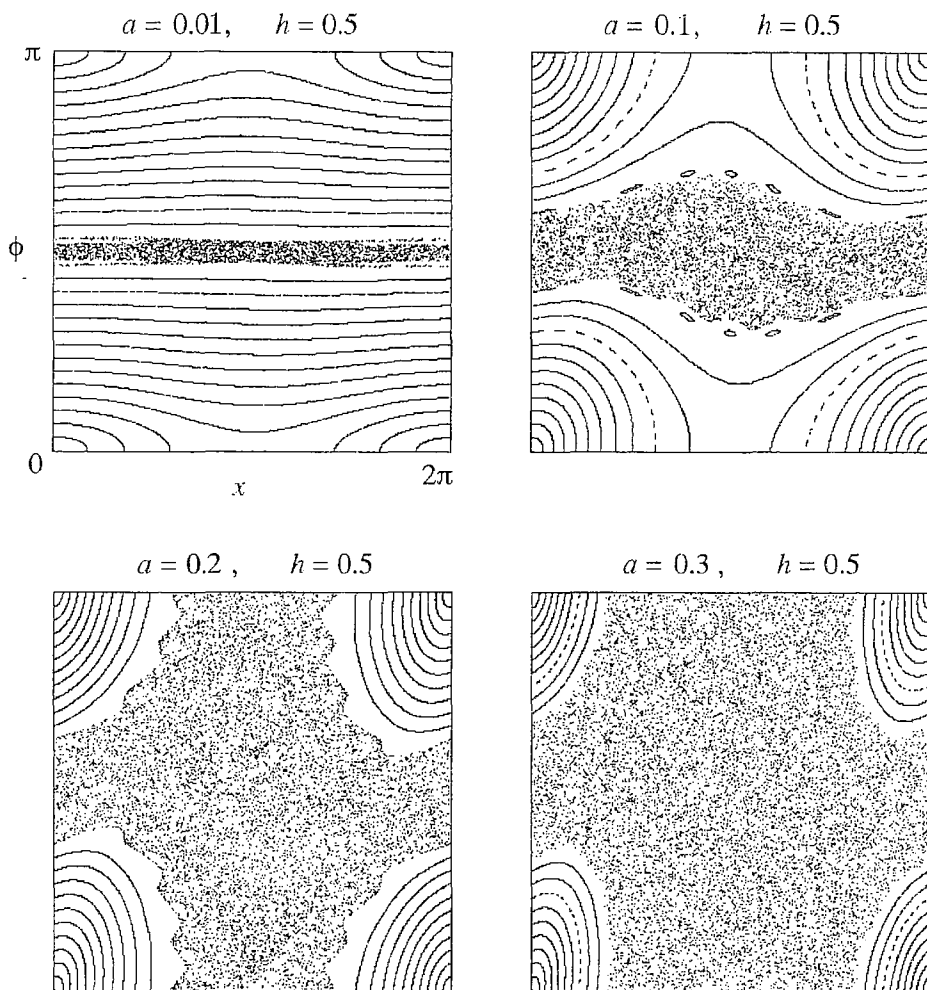


Рис. 3

можно идентифицировать конфигурации «crossroad area», отвечающие областям устойчивости 6-циклов.

На рис. 5 показана карта динамических режимов кубического отображения (16). Выбран аналогичный способ представления режимов. В центре рисунка расположена отвечающая неподвижной точке сборки ($a=0, b=1$). От нее отходят две линии складок, которые хорошо просматриваются в верхней части рисунка как края области устойчивости неподвижной точки. Эта область, кроме того, ограничена соответствующими линиями бифуркации удвоения периода. В нижней части рисунка такие линии заканчиваются в двух симметричном образом расположенных точках. Это точки так называемой flip-бифуркации коразмерности два (в подобных точках производная Шварца [4] равна нулю, их координаты в данном случае $a=\pm 16/27, b=-2/3$). В точке flip-бифуркации коразмерности два линия удвоения превращается в линию жесткого перехода через мультипликатор -1 , что хорошо видно на рисунке. От нее также отходит линия касательной бифуркации 2-цикла. Вся эта «композиция» бифуркаций образует характерную конфигурацию, известную как «spring area» [10].

Бифуркацию Неймарка и синхронизацию иллюстрирует карта для неидентичных связанных логистических отображений с квадратичной связью (20) (рис.6). На рисунке все циклы периода 8 и выше обозначены одним (черным) цветом, что позволяет очень четко увидеть всю систему языков синхронизации.

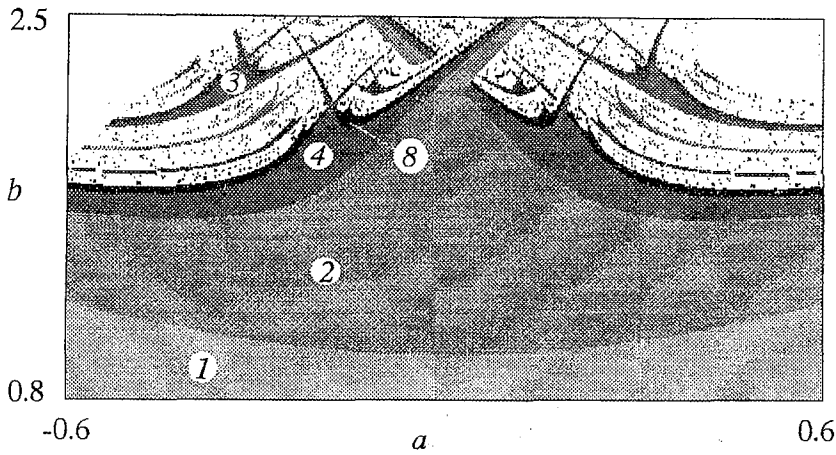


Рис. 4

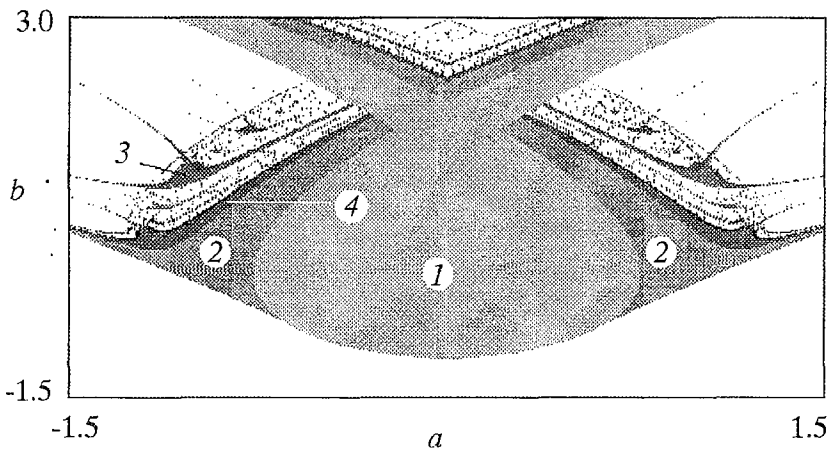


Рис. 5

Области хаоса и квазипериодические режимы обозначены белым. Наиболее «существенная» система языков синхронизации примыкает к области устойчивости неподвижной точки отображения. Линия, от которой отходят языки синхронизации, ограничена слева и справа двумя характерными точками. Это точки бифуркации коразмерности два, в которых сходятся линии удвоения периода и линия бифуркации Неймарка. Соответствующая бифуркация не имеет аналога в одномерном случае: ей отвечает ситуация, когда оба мультипликатора обращаются в -1 .

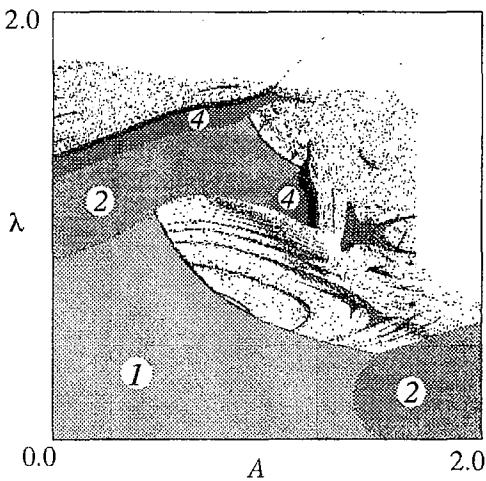


Рис. 6

На рис. 7 представлена карта динамических режимов для системы Ресслера (6) при $b=0.2$, полученная с помощью построения сечения Пуанкаре по методу Эно. (Выбраны значения параметров, отвечающих карте, полученной в [17] методом адаптивной фильтрации.) Внизу представлены характерные портреты аттракторов, отвечающие удвоениям периода, справа – аттрактор внутри окна устойчивости периода 3 и предельный цикл периода 6.

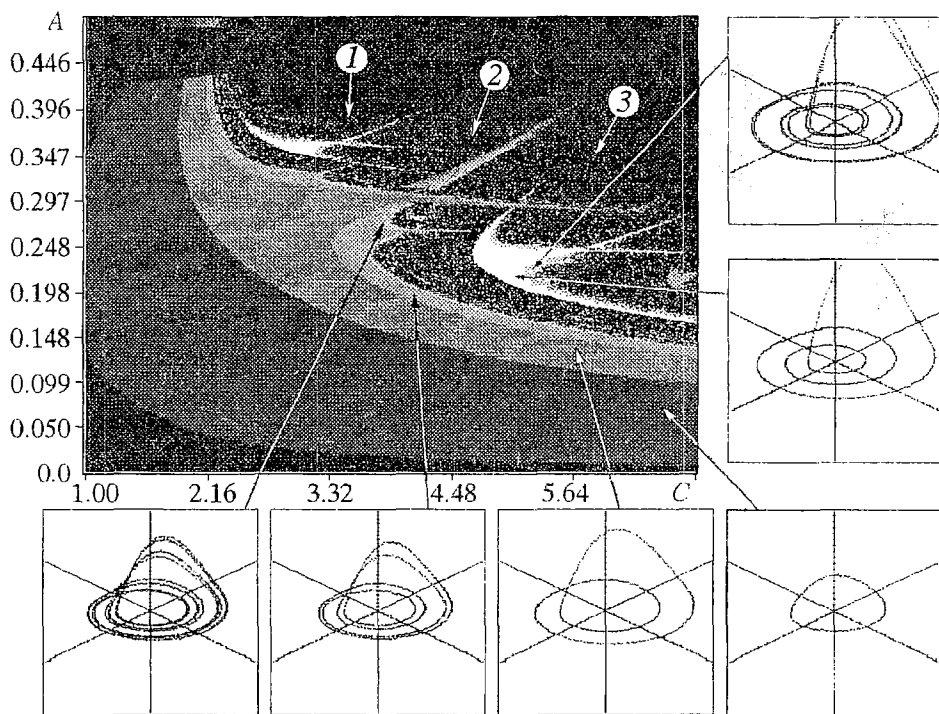


Рис. 7

Автор выражает благодарность С.П. Кузнецову, Л.В. Красичкову и Н.С. Богданову за помощь и полезное обсуждение, а также всем студентам, участвовавшим в постановке компьютерных семинаров.

Работа поддержана грантом Федеральной целевой программы «Интеграция» (№ 696.03). При постановке заняты использованы результаты научных исследований, поддержанных грантами РФФИ № 96–15–96921.

Библиографический список

1. Постнов Д.Э. Бифуркации регулярных аттракторов. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. 102 с.
2. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Нелинейные колебания, катастрофы, бифуркации, хаос: учебные программы // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 4. С. 19.
3. Трубецков Д.И., Рабинович М.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
4. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. М: Мир, 1990, 344с.
5. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 312 с.
6. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
7. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
8. Гиббс Х. Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света. М.: Мир, 1988. 520 с.
9. Свиржев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987, 368 с.
10. Carcasses J., Mira C. Bosch M., Simo C., Tatjer J.C. Crossroad area – spring area transition (1) Parameter plane representation // Int. J. Bifurc. & Chaos. 1991. Vol. 1. P. 183.
11. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Сатаев И.Р. Критическая динамика

одномерных отображений. Часть 2. Двухпараметрический переход к хаосу // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 3–4. С. 17.

12. *Chang S.J., Wortis M., Wright J.A.* Iterative properties of a one-dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior // Phys. Rev. 1981. Vol. A24, № 5. P. 2669.

13. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.

14. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* New types of critical dynamics for two-dimensional maps // Phys.Lett. 1992. Vol. A162, № 3. P.236.

15. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 368 с.

16. ТИИЭР. Тематический выпуск «Хаотические системы». 1997. Т. 75, № 8. 184 с.

17. *Кипчатов А.А., Подин С.В.* Применение методики адаптивной фильтрации для определения периода колебаний потоковой системы // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 2–3. С. 72.

*Высший колледж прикладных наук СГУ
Саратовский филиал
Института радиотехники и
электроники РАН*

Поступила в редакцию 3.06.98

VIA COMPUTER SCREEN INTO THE WORLD OF NONLINEAR DYNAMICS

A.P. Kuznetsov

A series of computer problems is presented covering the course «Dynamical systems and bifurcations» for students specialized in Nonlinear Dynamics. Examples of computer illustrations are given.



Кузнецов Александр Петрович родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Опубликовал более 50 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соросовский доцент. Научный руководитель молодежного научного центра «Нелинейная динамика и сложные структуры» СФ ИРЭ РАН и студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика»

СГУ и СФ ИРЭ РАН. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для Колледжа прикладных наук СГУ и трех популярных книг.

90 лет
Саратовскому
университету

