Изв.вузов «ПНД», т.7, № 6, 1999 УДК 519.866.2+330.105

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ В РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКЕ

Ю.И. Неймарк, А.В. Островский

Рассматриваются уточненные трехмерные дифференциальные модели ценообразования типа Вальраса, Самуэльсона, а также модель, двойственная к модели типа Самуэльсона. Проводится их качественно-численное исследование, показывающее, что наряду с устойчивым равновесием, соответствующим равенству спроса и предложения, возможны периодические изменения цены и текущих спроса и предложения, причем при нарушении устойчивости возможно как постепенное (мягкое), так и скачкообразное (жесткое) нарастание автоколебаний.

Введение

Одним из центральных вопросов математического моделирования функционирования экономической системы является вопрос о том, как формируются в ней цены на товары, услуги и труд. Для рыночной экономики принимается закон, согласно которому цена p растет, если спрос x превышает предложение y, и убывает, если предложение превышает спрос [1]. Из этого как бы следует, что цена определяется равенством спроса и предложения. Далее можно предположить наличие функциональных зависимостей $C(p)$ и $Y(p)$ спроса x и предложения y от цены p [1,2]. При этом естественно считать, что с ростом цены предложение растет, а спрос убывает. Возможны и патологические виды этих зависимостей, когда это не так [1,2], но оставим их в стороне и зададим себе вопрос: так ли уж очевидно, что из сформулированного выше закона изменения цены следует установление этой цены при равенстве спроса и предложения?

В работах [1–5] предлагались такие обоснования и уточнения того, как именно цена p приближается к своему равновесному значению p^*, определяемому из равенства

$$C(p^*) = Y(p^*). \tag{1}$$

Л.Вальрас [2] полагал, что по истечении некоторого времени новая цена p_{n+1} будет определяться через прежнюю соотношением

$$p_{n+1} = p_n\, C(p_n)/Y(p_n) \tag{2}$$

или в виде дифференциального уравнения

$$T\dot{p} + p = pC(p)/Y(p). \tag{3}$$

П.Самуэльсон предложил другой закон вида [6,7]

$$C(p_{n+1}) = Y(p_n), \tag{4}$$

который может быть переписан в дифференциальной форме:

$$T\dot{p} + p = C^{-1}(Y(p)). \tag{5}$$

Однако из соотношений (2) и (4) не всегда следует, что $p_n \to p^*$ при $n \to \infty$. Хотя, казалось бы, они придуманы так, чтобы удовлетворять этому условию, локальная устойчивость имеет место только при $|1+p^*[C'(p^*)-Y'(p^*)]/Y(p^*)|<1$ в модели (2) и $Y'(p^*)<|C'(p^*)|$ в модели (4). Кроме того, эти соотношения никак не указывают на то, как меняются спрос x и предложение y. Цель дальнейшего исследования состоит в уточнениях гипотез Вальраса и Самуэльсона, при которых указывается, как меняются x и y, а также в рассмотрении еще одной возможности, столь же логичной, как и эти две. Скорее всего, у Вальраса спрос и предложение приравниваются соответственно к $C(p)$ и $Y(p)$, а у Самуэльсона спрос и предложение поочередно отслеживают соответственно $C(p)$ и $Y(p)$. Такое рассмотрение приводит к трехмерным моделям с учетом быстроты отслеживания зависимостей x и y от p и закона ценообразования.

Сказанное никак не следует оценивать как обоснование данных моделей ценообразования, а скорее как естественное их логическое развитие, позволяющее лучше оценить их приемлемость.

1. Договоренности

В соответствии с законами спроса и предложения будем считать, что функция $C(p)$ является либо монотонно убывающей и асимптотически стремящейся к нулю при $p \to +\infty$, либо (как, например, в случае линейных функций спроса [7]) монотонно убывающей до некоторого значения $p=p_{max}$, при котором $C(p)=0$, и тождественно равной нулю при $p>p_{max}$; функцию же предложения будем считать монотонно возрастающей (реально она может быть ограниченной сверху, так как выпуск продукции ограничен производственными мощностями). Обычно принимается, что функция $Y(p)$ равна нулю при $p=0$ (считаем, что по нулевой цене производители не будут предлагать товар на рынке).

2. Модель типа Вальраса

С учетом допущений, сделанных во введении, *модель типа Вальраса* имеет следующий вид:

$$T_1\dot{x} + x = C(p), \quad T_2\dot{y} + y = Y(p), \quad T\dot{p} + p = px/y. \tag{6}$$

Здесь x и y – это *текущие* спрос и предложение, которые следят с некоторыми постоянными времени T_1 и T_2 за *теоретическими* (*гипотетическими*) спросом и предложением, то есть значениями функций $C(p)$ и $Y(p)$. Фазовым пространством системы (6) является первый (неотрицательный) октант пространства R^3. В системе (6) имеется состояние равновесия $x=y=C(p^*)=Y(p^*)$, $p=p^*$ где p^* – *равновесная цена*, то есть цена, при которой (теоретический) спрос равен (теоретическому) предложению. (Вообще говоря, в системе существует и состояние равновесия, соответствующее нулевой цене: $x=C(0)>0$, $y=Y(0)>0$, $p=0$; если это состояние равновесия существует, то оно является седловым.)

Равновесная цена локально асимптотически устойчива. В одномерной модели (3) это можно сразу увидеть, исследуя знак $\dot{p}$ в окрестности точки $p=p^*$; так как других состояний равновесия (кроме неустойчивой нулевой цены) нет, то равновесная цена устойчива глобально.

В двумерных моделях, которые получаются из (6), если положить постоянную времени T_1 или T_2 равной нулю (это означает, что одна из текущих величин – спрос или предложение – мгновенно повторяет соответствующую теоретическую величину), характеристический полином равен

$$\lambda^2 + A\lambda + B[p^*/C(p^*)][Y'(p^*) - C'(p^*)],$$

где в зависимости от того, какая постоянная времени (T_1 или T_2) равна нулю, величина A равна соответственно $-T^{-1}p^*C'(p^*)[C'(p^*)]^{-1}+T_2^{-1}$ или $T^{-1}p^*Y'(p^*)[C(p^*)]^{-1}+T_1^{-1}$, а величина B равна соответственно $(TT_2)^{-1}$ или $(TT_1)^{-1}$. В силу условий, наложенных на функции $C(p)$ и $Y(p)$ (см. раздел 1), все коэффициенты полинома положительны. Предельных циклов в двумерных системах нет по критерию Дюлака (в качестве функции Дюлака берется функция $B(y,p)=B(x,p)=p^{-1}$). Следовательно, в двумерных системах равновесная цена глобально асимптотически устойчива.

В трехмерной системе (6) характеристический полином равен $a_0\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3$, где: $a_0=1$; $a_1=(T_2)^{-1}+(T_1)^{-1}$; $a_2=(T_1T_2)^{-1}+(TT_2)^{-1}p^*Y'(p^*)[C(p^*)]^{-1}-$ $-(TT_1)^{-1}p^*C'(p^*)[C(p^*)]^{-1}$; $a_3=(TT_1T_2)^{-1}p^*[C(p^*)]^{-1}[Y'(p^*)-C'(p^*)]$. Все коэффициенты этого полинома положительны и всегда выполняется условие Рауса – Гурвица $a_1a_2-a_0a_3>0$. Следовательно, равновесная цена в трехмерной системе типа Вальраса локально асимптотически устойчива. Как показывают компьютерные расчеты, устойчивость равновесной цены является глобальной.

3. Модель типа Самуэльсона и двойственная к ней

Модель типа Самуэльсона с учетом того, что текущие спрос и предложение отслеживают теоретические, имеет вид

$$T_1\dot{x} + x = y, \quad T_2\dot{y} + y = Y(p), \quad T\dot{p} + p = \begin{cases} C^{-1}(x), & \text{если } C^{-1}(x) \ge 0, \\ 0, & \text{если } C^{-1}(x) < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь правая часть уравнения для $\dot{p}$ доопределена по непрерывности из соображений экономического смысла (неотрицательность цены).

В модели (7) *спрос подстраивается под предложение*, поэтому данная модель может использоваться для описания ситуации, когда товар реализуется целиком (например, при дефиците товара). Однако может существовать и другая ситуация, когда производство обладает достаточно хорошими возможностями для того, чтобы *предложение подстраивалось под спрос*, то есть производители могли реагировать на потребности населения в товаре. Этот случай может описываться следующей модельной системой уравнений:

$$T_1\dot{x} + x = C(p), \quad T_2\dot{y} + y = x, \quad T\dot{p} + p = Y^{-1}(y). \tag{8}$$

Система (8) является, в определенном смысле, двойственной к системе (7), поэтому назовем модель (8) *моделью, двойственной к модели типа Самуэльсона* (DS–*модель*).

Как в системе (7), так и в системе (8) существует единственное состояние равновесия $x=y=C(p^*)=Y(p^*)$, $p=p^*$, соответствующее равновесной цене.

В одномерных и двумерных моделях, которые получаются из систем (7) и (8), если положить одну или две постоянные времени равными нулю, все коэффициенты характеристических полиномов в окрестности этого состояния равновесия положительны и, кроме того, предельных циклов в двумерных системах нет по критерию Бендиксона. Следовательно, в одномерных и двумерных моделях равновесная цена глобально устойчива.

Характеристические полиномы трехмерных систем (7) и (8) в окрестности равновесной цены имеют вид

$$\lambda_3 + (1/T_1 + 1/T_2 + 1/T)\lambda^2 + [1/(T_1T_2) + 1/(TT_1) + 1/(TT_2)]\lambda + A/(TT_1T_2), \qquad (9)$$

где величина A равна $-Y'(p^*)[C'(p^*)]^{-1}$ для модели типа Самуэльсона и $-C'(p^*)[Y'(p^*)]^{-1}$ для DS–модели. Все коэффициенты полинома (9) положительны. Условие Рауса – Гурвица, согласно которому для устойчивости состояния равновесия минор 2-го порядка матрицы Гурвица должен быть положительным, с помощью несложных преобразований приводится к виду

$$A < T/T_1 + T/T_2 + T_2/T_1 + T_2/T + T_1/T_2 + T_1/T + 2 = F(T,T_1,T_2). \qquad (10)$$

Так как $F(T,T_1,T_2)$ – однородная функция степени 0 от T, T_1 и T_2, то границу области устойчивости, на которой неравенство (10) обращается в равенство, можно изобразить, например, на плоскости (T_1T^{-1},T_2T^{-1}), где T, T_1, T_2 >0. Эта граница имеет вид замкнутой кривой, симметричной относительно биссектрисы первого квадранта плоскости (T_1T^{-1},T_2T^{-1}). Областью устойчивости является первый квадрант плоскости (T_1T^{-1},T_2T^{-1}) за исключением области, ограниченной этой кривой. При увеличении положительного параметра A кривая растягивается, охватывая все большую область. При уменьшении параметра A кривая сжимается и при A=8 вырождается в точку (1,1), соответствующую множеству всех положительных значений T, T_1 и T_2 таких, что $T=T_1=T_2$ (рис.). При $A<8$ весь первый квадрант плоскости (T_1T^{-1},T_2T^{-1}) является областью устойчивости состояния равновесия. Отсюда получаем условие устойчивости состояний равновесия (равновесных цен) в дифференциальной модели типа Самуэльсона и в DS–модели при любых (положительных) значениях постоянных времени:

если p^* – равновесная цена, то при выполнении неравенства $A<8$, где величина A есть $-Y'(p^*)[C'(p^*)]^{-1}$ для модели типа Самуэльсона и $-C'(p^*)[Y'(p^*)]^{-1}$ для DS–модели, состояние равновесия, соответствующее равновесной цене, локально асимптотически устойчиво при любых (положительных) значениях постоянных времени T, T_1 и T_2. (11)

Если значения параметров T, T_1 и T_2, изменяясь, пересекают границу области устойчивости и выходят из нее, то происходит бифуркация Андронова – Хопфа [8,9], и состояние равновесия теряет устойчивость. Как показывают компьютерные расчеты, при этом возникает (даже в случае линейных функций спроса и предложения, которые на самом деле являются кусочно-линейными) глобально устойчивый предельный цикл, амплитуда которого возрастает с увеличением A, причем в зависимости от конкретных функций спроса и предложения амплитуда колебаний может возрастать непрерывно от нуля или сразу от некоторого конечного значения, что соответствует *мягкому* и *жесткому* возбуждению автоколебаний [8,9]. В случае линейных функций спроса и предложения автоколебания всегда возникают жестко, так как на бифуркационной границе состояние равновесия является центром. При нелинейных функциях спроса и предложения колебания могут возникать как мягко, так и жестко (жесткое возбуждение автоколебаний связано в этом случае с одновременным существованием устойчи–

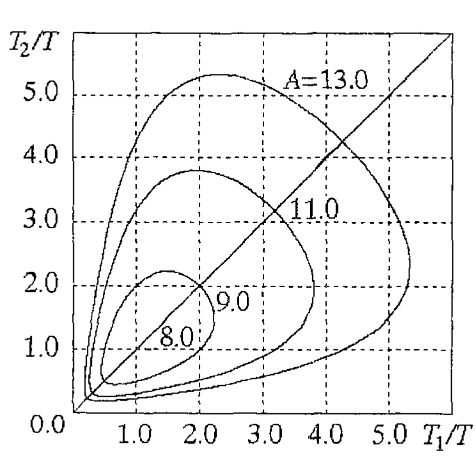

Рис.

вого состояния равновесия и устойчивого предельного цикла конечной амплитуды, между которыми находится седловой предельный цикл, сливающийся на бифуркационной границе с состоянием равновесия). Например, если в модели типа Самуэльсона взять $C^{-1}(x)=1-x^2$, то при $Y(p)=kp^2$ колебания возникают мягко, а при $Y(p)=kp^{0.3}$ – жестко. В DS–модели в случае $C(p)=1-p^2$ при $Y^{-1}(y)=ky^2$ колебания возбуждаются мягко, а при $Y^{-1}(y)=ky^{0.3}$ – жестко.

Для «линейных» функций спроса и предложения в случае существования предельного цикла можно установить соотношения между средними за период значениями $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{p}$ фазовых переменных x, y и p и равновесными значениями x^*, y^* и p^* в модели типа Самуэльсона. Именно:

пусть функция $C^{-1}(x)$ *есть* $(a-x)b^{-1}$ *при* $x\le a$ *и* 0 *при* $x>a$, *а функция* $Y(p)$ *есть* kp (*или* kp *при* $p\le p_{н}$ *и* $kp_{н}$ *при* $p>p_{н}$, *где* $p_{н}>0$ – *некоторая цена насыщения*). *Пусть состояние равновесия неустойчиво и в системе* (7) *существует устойчивый предельный цикл. Тогда* $\bar{x}>x^*$, $\bar{y}>y^*$ *и* $\bar{p}>p^*$.

Действительно, если $p^*>p_{н}$, то $Y'(p^*)=0$, и в силу условия (11) состояние равновесия является устойчивым. Следовательно, неустойчивость состояния равновесия может иметь место только при $p^*<p_{н}$. В этом случае равновесные значения фазовых переменных равны

$$x^* = y^* = (b+k)^{-1}ak, \quad p^* = (b+k)^{-1}a. \tag{12}$$

Пусть τ – период автоколебаний. Так как область $x<a$ является областью линейности системы (7), то в течение некоторой части периода колебаний изображающая точка, двигаясь по предельному циклу, должна находиться в области $x>a$, в которой $(a-x)b^{-1}<0$. С учетом этого факта из уравнения для $\dot{p}$ следует, что для предельного цикла имеет место неравенство

$$\tau^{-1}\int_0^\tau \dot{p}dt > \tau^{-1}\int_0^\tau [(a-x)b^{-1} - p]T^{-1}dt. \tag{13}$$

Кроме того, значение переменной p в течение некоторой части периода колебаний может, вообще говоря, находиться в области $p>p_{н}$, в которой $kp>kp_{н}$.

С учетом этого обстоятельства из уравнения для $\dot{y}$ следует, что

$$\tau^{-1}\int_0^\tau \dot{y}dt \le \tau^{-1}\int_0^\tau (kp-y)T_2^{-1}dt. \tag{14}$$

На предельном цикле средние за период значения фазовых скоростей (производных по времени от фазовых переменных) равны нулю. Отсюда, беря средние значения от правых частей уравнений системы (7), используя линейность интеграла и неравенства (13) и (14), получаем следующие соотношения для средних значений:

$$\bar{y} - \bar{x} = 0, \quad k\bar{p} - \bar{y} \ge 0, \quad (a - \bar{x})b^{-1} - \bar{p} < 0,$$

откуда с учетом (12) получаем, что $\bar{x}>x^*$, $\bar{y}>y^*$ и $\bar{p}>p^*$.

Такие же соотношения имеют место и для DS–модели.

Для многих нелинейных функций спроса и предложения вычислительный эксперимент показывает, что если существует предельный цикл, то средние значения фазовых переменных также превосходят равновесные, причем по мере увеличения параметра A разности между средними и равновесными значениями увеличиваются. Однако средние значения текущего спроса и текущего предложения всегда равны между собой, так как из уравнения для $\dot{x}$ в модели типа Самуэльсона и из уравнения для $\dot{y}$ в DS–модели после взятия средних значений от обеих частей каждого из этих уравнений получаем: $\bar{x}-\bar{y}=0$.

4. Соотношения фаз в случае возникновения колебаний

Как показывают результаты компьютерного моделирования, в случае возникновения колебаний (как затухающих, так и незатухающих) фазовые соотношения между переменными различны в разных моделях. Если обозначить знаком «$\langle$» предшествование (опережение) по фазе, то эти соотношения имеют вид: $x \langle p \langle y$ в модели типа Вальраса, $p \langle y \langle x$ в модели типа Самуэльсона и $x \langle y \langle p$ в DS–модели.

Выводы

В работе рассмотрены три различных механизма ценообразования, один из которых – модель типа Вальраса – основан на приравнивании денежных потоков, а два других – модель типа Самуэльсона и DS–модель – на приравнивании товарных потоков. Если в модели типа Вальраса равновесная цена оказывается глобально устойчивой, то динамика рынка, развивающегося по сценарию типа Самуэльсона или по DS–сценарию, отличается большим разнообразием вариантов: здесь могут возникать автоколебания, причем их возбуждение может быть как мягким, так и жестким. Динамика рынка в данных моделях определяется видом конкретных функций спроса и предложения, а также значениями постоянных времени, характеризующих реакцию экономических субъектов на изменения в состоянии рынка. В случае возникновения колебаний в разных моделях имеют место различные фазовые соотношения между переменными.

Библиографический список

1. *Макконнелл К.Р.*, *Брю С.Л.* Экономикс: принципы, проблемы и политика. Пер. с англ. М.: Республика, 1992. Т. 1 и 2.

2. *Петров А.А.*, *Поспелов И.Г.*, *Шананин А.А.* Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996.

3. *Моришима М.* Равновесие, устойчивость, рост (многоотраслевой анализ) / Пер. с англ. под ред. В.Л.Макарова. М.: Наука, 1972.

4. *Машина М.В.* Экономическая азбука. М.: МИРОС – Международные отношения, 1995.

5. Курс экономической теории. Общие основы экономической теории, микроэкономика, макроэкономика, переходная экономика: Учебное пособие/ Руководитель авт. колл., науч. ред. проф. А.В.Сидорович. М.: МГУ; Изд–во «ДИС», 1997.

6. *Самуэльсон П.* Экономика/ Пер. с англ. М.: МГП «Алгон», ВНИИСИ, 1992. Т. 2.

7. *Стронгин П.Р.* Независимые производители и независимые посредники на рынке стандартизованного товара // Вест. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1997. Вып. 17. С. 160.

8. *Андронов А.А.*, *Витт А.А.*, *Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.

9. *Неймарк Ю.И.*, *Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.

Нижегородский государственный университет

Поступила в редакцию 25.05.99
после доработки 11.11.99

ON SOME MODELS OF PRICE FORMING IN MARKET ECONOMY

Yu.I. Neimark, A.V. Ostrovsky

Elaborated 3–dimensional price forming differential models of Walras and Samuelson types and a model which is dual to Samuelson–type model are under consideration in this work. These models are investigated by means of qualitative and numerical methods, and this investigation shows that the equilibrium point where the demand is equal to the supply may lose its stability and auto–oscillations may appear. Excitation of auto–oscillations may be hard or soft (smooth).

Неймарк Юрий Исаакович – доктор технических наук, профессор Нижегородского государственного университета, академик РАЕН, Соросовский профессор, член Национального комитета по теоретической и прикладной механике, лауреат премий А.А.Андронова и Н.Винера. Автор 8 монографий и более 400 работ по теории колебаний, теоретической механике, теории управления и др.

Островский Артем Виленович – родился в Горьком в 1974 году. Аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета. Область научных интересов – математическое моделирование (главным образом в экономике и социальной сфере) с использованием методов нелинейной динамики. Автор 3 публикаций.