



«ХАОТИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИЯ» В ПРОСТОЙ МОДЕЛИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Д.Э. Постнов, А.Г. Баланов

На базе модели с дискретным временем продемонстрирован рост ляпуновской размерности хаотического аттрактора с ростом размерности самой модели. Обсуждаются перестройки фазового портрета, сопутствующие увеличению числа неустойчивых направлений хаотического аттрактора.

Введение

Вопрос о размерности хаотического аттрактора по отношению к размерности самой динамической системы по настоящее время является одним из центральных. Известно, что для структур (цепочек или решеток) из систем с собственной хаотической динамикой можно отметить как тенденцию к развитию хаоса высокой размерности¹ (с несколькими положительными ляпуновскими показателями) [4,5], так и эффекты, связанные с ограничением размерности аттрактора (явление синхронизации [6,7], эффект «насыщения» размерности [8,9]).

Как правило, для таких структур характерен определенный тип связи, когда каждая из ячеек взаимодействует с ближайшими соседями. Однако, существует класс задач, для которого геометрия связи является принципиально иной. В задачах динамики популяций большое количество видов (переменных) сопровождается сложными и многообразными внутренними связями. Существенно, что будучи разделенной на составные элементы (достаточной размерности) такая система обычно теряет способность к хаотическому поведению. Наглядным примером подобного рода задач может служить конкуренция нескольких популяций бактерий и вирусов [10], питающихся из общего источника (рис. 1,а), что, например, исследовалось в [11,12]. Несмотря на достаточно высокую размерность модели отдельной популяции ($n=4$), ее динамика регулярна (предельный цикл либо состояние равновесия).

Однако, связь через общий поток питания S (чем больше потребляет одна популяция, тем меньше остается другим) приводит к развитию хаотических режимов. При этом в [11] было обнаружено, что добавление еще одной популяции, то есть увеличение размерности системы на 4, приводит к увеличению ляпуновской размерности на единицу.

¹ Здесь и далее мы говорим о ляпуновской размерности, оцененной по формуле Каплана – Йорка [1–3].

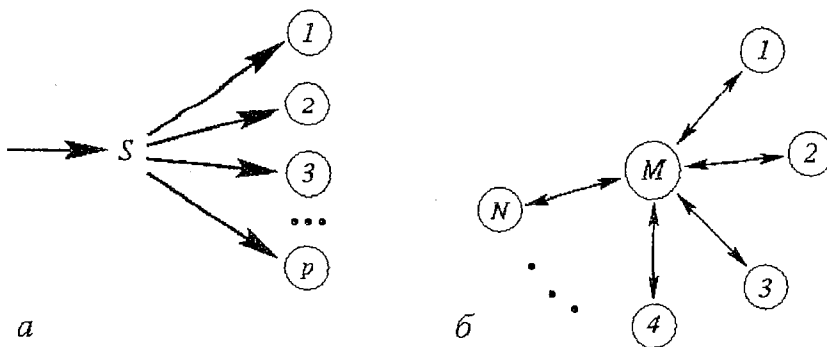


Рис. 1. *a* – несколько популяций, конкурирующих в борьбе за единственный источник питания, образуют систему осцилляторов с глобальной связью; *б* – в модели (1) каждое из уравнений моделирует осциллятор, связанный с другими через «среднее поле» M

Указанное явление было названо «хаотической иерархией» и в микробиологическом контексте рассмотренной задачи ему не было предложено объяснения. Позднее в [13] был предложен путь создания систем с подобным поведением на базе системы Ресслера, путем добавления цепочки уравнений к исходной системе. Наконец, в [14] указанная «обобщенная» система Ресслера была рассмотрена в терминах «нелинейной моды» колебаний и добавляемых к ней «линейных мод».

В данной работе мы рассматриваем явление «хаотической иерархии» с использованием N -мерной модели с дискретным временем.

Модели типа решеток из большого числа связанных отображений возникают обычно в задачах моделирования пространственно протяженной неравновесной среды [15,16]. Для таких систем характерными являются формирование структур [15,17], медленно движущиеся когерентные структуры [18] и хаотические волны [19], и другие проявления сложной динамики. Как правило, отдельный элемент-отображение в упомянутых работах обладает хаотической динамикой, что заранее предполагает возможность высокоразмерного хаоса в решетке в зависимости от соотношения собственных управляющих параметров ячеек и степени их связи между собой [20,21].

В [17] рассматривается динамика модели глобально связанных отображений окружности, в том числе, в зависимости от размерности системы N . В данной работе мы используем подобный подход применительно к несколько иной модели, которая при редукции до единственного элемента ($N=1$) не обладает сложной динамикой. То есть, развитие хаоса возможно только за счет связи, которая носит глобальный характер и осуществляется через «среднее поле» (см., например, [22] и ссылки к ней).

Мы анализируем динамику такой модели в терминах синхронного и несинхронного поведения в случае $N=3$. Затем мы обсуждаем особенности развития хаоса для $N=3,5$. Наконец, приводим результаты расчета роста ляпуновской размерности аттрактора системы по мере увеличения N , которые показывают, что наращивание системы с глобальной связью элементами, не способными к индивидуальному хаотическому поведению, тем не менее ведет к неуклонному увеличению размерности хаотического аттрактора.

1. Модель

Классическим подходом к моделированию ансамбля связанных осцилляторов является рассмотрение моделей типа так называемых отображений на торе [17,23,24]. Ниже мы используем модель этого класса в виде

$$\varphi_{n+1}^i = \varphi_n^i + \omega^i + K \sin\left\{ (2\pi \sum_{j=1}^N (\varphi_n^j - \varphi_n^i)) \right\}, \text{ mod } 1, i = 1 \dots N, \quad (1)$$

где N соответствует размерности системы (числу связанных осцилляторов), переменные ϕ^i имеют смысл их фаз, ω^i – соответствующие частоты, а коэффициент K характеризует связь.

Данная форма модели может быть получена из хорошо известного отображения окружности [25], в предположении связи осцилляторов через «среднее поле» M_n (рис. 1,б), и при переходе к нормированным на размерность системы N переменной и параметрам:

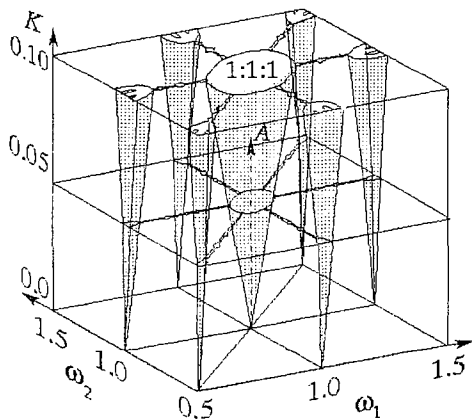
$$M_n = 1/N \sum_{i=1}^N \phi_n^i, \quad \phi_n^i = \phi_n^i/N, \quad \omega^i = \Omega^i/N, \quad K = k/N. \quad (2)$$

От хорошо известной модели глобально связанных отображений окружности, рассмотренной в [17], систему (1) отличает вид члена связи $\sin(2\pi \sum_{j=1}^N (\phi_n^j - \phi_n^i))$ вместо $1/(2\pi N) \sum_{j=1}^N \sin(2\pi(\phi_n^j - \phi_n^i))$, а также наличие расстройки по частотам.

2. Модель (1) с точки зрения многочастотного квазипериодического движения

При $N=1$ (отдельный элемент) модель (1) описывает равномерный рост фазы одиночного осциллятора со скоростью ω . В случае $N=2$ модель сводится к хорошо исследованному отображению окружности (см, например, [25]), которое, как известно, демонстрирует как мультистабильность (сосуществование различных режимов в фазовом пространстве), так и хаос. Рассмотрим случай $N=3$. В этом случае имеется три независимых управляющих параметра: степень связи K и соотношения частот ω^1/ω^3 , ω^2/ω^3 . В дальнейшем без ограничения общности положим $\omega^3=1$.

Охарактеризуем динамику системы, вычисляя два числа вращения²:



$$r_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n^1 - \phi_0^1) / \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n^3 - \phi_0^3), \quad (3)$$

$$r_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n^2 - \phi_0^2) / \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n^3 - \phi_0^3).$$

В зависимости от значения $r_{1,2}$ режимы могут быть классифицированы как синхронные (рациональное $r_{1,2}=p/q$) либо несинхронные³, независимо от того, регулярный это режим или хаотический. Ниже мы рассматриваем только сильные резонансы с $q=1,2$.

Результаты вычисления r_1, r_2 в пространстве параметров ω_1, ω_2, K приведены на рис. 2.

Рис. 2. Резонансы порядка $q=1,2$ для модели (1) при $N=3$ в пространстве трех параметров

² Для подсчета по формуле (3) условие нормировки mod 1 в (1) не применяется.

³ Согласно строгим математическим результатам, эргодический (нерезонансный) тор структурно неустойчив. Таким образом, при вариации любого параметра мы должны иметь дело с резонансом на торе сколь угодно высокого порядка, но не с эргодическим тором. Однако, с точки зрения физика (конечная точность эксперимента или численного счета, конечный уровень шума) нерезонансный тор есть реальность. Таким образом, мы вправе рассматривать резонансы не выше определенного порядка, считая все остальные слишком слабыми.

По аналогии с тем фактом, что отображение окружности моделирует движение на двумерном торе, отображение (1) при $N=3$ может рассматриваться как модель движения на трехмерном торе.

В этой интерпретации центральный конус на рис. 2 соответствует главному резонансу $r_1=1:1$, $r_2=1:1$, тогда как более узким боковым областям отвечают более слабые резонансы, включающие комбинации r_1, r_2 : $(1/1, 1/2)$, $(1/1, 3/2)$, $(1/2, 1/1)$, $(1/2, 3/2)$, $(1/2, 1/2)$, $(3/2, 3/2)$.

Заметим, что условия парциального резонанса (геометрически – двумерный тор, лежащий на поверхности трехмерного) выполняются также в узких зонах вблизи линий $\omega_1=1$, $\omega_2=1$, $\omega_1=\omega_2$. Их можно видеть на плоских срезах по K , однако сами зоны не прорисованы из соображений сохранения наглядности.

Рассмотрение рис. 2 позволяет сделать следующее заключение: отображение (1) при $N=3$ реализует в пространстве параметров структуру, которую можно трактовать как набор резонансных областей (языков Арнольда), характерный для трехчастотного квазипериодического движения. При этом расположение резонансных областей по параметрам ω_1 , ω_2 симметрично в силу симметрии уравнений (1). Естественно предположить, что случай $N=4$ соответствует четырехчастотному квазипериодическому движению и т.д.

Разумеется, с ростом размерности системы сложность и количество сосуществующих в фазовом пространстве режимов (мультистабильность) будут нарастать. Кроме того, как гласит теорема Рюэля – Такенса [26,27], движение на торе с размерностью более трех неустойчиво, и выход из зоны резонанса должен немедленно приводить к хаосу.

Однако, детальный анализ данной проблемы не входит в задачи данной работы. Ниже мы будем рассматривать события в зоне основного резонанса (путь А на рис. 2) по мере увеличения размерности модели N с точки зрения ляпуновской размерности аттрактора D_L .

3. Развитие хаоса высших порядков

Оставаясь в рамках случая $N=3$, рассмотрим эволюцию режимов вдоль пути А. Заметим, что при численном моделировании частоты ω^i выбирались с малым, но конечным различием, что соответствовало движению по параметру K вблизи от полностью симметричного случая. Таким способом из рассмотрения были исключены возможные структурно-неустойчивые режимы, обязанные своим существованием вырожденности уравнений при наличии симметрии.

Эволюция спектра ляпуновских экспонент по мере увеличения параметра связи K проиллюстрирована на рис. 3. Очевидно, что для $K < 0.19$ имеют место периодические либо ($K=0.11\dots 0.12$) квазипериодические режимы. Хаос появляется при $K=0.190$ и это «обычный» хаотический аттрактор с одним положительным ляпуновским показателем. Сигнатура [3] его спектра ляпуновских экспонент (+0-). Однако, при $K > 0.2051$ в спектре ляпуновских экспонент появляются два положительных показателя (гиперхаос) и, соответственно, ляпуновская размерность D_L достигает 3, с тем чтобы при увеличении K уже не снижаться (за исключением квазипериодического «окна» при $K \approx 0.265$).

Фазовые проекции режимов в

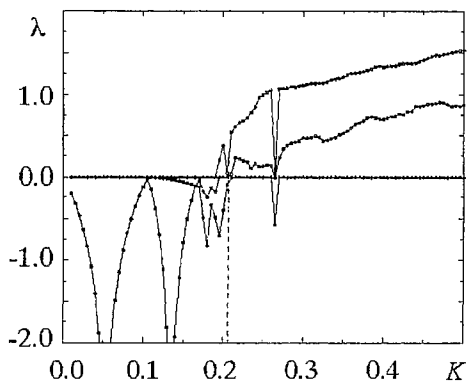


Рис. 3. Спектр ляпуновских экспонент в зависимости от силы связи для $N=3$. При $K=0.2051$ (отмечено штриховой линией) наблюдается переход к гиперхаосу

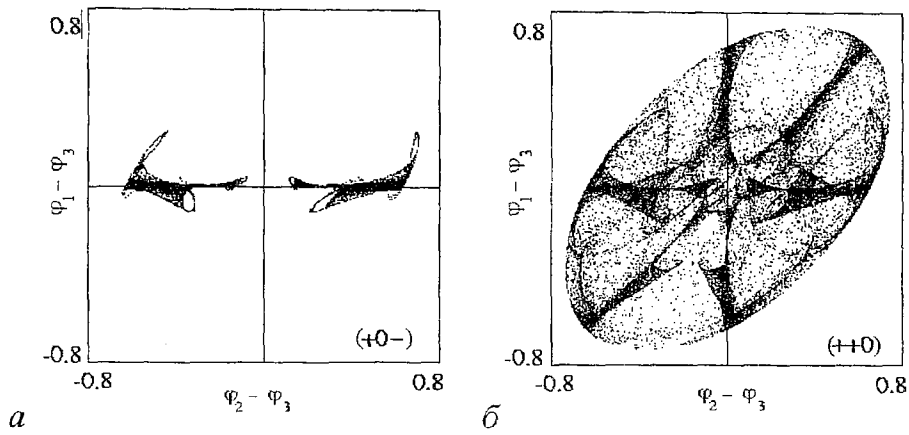


Рис. 4. Фазовые проекции для случая $N=3$. $a - K=0.2038$, хаос с одним неустойчивым направлением; $b - K=0.2056$, хаос с двумя неустойчивыми направлениями

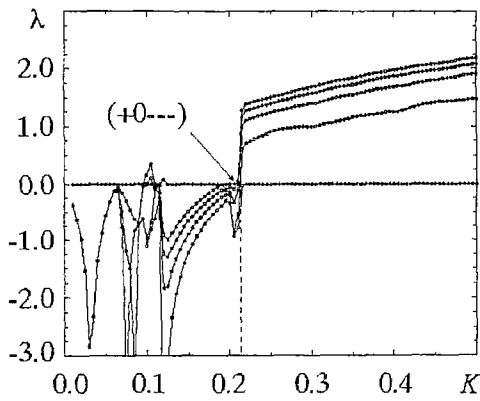


Рис. 5. Спектр ляпуновских экспонент в зависимости от параметра связи K для случая $N=5$

непосредственной окрестности перехода к гиперхаосу приведены на рис. 4. На рис. 4, a имеет место хаотический режим, локализованный в окрестности $\varphi^1 - \varphi^3 = 0$. Как показывают исследования (и как следует из соображений вращательной симметрии), подобных хаотических режимов еще как минимум два при тех же значениях параметров, они локализованы вдоль линий $\varphi^2 - \varphi^3 = 0$ и $\varphi^2 - \varphi^1 = 0$. Таким образом, при данном значении параметра K имеется как минимум три сосуществующих «локальных» хаотических аттрактора. При достижении значения $K=0.2051$ все они теряют устойчивость, сливаясь в один «глобальный» хаотический аттрактор,

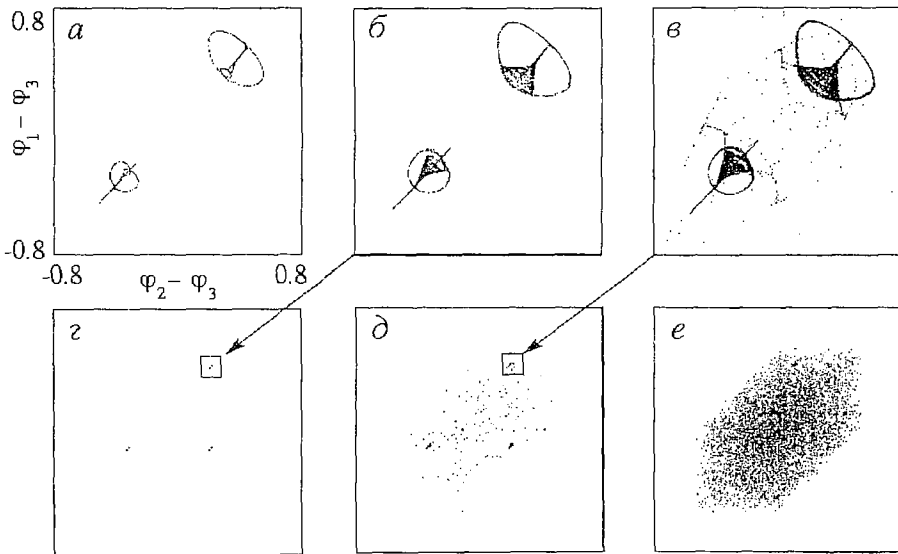


Рис. 6. Фазовые проекции для случая $N=5$. Переход к хаосу с четырьмя неустойчивыми направлениями, $K=0.2142, 0.21434$ и 0.21436 для $(z), (d)$ и (e) , соответственно; $a-b$ - увеличенное изображение для $K=0.2137, 0.2142$ и 0.21434

внутренняя структура которого напоминает звезду (рис. 4, б). Он имеет два неустойчивых направления, характеризуется сигнатурой спектра ляпуновских показателей $(++0)$ и размерностью $D_L=3$.

Таким образом, на основании исследования случая $N=3$ можно предположить, что переход к хаосу более высокой размерности проявляется себя как объединение локальных хаотических аттракторов, сосуществующих в фазовом пространстве, в единый глобальный аттрактор, охватывающий их бывшие бассейны притяжения.

Представляется полезным проверить высказанное выше предположение в случае более высокой размерности. Выберем $N=5$. Соответствующие графики для ляпуновских экспонент и перестройки фазовых проекций приведены на рис. 5 и 6. Очевидно, в области $K \approx 0.215$ наблюдается скачкообразный переход к хаотическому режиму с четырьмя неустойчивыми направлениями $(++++0)$. Однако, в узкой зоне $K=0.2137 \dots 0.2143$ ему предшествует рождение хаотического аттрактора с одним неустойчивым направлением $(+0---)$. Детали этого перехода показаны на рис. 6 в двух масштабах: *a*–*в* показывают детали эволюции локального аттрактора, тогда как *г*–*е* имеют масштаб, соответствующий глобальному хаотическому режиму.

Фазовая проекция на рис. 6, *a* соответствует квазипериодическим колебаниям при $K=0.2137$. Хорошо видны четыре замкнутые кривые. Рис. 6, *б*, *г* соответствуют хаотическому аттрактору с $(+0---)$ при $K=0.2142$. По мере роста параметра K аттрактор увеличивается в объеме и в какой-то момент касается границы своего бассейна притяжения. Подобное явление часто характеризуют как «кризис границы» (boundary crisis) [28] и оно связано с образованием гомоклинических траекторий (поверхностей). В зависимости от конкретного строения фазового пространства, траектория либо навсегда покидает область бывшего аттрактора, либо продолжает посещать эту область, демонстрируя эффекты типа перемежаемости [5,29]. На рис. 6, *в*, *д* мы наблюдаем характерные признаки второго варианта – траектория начинает переключаться с одного бывшего локального аттрактора на другой, проводя в окрестности каждого конечное время. По мере увеличения K фазовый объем заполняется более

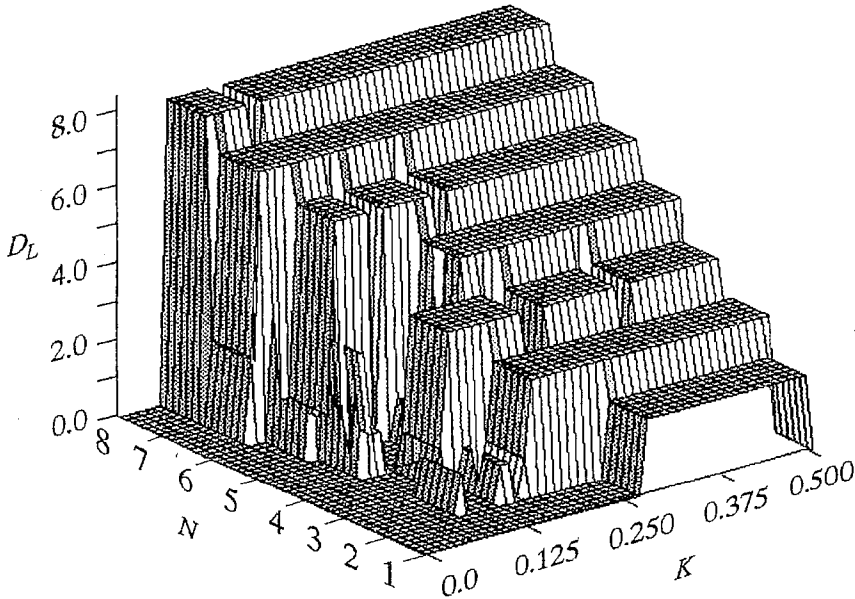


Рис. 7. «Хаотическая иерархия»: при достаточно больших K ляпуновская размерность хаотического аттрактора D_L следует за увеличением размерности системы N . При этом число неустойчивых направлений хаотического аттрактора составляет $N-1$

равномерно, однако скопления точек, соответствующие бывшим локальным аттракторам, еще остаются видимыми (рис. 6, e).

Таким образом, рассмотрение динамики отображения (1) при $N=5$ также показывает, что с ростом K имеет место переход к хаосу максимально возможной ляпуновской размерности с сигнатурой спектра ляпуновских экспонент $(+++0)$. Механизм указанного перехода связан с объединением локальных аттракторов малой размерности $(+0- - -)$ в глобальный хаотический режим, которое происходит по типу перемежаемости.

Оба случая, $N=3$ и $N=5$, рассмотренные выше, показывают, что по достижении достаточно больших значений степени связи наблюдается переход к хаотическому режиму, имеющему максимальную ляпуновскую размерность $D_L=N$. Возвращаясь к явлению «хаотической иерархии», моделирование которого и являлось задачей настоящей работы, мы приводим результаты расчета D_L для системы (1) при последовательном увеличении N от 2 до 8 (рис. 7). Вывод очевиден: максимальная ляпуновская размерность хаотического аттрактора растет в соответствии с размерностью самой системы, $D_{L\max}=N$.

Выводы

Путем численного исследования относительно простой модели с дискретным временем удалось смоделировать явление «хаотической иерархии», когда добавление каждого нового уравнения (что соответствует добавлению еще одной моды колебаний в дифференциальных системах) вызывает соответствующий прирост числа неустойчивых направлений хаотического аттрактора.

В соответствии со смыслом модели, указанные результаты могут быть интерпретированы как «многомерный аналог» хорошо изученного перехода к хаосу в области основного резонанса для отображения окружности.

В исследованных случаях переход к хаотическому режиму максимальной размерности D_L осуществлялся путем объединения ряда сосуществующих локальных хаотических аттракторов, каждый с одним неустойчивым направлением, в единый глобальный хаотический режим с $(N-1)$ неустойчивыми направлениями, что отличает наши результаты как от работ [13,14], где для дифференциальной модели было отмечено последовательное приращение числа неустойчивых направлений по мере изменения управляющего параметра, так и от аналических результатов для кольца диффузионно связанных разрывных отображений [20], где сходное поведение отмечается при вариации параметра, эквивалентного степени связи. Логично предположить, что указанные отличия связаны с рассмотренным типом связи (глобальная, через среднее поле) и с близостью такой системы к симметричной.

Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 99-02-17732.

Библиографический список

1. Kaplan J.L., Yorke J.A. Chaotic behavior of multi-dimensional difference equations // Lect. Notes in Math. 1979. Vol. 730. P. 204.
2. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
3. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства хаоса в радиофизических системах. М.: Наука, 1990.
4. Rössler O.E. // Phys. Lett. A. 1979. Vol. 17. P. 155;
Baier G. and Klein M. // Phys. Lett. A. 1991. Vol. 151. P. 281.
5. Anishchenko V.S., Kapitaniak T., Safonova M.A., Sosnovseva O.V. Birth of

double-double scroll attractor in coupled Chua's circuits // Phys. Lett. A. 1994. Vol. 192. P. 207.

6. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators // Europhys. Lett. 1996. Vol. 34 (3). P. 165.

7. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55 (3). P. 2353.

8. *Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т. 286, вып.5. С. 1120.

9. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Сафонова М.А.* Размерность и физические свойства хаотических аттракторов цепочки связанных генераторов // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11, вып.24. С. 1505.

10. *Levin B.R., Stewart F.M., Chao L.* Resource-limited growth, competition and predation: a model and experimental studies with bacteria and bacteriophage // American Naturalist. 1977. Vol. 111. P. 3.

11. *Baier G., Thomsen J.S., Mosekilde E.* Chaotic hierarchy in a model of competing populations // J. Theor. Biol. 1993. Vol. 163. P. 593.

12. *Mosekilde E.* Topics on nonlinear dynamics // Singapore: World Scientific, 1996.

13. *Baier G., Sahle S.* Design of hyperchaotic flows // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 2712.

14. *Meyer Th., Bunner M.J., Kittel A., Parisi J.* Hyperchaos in the generalized Rössler system // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. P. 5069.

15. *Kaneko K.* Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements // Physika D. 1990. Vol. 41. P. 137.

16. *Belykh V.N., Mosekilde E.* One-dimensional map lattices: Synchronization, bifurcation and chaotic structures // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 3196.

17. *Kaneko K.* Globally coupled circle maps // Physika D. 1990. Vol. 54. P. 5.

18. *Willeboordze F.H.* Encoding of travelling waves in a coupled map lattice // J. of Bif. and Chaos. 1994. Vol. 4. P. 1667.

19. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I.* Chaos of travelling waves in a discrete chain of diffusively coupled maps // J. of Bif. and Chaos. 1994. Vol. 4. P. 631.

20. *Афраимович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1989. С. 222.

21. *Kuznetsov S.P.* Theory and Applications of Coupled Map Lattices/ Ed. K.Kaneko. N.Y.: Wiley, 1993.

22. *Matthews P.C., Strogatz S.H.* Phase diagram for the collective behavior of limit-cycle oscillators // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 65(14). P. 1701.

23. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Three coupled oscillators: mode-locking, global bifurcations and toroidal chaos // Physika D. 1991. Vol. 49. P. 387.

24. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.* Attractors on an N -torus: quasiperiodicity versus chaos // Physika D. 1985. Vol. 15. P. 354.

25. *Rend D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.D.* Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // Phys. D. Vol. 8, № 3. P. 303.

26. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. Vol. 20. P. 167; 1971. Vol. 23. P. 343.

27. *Newhouse S., Ruelle D., Takens F.* Occurrence of strange axiom A attractors near quasi-periodic flows on T^m , $m \geq 3$ // Comm. Math. Phys. 1978. Vol. 64. P. 35.

28. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Chaotic attractors in crisis // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1507.

29. *Анищенко В.С.* Взаимодействие странных аттракторов, перемежаемость «хаос-хаос» // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10, вып.10. С. 629.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 22.04.99
после доработки 9.11.99

«CHAOTIC HIERARCHY» IN THE MODEL MAP

D.E. Postnov, A.G. Balanov

We investigate the model that describes dynamics of global coupled oscillators. We demonstrate how the Lyapunov dimension grows with increasing numbers of interacting units. Development of additional unstable directions of chaotic attractor is traced both in the spectrum of Lyapunov exponents and in transformation of phase portraits.



Постнов Дмитрий Энгелевич в 1983 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника», до 1987 года – инженер кафедры радиофизики СГУ. В 1990 году окончил аспирантуру при той же кафедре, защитив кандидатскую диссертацию «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов». С 1991 года работал старшим преподавателем кафедры радиофизики СГУ, с 1995 года занимает должность доцента на той же кафедре. Автор 34 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.



Баланов Александр Геннадьевич – родился в 1973 году. Окончил физический факультет СГУ (1995). С 1997 года – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и синхронизация хаоса. Автор более 15 научных работ.
E-mail: balanov@chaos.ssu.runnet.ru