



МОДЕЛЬ ГЕКАТОНХЕЙРОВ¹ ОСВОБОЖДЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ И МЯГКАЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ В ТЕОРИИ САМООРГАНИЗОВАННОЙ КРИТИЧНОСТИ

А.В. Подлазов

Построена новая самоорганизованно критическая модель освобождения поверхности, демонстрирующая мягкую универсальность, заключающуюся в возможности непрерывно изменять значение одного из критических показателей, варьируя параметр модели. При этом остальные показатели остаются без изменения, что принципиально отличает предложенную модель от традиционных критических систем, набор показателей которых жестко задан правилами и может быть изменен только путем радикальной смены правил, переводящей систему в другой класс универсальности.

Работа содержит также краткий обзор литературы по моделям роста и освобождения поверхностей.

Введение

Появившаяся чуть более десятилетия назад теория самоорганизованной критичности (СК) [1] в настоящее время привлекает самое активное внимание исследователей, работающих в различных областях физики. Для СК-систем характерны такие широко распространенные в природе явления, как фликкер-шум, степенные законы распределения вероятностей, дальние пространственные и временные корреляции, фрактальность, гигантские флуктуации и наличие у системы в целом нетривиальных свойств, отсутствующих у составляющих ее элементов [1,2]. Поскольку перечисленные свойства, как правило, не возникают в простых системах малой размерности, их воспринимают как проявления сложности, что еще более усиливает интерес к ним.

Обыкновенные критические явления, которым присущи перечисленные черты, происходят лишь при искусственной установке температуры или иных управляющих параметров в определенную – критическую – точку [3]. Поскольку в естественных условиях за пределами лаборатории некому делать это, сами по себе критические явления не позволяют объяснить возникновение сложности в природе [2]. Оказалось, однако, что существуют достаточно простые и универсальные механизмы, приводящие к самоорганизации нелинейных открытых систем в критическое состояние без тонкой подстройки управляющих параметров [1], в силу чего критические явления исключительно широко представлены в природе [2,4].

¹ Гекатонхейры – в греческой мифологии сторукие великаны, дети Урана и Геи, стражи врат Тартара.

Теория самоорганизованной критичности нашла свое применение в астрофизике для описания солнечных вспышек [5] и сбоя периода излучения пульсара [6], в метрологии для объяснения фликкер-шума данных колебаний влажности воздуха [7] и описания образования облаков [8], в геофизике при объяснении формирования фрактальной структуры земной коры [2] и закона Рихтера-Гутенберга повторяемости землетрясений [9], в ядерной физике для описания роста кластеров в кварк-адронном фазовом переходе при столкновении тяжелых ионов [10]. СК-модели созданы для объяснения значительных флуктуаций веса, происходящегося на дно силосной башни [11], для описания лесного пожара [12], динамики магнитных доменов в тонких пленках [13], динамики транспортного потока [2,14], биологической эволюции [15,16], лавин в куче песка [1] или риса [17], формирования речной сети [18], функционирования человеческого мозга, экономики и многих других систем [2].

Существует несколько возможных (и, в принципе, эквивалентных) подходов к объяснению и качественному описанию явления самоорганизованной критичности, заостряющих внимание на разных его аспектах.

Один из них основан на представлении о минимально устойчивых элементах [1], реагирующих на любое воздействие, приложенное к ним, воздействуя, в свою очередь, на другие элементы. Если система находится в докритическом состоянии, где концентрация минимально устойчивых элементов невелика, то возмущение затрагивает лишь небольшую ее часть, распространяясь на конечное расстояние. Сверхкритическое состояние является метастабильным и реагирует на возмущение взрывным всплеском релаксационной активности. В критической точке, разделяющей эти режимы, отсутствуют характерные энергии, размеры и длительности реакций, то есть распределения вероятностей имеют степенной вид [1,2]. При этом для самоорганизации в критическую точку достаточно, чтобы возмущения увеличивали в среднем количество минимально устойчивых элементов, а релаксационный процесс его уменьшал.

Другой взгляд связывает самоорганизованную критичность с ветвящимися процессами. При коэффициенте размножения ветвящегося процесса равном единице, то есть когда он едва выживает, его свойства описываются степенным распределением вероятности [19,20]. Таким образом, для критического поведения необходимо и достаточно наличие возможности (быстрого) лавинообразного развития надпороговых возмущений, сопряженной с (медленным) механизмом типа отрицательной обратной связи, возвращающим систему в точку, соответствующую единичному коэффициенту размножения.

Третья точка зрения (наиболее любезная автору) состоит в том, что природа явления самоорганизованной критичности состоит в смене объекта управления. В обычных критических явлениях мы должны подстраивать управляющий параметр к а priori неизвестному критическому значению, при переходе через которое параметр порядка начинает принимать ненулевые значения [3,21]. В СК-системах происходит ровно обратная вещь: параметр порядка устанавливается в значение (+0), что заставляет управляющий параметр самостоятельно принять критическое значение (вместо того, чтобы крутить ручку прибора, мы начинаем руками сдвигать с нулевой отметки стрелку на его шкале, вынуждая ручку повернуться до нужного положения) [22]. Такое управление параметром порядка обыкновенно достигается при помощи разделения временных масштабов [12], при котором время реакции системы на возмущение много меньше времени между последовательными возмущениями, то есть события едва-едва происходят.

Для описания сложных систем с большим числом степеней свободы, к числу которых относятся и СК-системы, обыкновенно применяются статистические зависимости типа законов распределения вероятностей, корреляций и т.п. В критических системах их асимптотика имеет степенной вид и, соответственно, определяется значением показателя степени, называемого также *критическим индексом*. Критические явления как «обыкновенные», так и самоорганизованные характеризуются набором своих критических индексов, называемым *классом универсальности* модели. Логика такого названия состоит, с одной стороны, в том,

что многие совершенно разные по своей физике и правилам модели имеют один и тот же набор показателей, то есть попадают в один класс универсальности, а с другой, критические системы обыкновенно являются «грубыми», то есть их критические индексы не меняются при незначительном изменении правил модели [2].

Вообще говоря, получить степенные законы распределения вероятностей можно и в простых системах. Примерами могут служить одномерное линейное отображение со случайными коэффициентами, имеющее многочисленные биологические, социальные и экономические интерпретации [23] или процесс чистого размножения, описывающий временной рост числа написанных ученым статей [24]. Такие модели не являются грубыми, и показателям в них легко можно придать любое значение, меняя параметры моделей. Однако отличительной чертой всех этих феноменологических моделей является то, что в них за скобки оказывается вынесенной физика, то есть ответ на принципиальный вопрос, что обеспечивает функционирование системы именно в тех условиях, где оно описывается данной моделью. И как только мы попытаемся дать на него ответ, мы тут же получим самоорганизованно критическую модель, имеющую какое-то одно вполне конкретное значение показателя.

Степенной характер зависимостей, описывающих критические системы, служит причиной качественных отличий в их поведении по сравнению с динамикой «обычных» систем. Так, убывающие степенным образом дальние корреляции означают, что система представляет собой целое, а не простую сумму своих частей. Степенные законы распределения вероятностей говорят о склонности системы к катастрофам, то есть о том, что малые причины в ней могут вести к большим следствиям. Вместе с тем надо отметить, что для ряда процессов и систем наибольшая эффективность функционирования достигается именно в критической точке [2].

Поэтому весьма важным, хотя и малоизученным является вопрос о возможности управления свойствами критических систем. Оговоримся, что здесь не имеется в виду управление с целью перевода системы из критического состояния в некритическое и наоборот. Теоретически разрушить критичность несложно, но тем самым мы из сложной системы сделаем простую. На практике это означает либо, что подобная операция просто невыполнима, либо то, что, проделав ее, мы вышлеснем вместе с водой и младенца, лишив систему возможности функционировать. Поэтому интерес для исследования представляет вопрос, можем ли мы управлять поведением системы в критическом состоянии? И если да, то в какой мере: насколько наши возможности ограничены грубостью критических систем?

Настоящая работа, проливающая свет на эти вопросы, посвящена необычным свойствам, появляющимся в одной из СК-систем, описывающей поведение поверхностей в условиях сильной нелинейности, при варьировании параметра системы. Раздел 1 содержит краткий обзор литературы по моделям роста и освобождения поверхностей. В разделе 2 строится новая модель, названная моделью гекатонхейров, и приводятся результаты ее компьютерного моделирования. Заключительный раздел посвящен обсуждению полученных результатов.

1. Обзор некоторых результатов по моделям роста и освобождения поверхности и экстремальным моделям

Процесс образования твердого тела при осаждении из пара или при баллистическом осаждении может быть описан уравнением KPZ (Кардар – Паризи – Жанг)

$$\partial h/\partial t = \nu \nabla^2 h + \lambda (\nabla h)^2/2 - f, \quad (1)$$

где $h(x,t)$ – высота поверхности в точке x в момент времени t ; $f=f(x,t)$ – Гауссов шум с корреляцией

$$\langle f(x,t)f(x',t') \rangle = D\delta(x-x')\delta(t-t'), \quad (2)$$

учитывающий флуктуации скорости осаждения [25]. Квадрат градиента в уравнении (1) возникает благодаря тому, что рост всегда происходит по нормали к поверхности [26,27], а диффузионный член учитывает эффекты поверхностного натяжения или повторное испарение–осаждение молекул.

Класс явлений, которые можно описать уравнением (1), включает движение жидкости через смачиваемую пористую среду [28], направленный рост полимера в случайном потенциале [27,29–32], химическое осаждение из пара [33], горение бумаги без пламени [34], случайное перемешивание жидкостей [35], электрохимическое осаждение, рост колоний бактерий и ряд других явлений [26,27,32,36 и ссылки в этих работах].

При помощи уравнения KPZ, вообще говоря, можно описать процесс формирования или роста поверхности практически любой природы, если рассматривать диффузионный и нелинейный члены как формально отвечающие, соответственно, за релаксацию неоднородностей и за анизотропию направления роста. Поскольку пространственные производные более высокого порядка несущественны [26,27], можно ограничиться этими двумя членами. При этом конкретная физика процесса будет выражаться в статистических свойствах шума f и, возможно, в нулевом значении одного из коэффициентов, ν или λ (случай $\nu=\lambda=0$, исследуемый в работе [37], мы здесь рассматривать не будем).

Естественной динамической характеристикой процесса роста поверхности служит ее средняя ширина

$$w(t) = [\langle h^2(x,t) \rangle - \langle h(x,t) \rangle^2]^{1/2}, \quad (3)$$

которая удовлетворяет скейлинговому соотношению вида [27]

$$w \sim L^z g(t/L^z), \quad (4)$$

где L – геометрический размер, на котором производится усреднение в определении (3), а динамический показатель z и шероховатость поверхности χ связаны формулой

$$\chi + z = 2, \quad (5)$$

отражающей инвариантность уравнения (1)–(2) относительно наклона поверхности на малый угол [26,27]. Во время переходного процесса при $t \ll L^z$ ширина поверхности растет как $w \sim L^{\chi/z}$, достигая на больших временах $t \gg L^z$ стационарного значения $w \sim L^\chi$ [25,38].

Наряду со стохастическим дифференциальным уравнением (1)–(2) процесс можно описать (в длинноволновом пределе) при помощи клеточного автомата, который существенно проще для численного исследования. Подложка осаждения представляется как d -мерная решетка, в ячейках которой находятся числа, соответствующие высоте поверхности h . На очередном временном шаге выбирается случайная ячейка i и поверхность над ней продвигается на единицу $h_i \rightarrow h_i + 1$, если для всех соседей этой ячейки i' выполнено условие Кима – Костерлица ограниченности градиента

$$|h_i - h_{i'}| \leq 1, \quad (6)$$

учитывающее диффузионный член в уравнении (1), который отвечает за размывание пространственных неоднородностей, характеризующихся большим градиентом (иными словами, высота h может увеличиваться на плоской площадке или в «яме», но не растет на «склоне» или «пике»). Граничные условия для данного автомата обыкновенно полагаются периодическими. При компьютерном моделировании для него в работе [25] была получена эмпирическая зависимость от пространственной размерности подложки d показателя шероховатости

$$\chi = 2/(d+3), \quad (7)$$

впоследствии доказанная путем скейлингового анализа уравнения KPZ в пределе доминирования нелинейного члена над диффузионным (сильное связывание) [38].

Наблюдаемые в опыте значения показателя шероховатости χ для одномерного случая лежат где-то в диапазоне $0.55 \div 0.81$, что отличается от значения $\chi=1/2$, которое дает (7) в одномерном случае. Причиной отличия является природа шума, которая оказывает решающее влияние на освобождение и формирование поверхности [27,36,38–41]. Альтернативой шуму (2) может служить, например, шум, имеющий затухающие степенным образом пространственные или временные корреляции [27,41]. Возможно также, что в системе действует шум хоть и некоррелированный, но имеющий существенно негауссово (степенное) распределение амплитуды [39,40]. Однако возникновение дальних корреляций или степенного распределения амплитуд означает, что шум сам, скорее всего, производится каким-то сложным процессом (возможно, что самим процессом формирования поверхности) [27,39]. Такое положение дел, вообще говоря, нетипично, и для описания общей ситуации естественнее предположить, что шум зависит от положения, которого достигла поверхность в своем движении (особенно, если оно происходит в среде), но практически не зависит от времени, то есть $f=f(x,h)$. Иначе говоря, шум должен рассматриваться как «закрепленный», а не как «свободный». При этом формула (2) заменяется на

$$\langle f(x,h)f(x',h') \rangle = D\delta(x-x')\delta(h-h'), \quad (8)$$

дающую несколько большие значения показателя шероховатости [36].

На языке клеточных автоматов шум с корреляцией (8) можно учесть, связав с каждой точкой пространства значение $f(x,h)$, которое интерпретируется как цепляющая сила, мешающая движению поверхности. Поэтому при моделировании для освобождения выделяется участок с минимальным значением f как испытывающий наименьшее противодействие. Причем минимум цепляющей силы ищется только среди тех участков, где выполнено условие (6). Моделирование при $d=1$ дает единичное значение показателя χ . Таким образом, шероховатость поверхности для закрепленного шума получается больше, чем для свободного, а экспериментальные данные лежат между этими двумя предельными случаями [36].

Выбор для активизации элемента с минимальным значением f уместно трактовать как освобождение поверхности, происходящее при нулевой температуре, а выбор случайного элемента соответствует «горячей» системе. Общую же ситуацию можно описать, введя температуру T и определяя вероятность выбора элемента i как $p \sim \exp(-f_i/T)$. Попытка такого описания была предпринята в работе [42], где утверждается, что при всех $T < \infty$ модель принадлежит к одному классу универсальности, а при $T = \infty$ – к другому. К сожалению, моделирование в работе [42] было проведено (помимо экстремальных значений температуры) всего лишь при нескольких больших значениях T , лежащих в диапазоне одного порядка величины, что не позволяет сделать однозначных выводов о том, можно ли получить промежуточные значения шероховатости при умеренных температурах.

Далее мы сосредоточимся на анализе варианта модели с закрепленным шумом, называемого *моделью Снеппена*, которую можно рассматривать как одну из базовых моделей освобождения поверхности. Она возникает, если интерпретировать ограниченность градиента (6) не как запрещающее условие, а как вынуждающее. То есть минимум f ищется по всем точкам поверхности, но продвигается не только выбранный участок, но и все его соседи, для которых неравенство (6) оказывается нарушенным, до тех пор, пока оно вновь не станет выполняться.

На рис. 1 представлен пример одного шага модели Снеппена. *Стрелкой 1* обозначен участок с наименьшей цепляющей силой, который был подвергнут активации. Рис. 2 демонстрирует типичные профили поверхности, получающиеся при моделировании. Рисунок наглядно отражает сложный процесс освобождения

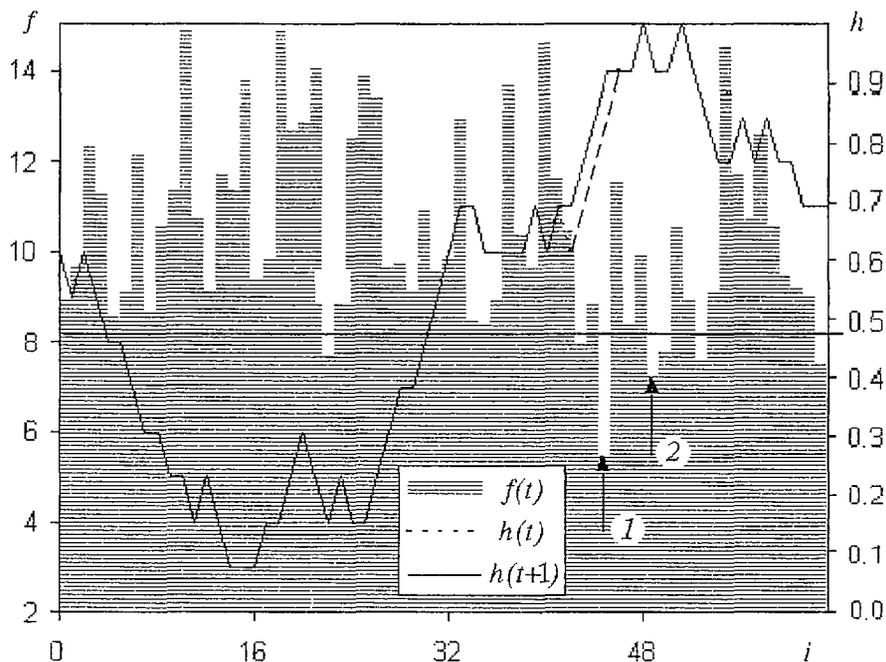


Рис. 1. Профиль цепляющей силы $f(t)$ и положения поверхности в последовательные моменты времени $h(t)$ и $h(t+1)$ для одномерной системы с $L=64$. Стрелками указаны положения наименьшего и второго по величине значений цепляющей силы. Горизонтальной линией показан примерный уровень f_c

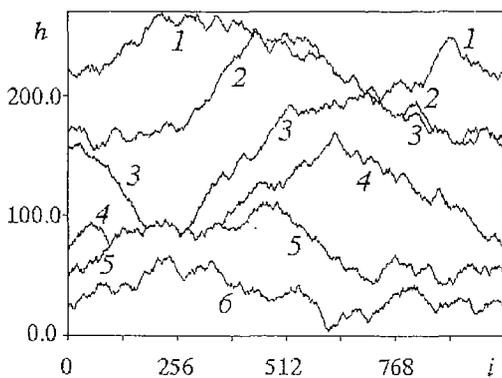


Рис. 2. Положения поверхности для системы с $L=1024$ и $n=1$ через 10, 20, ..., 60 тысяч шагов после старта из состояния с $h_i=0$

поверхности и ее самоаффинную структуру.

Поскольку каждый раз при продвижении участка поверхности изымается наименьшее из значений цепляющей силы, то независимо от начального распределения f со временем система самоорганизуется в критическое состояние, в котором на поверхности практически отсутствуют точки со значениями f , меньшими некоторой пороговой величины f_c . Подробно процесс выхода распределения на стационар описан в работах [43–45], здесь отметим лишь, что если исходно величины $f(x, h)$ равномерно распределены на некотором интервале, то

стационарное распределение их значений на поверхности в пределе бесконечно большого размера системы имеет вид ступеньки $p(\eta) \sim \theta(f_c - f)$.

Строго говоря, модель Снеппена не является точным дискретным аналогом уравнения KPZ: хотя формула (4) остается для нее применимой, скейлинговое соотношение (5) нарушается [36]. Тем не менее, модель служит вполне адекватным описанием сложных явлений, происходящих при освобождении поверхности. Получаемое для нее значение $\chi=0.63$ лежит примерно в середине диапазона значений шероховатости, измеряемых в натуральных экспериментах, и совпадает со значением показателя для кластеров модели направленной перколяции [36, 43, 45].

Последнее обстоятельство легко объяснимо. Для каждого значения f ,

выбираемого на очередном шаге, можно определить f -лаvinу как последовательность событий, которые происходят до тех пор, пока минимальное значение силы на поверхности снова не станет $f_{\min} \geq f$ [44,45]. В начале и в конце f -лавины поверхность целиком заключена во множестве «блокирующих» точек пространства с цепляющей силой, большей или равной f , которые, следовательно, образуют бесконечный связный кластер. При этом пороговое значение f_c , выше которого f_{\min} не поднимается, соответствует точке его исчезновения, то есть плотность точек с $f \geq f_c$ равна критической плотности для направленной перколяции, что и обеспечивает равенство показателей шероховатости для этих моделей [43,45]. При этом следует отметить, что, в отличие от фрактального перколяционного кластера, области, покрываемые лавинами, компактны [45].

На процесс самоорганизации в критическое состояние можно взглянуть и с другой точки зрения, если рассмотреть вариант модели с вынуждающей силой. При наличии вынуждающей силы F процесс освобождения поверхности представляет собой обыкновенное критическое явление [3]. То есть при превышении силой критического значения F_c поверхность начинает непрерывное движение с ненулевой скоростью $V \sim (F - F_c)^\beta$, в то время как при $F < F_c$ поверхность находится в одном из метастабильных состояний и на увеличение силы реагирует скачкообразным движением, после которого снова останавливается [45]. Точка фазового перехода $F = F_c$ соответствует исчезновению перколяционного кластера блокирующих точек, для которых [43,45]

$$F \leq f(x, h). \quad (9)$$

Плотность таких участков ρ может рассматриваться как управляющий параметр, а скорость продвижения V играет здесь роль параметра порядка. Искусственное продвижение участка с минимальным значением f , предпринимаемое в модели Снеппена, соответствует значению скорости $V = +0$, то есть система оказывается помещенной в точности в критическую точку. При этом автоматически устанавливается критическая плотность $\rho = \rho_c$ направленной перколяции для точек, удовлетворяющих (9), что соответствует взгляду, согласно которому самоорганизованная критичность представляет собой не что иное, как установку параметра порядка в значение $(+0)$ [22].

Модель Снеппена относится к широкому классу так называемых экстремальных моделей, в которых на очередном шаге происходит активация элемента, выделенного минимальным (максимальным) значением некоторой характеристики. К этому же классу принадлежат: модель биологической эволюции [16], модель «Робина Гуда» движения дислокаций [46], модель разрыва пучка волокон [47] и ряд других.

Для экстремальных моделей существует довольно развитая теория. В частности, показано, что вероятность того, что f -лавина продлится s шагов, дается скейлинговой формулой $P(s, f) \sim s^{-\tau} g(s(f_c - f)^{1/\sigma})$ [44,45,48]. Таким образом, для длительностей f_c -лаvin (а равно и для объемов областей пространства, заметаемых поверхностью между моментами, когда на ней исчезают точки, где цепляющая сила меньше порогового значения) имеет место чисто степенной закон распределения вероятностей. Если рассматривать распределение длительностей всех лавин безотносительно значения f_{\min} в момент их начала, то распределение их по длительностям имеет универсальный вид для всех экстремальных моделей $P_f^{\text{all}}(s) \sim s^{-2}$. Если то же распределение взять для обратных во времени лавин, то есть промежутков времени $[s_0 - s, s_0]$ таких, что $s_0 - s$ есть ближайшая к моменту s точка в прошлом, когда $f_{\min}(s_0 - s) \geq f_{\min}(s)$, то ситуация меняется и распределение имеет вид $P_b^{\text{all}}(s) \sim s^{\tau-3}$ (нижний индекс здесь обозначает направление времени, в котором берутся лавины: f – прямое, b – обратное), что существенно облегчает практическое определение показателя τ [44,48].

Точки поверхности со значениями $f < f_c$ можно рассматривать как активные элементы, поскольку именно они самопроизвольно продвигаются вперед. При

этом в силу ограничения градиента (6) могут быть продвинуты также и их соседи, что может привести к активизации последних, так как при продвижении точки поверхности получают новое значение f . Таким образом, возникновение активных элементов представляет собой ветвящийся процесс. Естественно предположить, что число активных элементов со временем будет расти как r^n , однако, как показано в работе [49], $\eta=0$ для всех экстремальных моделей. Это означает, что ветвящийся процесс находится на грани выживания, чего и следует ожидать от критической точки.

Вероятность того, что положение точки активации на следующем шаге отстоит от данного на расстояние r , дается формулой [44,48]

$$P(r) \sim r^{-\lambda}, \quad (10)$$

то есть точки активации совершают полеты Леви [50], что можно, вообще говоря, рассматривать как эффективную пространственную коррелированность шума. Значение показателя распределения (10) может быть выражено через показатели, характеризующие направленную перколяцию, которые известны с высокой точностью [43]. Для одномерного случая получается значение $\lambda \approx 2.21 \pm 0.01$ [45,48].

Интерес представляют также показатель распределения времени до первого возвращения активности в данную точку, фрактальная размерность развертки активности в координатах (x,s) и другие критические показатели [44,51]. Общая теория экстремальных моделей, изложенная в работе [44], позволяет свести значения всех этих показателей к двум.

Завершая обзор, отметим, что уравнение KPZ демонстрирует самую тесную связь с другими классами самоорганизованно критических моделей, не имеющих на первый взгляд ничего общего с задачами динамики поверхности. Так, в работе [54] показано, что модели освобождения поверхности [44], рисовой кучи [17] и сейсмического разлома [55,56] принадлежат к одному классу универсальности. В работе [57] показано, что множество различных моделей типа кучи песка [1] сводится к уравнению KPZ.

2. Модель с защитой минимумов или модель гекатонхейров

Предположим, что в модели Снепена на очередном шаге для продвижения выбирается не участок с наименьшей величиной цепляющей силы f , а тот участок, которому соответствует n -ое по величине ее значение. Это можно воспринимать как наличие некоего $(n-1)$ -рукого агента, который отслеживает значения цепляющей силы в точках на поверхности, придерживая руками некоторое число ее участков, искусственно защищая их от активизации (не противодействуя, однако, их возможному освобождению, индуцированному соседями через условие ограниченности градиента). Для ситуации, изображенной на рис. 1, участок, который должен был бы продвигаться при $n=2$, отмечен *стрелкой 2*.

Как скажется такая модификация правил на поведении модели? С одной стороны, модель при этом формально выпадает из класса экстремальных моделей, для которых есть разработанная теория, и можно ожидать, что ее свойства изменятся. С другой стороны, грубость, присущая всем критическим системам, позволяет предположить, что некоторое изменение правил не изменит класса универсальности модели и набор критических показателей останется тем же.

С целью ответа на эти вопросы было проведено обширное компьютерное моделирование. Для него использовалась одномерная система длины L с периодическими граничными условиями, каждому участку i которой ставились в соответствие значения высоты h_i и цепляющей силы f_i . На очередном шаге моделирования выделялся участок, имеющий n -ое по величине значение f , и продвигался на единицу по высоте. Продвижению подвергались также все участки, для которых оказалось нарушенным условие Кима – Костерлица (6), после чего все продвинутые участки получали новые случайные значения f , равномерно

распределенные на интервале между нулем и единицей. Теоретически, поскольку система самоорганизуется в критическое состояние, начальное состояние принципиального значения не имеет, однако по практическим соображениям было выбрано состояние с нулевой высотой и случайными значениями силы.

Для оптимизации поиска n -го по счету минимума $f_{\min}^{(n)}$ использовалась структура данных, аналогичная описанной в работе [52]. Выход системы на стационар определялся по прекращению роста зарегистрированных максимумов ширины поверхности w и величин f_{\min} и $f_{\min}^{(n)}$. Следует отметить, что число итераций, необходимое для надежного выхода на стационар при старте из состояния с $h_i=0$, по крайней мере в разы превышает их количество, достаточное для получения гладких графиков.

Объектом интереса было поведение ширины поверхности в зависимости от времени, а также распределения длительностей прямых и обратных лавин, времени первого возвращения активности и полетов Леви, совершаемых точкой активации. Результат получился, на первый взгляд, довольно неожиданный, если не сказать, обескураживающий. Величина n не оказывает ощутимого влияния на динамику ширины поверхности (в том числе во время переходного процесса) и распределения длительностей лавин и времени первого возвращения. На основании этого можно было бы заключить, что новая модель попадает в тот же класс универсальности, что и модель Снепена, отличаясь от нее лишь несущественными внутренними деталями. Однако распределение (10) полетов Леви точки активности весьма ощутимо зависит от n . Изменение наклона графиков (в двойном логарифмическом масштабе) распределения полетов по длинам можно видеть невооруженным глазом (рис. 3).

Причина независимости большинства характеристик от n становится ясна, если взглянуть на распределения вероятностей величин f и $f_{\min}^{(n)}$ в стационарном режиме. Видно, что при не очень больших значениях n распределение f практически не меняется за исключением отклонения от нуля плотности вероятности в районе малых значений, где сосредотачивается $n-1$ защищенный минимум, и соответствующего увеличения f_c (рис. 4, а). Защищенные минимумы быстро скапливаются в районе нуля и оказываются практически выброшенными из динамики. Распределения $f_{\min}^{(n)}$ при разных значениях n (рис. 4, б) отличаются более заметно, но это, надо полагать, все же несущественно, и можно считать, что $f_{\min}^{(n)}$ успешно выполняет для большинства процессов функции f_{\min} в модели Снепена. То есть все происходит так, как будто защищенных элементов нет.

Для полетов точки активности все выглядит совсем по другому. До тех пор пока защищенные участки не затрагиваются, нет разницы между активизацией наименьшего значения в модели Снепена и активизацией n -го минимума в модели гекатонхейров. Однако, как только какой-то из защищенных элементов из-за ограниченности градиента подвергся продвижению, тождественность моделей нарушается. Это происходит потому, что продвинутый элемент получает новое значение цепляющей силы, а при этом могут измениться порядковые номера минимумов, и активизации на следующем шаге подвергается совсем не тот элемент, который активизировался бы при аналогичных обстоятельствах в модели Снепена. Иначе говоря,

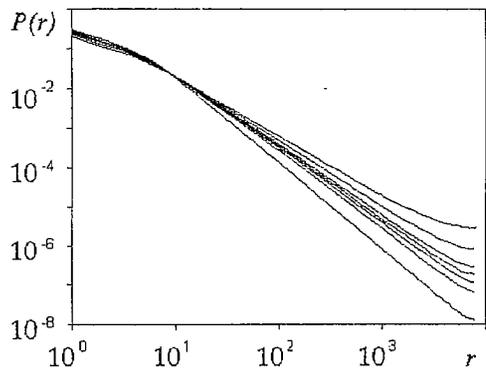


Рис. 3. Распределение вероятностей полетов Леви точки активации для системы с $L=16384$. Графики (снизу вверх) соответствуют $n=1, 2, 4, 8, 16, 64, 256$. После выхода на стационар делалось около 500 млн. итераций. Некоторое закругление вверх графиков при больших r обусловлено тем, что данные «складываются» из-за невозможности отличить полет длиной r от полета длиной $L-r$

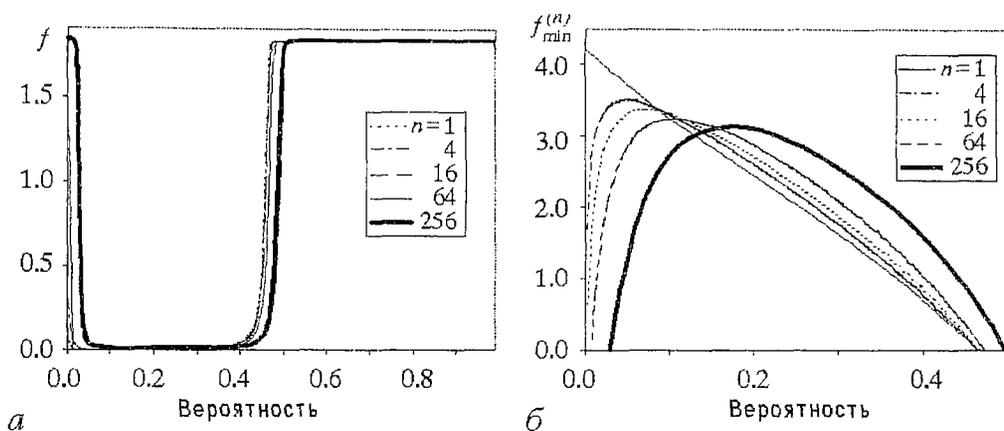


Рис. 4. Стационарное распределение цепляющей силы $f(a)$ и $f_{\min}^{(n)}$ (б) для системы с $L=4096$ при различных значениях n

значения цепляющей силы в активизируемых элементах будут примерно теми же, а вот положения совсем другими. Таким образом, к обычным полетам Леви добавляются скачки положения активности, когда гекатонхейр «перехватывает руки» из-за того, что в них оказалось не то, что ему следует держать. И чем большую долю участков ему приходится удерживать, тем чаще это будет происходить.

В силу сказанного понятно, что показатель распределения полетов π должен зависеть не непосредственно от n , а от величины $u=(n-1)/L$, определяющей «плотность рук». Зависимость π от u приведена на рис. 5. Группа точек, лежащих непосредственно на оси ординат, соответствует обычной модели Снеппена с $n=1$. Разброс точек обусловлен не погрешностью в определении значений показателя (она не превышает размеров значков на графике), а конечностью размеров системы.

Легко видеть, что, варьируя параметр модели u , мы можем непрерывно менять значение одного из критических индексов, не изменяя при этом остальных².

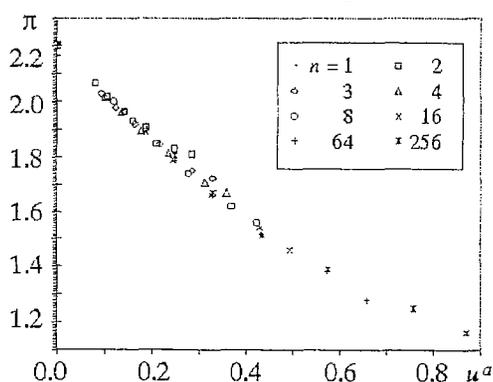


Рис. 5. Значения показателя π в зависимости от u^α при размерах L от 512 до 262144. Здесь выбрано значение $\alpha=0.2$, чтобы в пределе $L \rightarrow \infty$ для точек с $n > 1$ получалось то же значение $\pi_\infty=2.21$, что и для точек с $n=1$. Такое представление результатов обеспечивает наибольшую наглядность

Подобное поведение нам представляется уместным назвать *мягкой универсальностью*, чтобы отличать от грубой универсальности, присущей традиционным критическим моделям. Вопрос же о том, отнести ли модели Снеппена и гекатонхейров к разным классам универсальности или считать первую предельным случаем второй, достигаемым при $u \rightarrow 0$, — это лишь вопрос строго определения.

Отметим еще одно существенное и любопытное обстоятельство. При $u^* \approx 2.5 \cdot 10^{-5}$ значение π проходит через двойку. Это значит, что при меньшей «плотности рук» средняя длина полета точки активации

$$\langle r \rangle = \int P(r) r dr \quad (11)$$

² Следует оговориться, что также могут меняться и некоторые показатели из числа тех, которые мы не измеряли.

не зависит от размеров системы, в то время как при большей она становится порядка L (так как интеграл (11) сходится лишь благодаря нарушению зависимости (10) при $r \sim L$). Это уже не количественное, а качественное изменение поведения, не сопровождающееся тем не менее никакими особенностями на графике, которые позволяли бы говорить о фазовом переходе.

Модели гекатонхейров при желании легко можно придать интерпретации весьма далекие от описания процесса освобождения поверхности. Она, например, отражает работу системы безопасности или охраны порядка в условиях нерешительности и нехватки ресурсов. Попытка удержать руками наиболее опасные участки приводит к прорывам на тех, на которые рук не хватило. Если прорывы индуцируются внешними условиями, как в рассматриваемых моделях, то такая защита будет иметь своим следствием лишь изменение географии последовательных событий. Показатель распределения полетов активности будет тем меньше, чем больше будет плотность держащих рук. А доведя уровень последней до значения u^* , мы увидим, что события, которые до того были худо-бедно локализованы (рассчитывать на «хорошую» локализацию для точки, совершающей полеты Леви, очевидно, не приходится), стали происходить повсюду. Качественная аналогия очевидна, а вот вывод нетривиален: если все плохо, не трогай – лучше не станет, только расползется.

В заключение отметим, что нами был также проведен анализ модели биологической эволюции Бака – Снепена [16] – другого представителя класса экстремальных моделей. Для нее также имеет место обнаруженная мягкая универсальность, однако из-за того, что в ней нет аналога условия Кима – Костерлица, заставляющего активность время от времени посещать каждый ее участок, эта модель требует много большего объема вычислений для получения надежных результатов, что пока не представляется возможным.

Выводы и обсуждение

В работе была построена новая самоорганизованно критическая модель, позволяющая непрерывно изменять значение одного из критических индексов при варьировании параметра модели без изменения значений других. Обнаруженный тип поведения назван мягкой универсальностью.

Важным свойством предложенной модели является простота механизма управления величиной показателя. При попытке смоделировать в деталях какое-либо реальное критическое явление, учитывая в модели те или иные факторы, либо наоборот, пренебрегая ими, можно построить набор моделей, принадлежащих к разным классам универсальности и выбрать среди них наиболее близкий к классу универсальности природного прототипа. Полученные в работе результаты открывают принципиально другой путь. Вместо того, чтобы выбирать наиболее похожую среди дискретного набора моделей, правила которых меняются лишь крупными блоками, можно учесть в модели только самое существенное (что отражает базовый подход теории самоорганизованной критичности) и, непрерывно варьируя ее параметры, подобрать требуемые свойства (что является существенно новым).

Считаю приятным долгом поблагодарить Г.Г. Малинецкого за поддержку и обсуждение и Ю.А. Данилова за помощь при поиске русских аналогов ряда терминов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 97-01-00396).

Библиографический список

1. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality// Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38(1). P. 364.

2. *Bak P.* How nature works: the science of self-organized criticality. Springer-Verlag, New York, Inc. 1996.
3. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 298 с.
4. *Бак П., Чен К.* Самоорганизованная критичность // В мире науки. №3, 16–24 (март 1991). *Scientific American*, 264(1) (January 1991).
5. *Lu E.T., Hamilton R.J.* Avalanches and the distribution of solar flares // *The Astrophysical Journal*. 1991. Vol. 380. L89.
6. *Morley P.D. and Schmidt I.* Platelet collapse model of pulsar glitches // *Europhys. Lett.* 1996. Vol. 33. P. 105. (<http://xxx.lanl.gov/abs/astro-ph/9411053>)³
7. *Vattay G. and Harnos A.* Scaling behavior in daily air humidity fluctuations // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 73. P. 768. (<http://xxx.lanl.gov/abs/adap-org/9311004>)
8. *Nagel K. and Raschke E.* Self-organized criticality in cloud formation? // *Phys. A*. 1992. Vol. 182. P. 519.
9. *Bak P. and Tang C.* Earthquakes as a self-organized critical phenomenon // *Journal of Geophysical Research*. 1989. Vol. 94(B11). P. 15635.
10. *Hwa R.C. and Pan J.* Self-organized criticality in quark-hadron phase transition. *Nucl. Phys. A*. 1995. Vol. 590. P. 601. (<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-ph/9505376>)
11. *Claudin P. and Bouchaud J.-P.* Static avalanches and giant stress fluctuations in silos // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78(2). P. 231.
12. *Clar S., Drossel B. and Schwabl F.* Forest fires and other examples of self-organized criticality // *J. Phys.: Cond. Mat.* 8, 6803 (1996). (<http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9610201>)
13. *Bak P. and Flyvbjerg H.* Self-organization of cellular magnetic-domain patterns // *Phys. Rev. A* 1992. Vol. 45(4). P. 2192.
14. *Nagatani T.* Self-organized criticality in 1D traffic flow model with inflow or outflow // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1995. Vol. 28, L119. (<http://www.iop.org/PEL>)
15. *Sole R.V. and Manrubia S.C.* Criticality and unpredictability in macroevolution // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55(4). P. 4500.
16. *Sneppen K. and Bak P.* Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71(24). P. 4083.
17. *Christensen K., Corral A., Frette V., Feder J. and Jossang T.* Trace dispersion in a self-organized critical system // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77(1). P. 107. (<http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9602067>)
18. *Rinaldo A., Rodriguez-Iturbe I., Rigon R., Ijjasz-Vasquez E., Bras R.L.* Self-organized fractal river network // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70(6). P. 822.
19. *Подлазов А.В.* Новые аспекты самоорганизованной критичности. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 1995, № 86.
20. *Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В.* Парадигма самоорганизованной критичности. Иерархия моделей и пределы предсказуемости // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1997. Т. 5, № 5. С. 89.
21. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 5. М.: Наука, 1964. 568 с.
22. *Sornette D., Johansen A. and Dornic I.* Mapping self-organized criticality onto criticality // *J. Phys. I (France)*. 1995. Vol. 5. P. 325. (<http://xxx.lanl.gov/abs/adap-org/9411002>)
23. *Sornette D.* Linear stochastic dynamics with nonlinear fractal properties // *Phys. A*. 1998. Vol. 250. P. 295. (<http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9709101>)
24. *Яблонский А.И.* Математические модели в исследовании науки. М.: Наука, 1986. 352 с.
25. *Kim J.M. and Kosterlitz J.M.* Growth in restricted solid-on-solid model // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62(19). P. 2289.
26. *Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C.* Dynamic scaling of growing interface // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56(9). P. 889.
27. *Medina E., Hwa T., Kardar M., Zhang Y.-C.* Burgers equation with correlated

³ Электронный архив национальной лаборатории в Лос-Аламосе имеет полнофункциональное зеркало в России, расположенное по адресу <http://xxx.iterep.ru>.

noise: Renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth // *Phys. Rev. A*. 1989. Vol. 39(6). P. 3053.

28. *Rubio M.A., Edwards C.A., Dougherty A. and Gollub J.P.* Self-affine fractal interface from immiscible displacement in porous media // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 63(16). P. 1685.

29. *Kardar M. and Zhang Y.-C.* Scaling of directed polymers in random media // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 58(20). P. 2087.

30. *Krug J.* Scaling relation for a growing interface // *Phys. Rev. A*. 1987. Vol. 36(11). P. 5465.

31. *Kim J.M., Moore M.A. and Bray A.J.* Zero-temperature polymers in a random potential // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44(4). P. 2345.

32. *Kim J.M., Bray A.J. and Moore M.A.* Domain growth, directed polymers, and self-organized criticality // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 45(12). P. 8546.

33. *Bales G.S., Redfield A.C. and Zangwill A.* Growth dynamics of chemical deposition // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62(7). P. 776.

34. *Zhang J., Zhang Y.-C., Alstrom P. and Levinsen M.T.* Modeling forest fire by a paper-burning experiment, a realization of the interface growth mechanism // *Phys. A*. 1992. Vol. 189(3-4). P. 383.

35. *Kerstein A.R. and Ashurst Wm.T.* Propagation rate of growing interface in stirred fluids // *Phys. Rev. Lett.* 1992. 68(7). P. 934.

36. *Sneppen K.* Self-organized criticality and interface growth in a random medium // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 69(24). P. 3539.

37. *Kim J.M. and Sarma S.D.* Dynamical universality of the nonlinear conserved current equation for growing interface // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51(3). P. 1889.

38. *Hentschel H.G.E. and Family F.* Scaling in open dissipate system // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66(15). P. 1982.

39. *Horvath V.K., Family F. and Vicsek T.* Anomalous noise distribution of the interface in two-phase fluid flow // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 67(23). P. 3207.

40. *Lam C.-H. and Sander L.M.* Surface growth with power-low noise // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 69(23). P. 3338.

41. *Lam C.-H., Sander L.M. and Wolf D.E.* Surface growth with temporally correlated noise // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 46(10). P. 6128.

42. *Vergeles M.* Self-organization at nonzero temperature // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75(10). P. 1969.

43. *Leschhorn H. and Tang L.-H.* Avalanches and correlations in driven interface depinning // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49(2). P. 1238.

44. *Paczuski M., Maslov S. and Bak P.* Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models // *Phys. Rev. E.*, 1996. Vol. 53(1). P. 414.

45. *Maslov S. and Paczuski M.* Scaling theory of depinning in the Sneppen model // *Phys. Rev. E* 1994. Vol. 50(2). P. 643.

46. *Zaitsev S.I.* Robin hood as self-organized criticality // *Physica A* 1992. Vol. 189(3-4). P. 411.

47. *Andersen J.V., Sornette D. and Leung K.-T.* Tri-critical behavior in rupture induced by disorder // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 2140. (<http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9609022>)

48. *Maslov S.* Time directed avalanches in invasion models // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74(5). P. 562.

49. *Paczuski M., Bak P. and Maslov S.* Laws for stationary states in systems with external dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74(21). P. 4253.

50. *Klafter J., Shlesinger M.F. and Zumofen G.* Beyond brownian motion // *Physics Today*. February 1996. P. 33.

51. *Maslov S., Paczuski M. and Bak P.* Avalanches and $1/f$ noise in evolution and growth models // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 73(16). P. 2162.

52. *Grassberger P.* Efficient large-scale simulations of a uniformly driven system // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49(3). P. 2436.

53. *Sneppen K. and Jensen M.H.* Colored activity in self-organized critical interface dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71(1). P. 101.

54. Paczuski M. and Boettcher S. Universality in sandpiles, interface depinning, and earthquake models // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77(1). P. 111. (<http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9603120>)

55. Carlson J.M. and Langer J.S. Properties of earthquake generated by fault dynamics // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62(22). P. 2632.

56. de Sousa Vieira M. Self-organized criticality in a deterministic mechanical model // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46(10). P. 6288.

57. Lauritsen K.B. and Alava M.J. Self-organized criticality and interface depinning transitions. In Press. (<http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9903346>)

*Институт прикладной
математики им. М. В. Келдыша РАН*

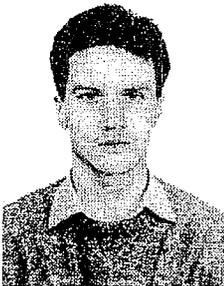
Поступила в редакцию 19.05.99

NEW MODEL OF THE INTERFACE DEPINNING AND SOFT UNIVERSALITY IN THE THEORY OF SELF-ORGANIZED CRITICALITY

A.V. Podlazov

We developed a new self-organized critical model of the interface depinning. This model demonstrates the possibility to change a single critical index by varying the model's parameter without other indices being affected. We refer this as the soft universality to distinguish the model proposed from traditional critical systems having a set of indices, which are strictly defined by the rules. In order to change this indices one need to change the rules of the model drastically changing therefore its universality class.

Besides, the paper includes a brief review of the works on interface growth and depinning models.



Подлазов Андрей Викторович – родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996). Работает в Институте прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, аспирант Московского физико-технического института. Область интересов – нелинейная динамика, теория самоорганизованной критичности. E-mail: tiger@spp.keldysh.ru