



СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОННО-ВОЛНОВЫХ СИСТЕМ

Т. В. Дмитриева, Н. М. Рыскин, В. Н. Титов, А. М. Шигаев

Исследуется сложная динамика ряда распределенных автоколебательных систем, которые являются простыми моделями приборов вакуумной сверхвысоко-частотной электроники. Рассматриваются модель параметрического взаимодействия встречных волн, модели взаимодействия прямой и обратной волн с энергиями разных знаков, а также модель автогенератора клистронного типа с запаздывающей обратной связью. Обсуждается возможность использования полученных результатов для объяснения особенностей сложной динамики некоторых электронно-волновых приборов СВЧ.

Введение

Исследование сложного поведения различных приборов сверхвысоко-частотной электроники в последние годы привлекает все большее внимание. С теоретической точки зрения интерес к этой проблеме обусловлен тем, что подобные системы являются типичными примерами распределенных автоколебательных систем (РАС), поэтому их изучение помогает установить связь между детерминированным хаосом в конечномерных динамических системах и турбулентностью в распределенных средах. Практический интерес вызван потребностью в создании мощных источников хаотических сигналов с управляемыми характеристиками. Наиболее часто исследуются такие приборы, как лампы обратной волны (ЛОВ) и другие приборы со встречными волнами [1], лазеры на свободных электронах (ЛСЭ) [2,3], лампы бегущей волны (ЛБВ) с запаздывающей обратной связью [4,5], приборы с виртуальным катодом [6,7], различные приборы плазменной СВЧ – электроники [8]. Мы упомянули только наиболее важные с нашей точки зрения обзоры и оригинальные работы последних лет.

Однако непосредственное изучение нелинейной динамики в реальных электронно-волновых приборах зачастую наталкивается на значительные трудности. Численный эксперимент, как правило, обнаруживает сложную картину чередования различных колебательных режимов при изменении управляющих параметров, так что выявление каких-либо универсальных закономерностей не представляется возможным. Поэтому особую роль приобретает поиск достаточно простых распределенных моделей электронно-волновых систем со сложной динамикой, которые можно детально проанализировать численными, а по возможности и аналитическими методами. В частности, такой подход оказался плодотворным при исследовании гирорезонансных приборов СВЧ [9,10]. В настоящей работе представлены результаты анализа трех подобных моделей.

Рассматривается параметрическое взаимодействие трех волн в квадратично-нелинейной среде в случае, когда одна из волн является встречной, взаимодействие прямой и обратной волн с положительной и отрицательной энергиями (модель ЛОВ), а также простая модель автогенератора клистронного типа с запаздывающей обратной связью.

1. Модель параметрического взаимодействия встречных волн

Параметрическое взаимодействие трех волн в квадратично-нелинейной среде играет важную роль в гидродинамике, нелинейной оптике, физике плазмы и т.д. [11,12]. При наличии какого-либо типа обратной связи система с параметрической неустойчивостью является автоколебательной и может демонстрировать сложную динамику. Например, в работе [13] было обнаружено существование режимов динамического хаоса в случае, когда одна из волн испытывает отражения на границах. Интерес представляет и другой случай, когда одна из волн является встречной, что обеспечивает внутреннюю распределенную обратную связь. Параметрическая неустойчивость встречных волн может быть реализована, в частности, в процессах с участием низко- и высокочастотных волн [11] (например, при взаимодействии оптических волн с акустическими или ионно-звуковых плазменных волн с ленгмюровскими). В СВЧ-электронике подобная ситуация имеет место в ЛСЭ – генераторе встречной волны, в котором электронный пучок взаимодействует с полями двух электромагнитных волн. На возможность сложной динамики в таком приборе было указано в работе [14]¹.

В качестве исходных используем уравнения трехволнового параметрического взаимодействия [11,12], которым после нормировки переменных можно придать следующий вид [16]:

$$\begin{aligned} \partial A_1 / \partial \tau + \partial A_1 / \partial \xi &= \alpha A_2 A_3^*, \\ (1+u) \partial A_2 / \partial \tau + \partial A_2 / \partial \xi &= -\alpha A_1 A_3, \\ \partial A_3 / \partial \tau - \partial A_3 / \partial \xi &= \alpha A_2 A_1^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $A_{1,2,3}(\xi, \tau)$ – комплексные амплитуды холостой волны, накачки и сигнала, соответственно, нормированные на амплитуду волны накачки на входе в систему α ; ξ – безразмерная координата, нормированная на длину пространства взаимодействия; τ – безразмерное время. Безразмерный параметр

$$u = 2v_3(v_1 - v_2) / [v_2(v_1 + v_3)]$$

характеризует расстройку групповых скоростей попутных волн ($v_{1,2,3}$ – групповые скорости взаимодействующих волн). Знак «-» в левой части последнего уравнения в системе (1) отражает тот факт, что сигнальная волна является встречной.

Граничные и начальные условия, соответствующие распределенному параметрическому генератору встречной волны, имеют вид

$$A_1(\xi=0; \tau) = 0, \quad A_2(\xi=0; \tau) = 1, \quad A_3(\xi=1; \tau) = 0, \quad (2)$$

$$A_2(\xi; \tau=0) = 1, \quad |A_{1,3}(\xi; \tau=0)| \ll 1. \quad (3)$$

Соотношения (2) означают, что на вход системы в сечении $\xi=0$ подается интенсивная волна накачки, а холостая волна отсутствует. На другом конце системы в сечении $\xi=1$ отсутствует сигнальная волна. Соотношения (3)

¹ Конечно, о применимости данной модели к описанию сложной динамики ЛСЭ следует говорить с определенной осторожностью, поскольку нелинейные эффекты обусловлены не только истощением накачки, но и инерционной разгруппировкой электронов [14,15].

свидетельствуют о том, что рассматривается самовозбуждение системы от малых флуктуаций холостой и сигнальной волн.

Стартовые условия генерации можно получить, рассматривая начальную стадию развития неустойчивости, когда амплитуды сигнальной и холостой волн малы и истощение накачки еще не сказывается. Полагая в уравнениях (1) $A_2=1$, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \partial A_1 / \partial \tau + \partial A_1 / \partial \xi &= \alpha A_3^*, \\ \partial A_3 / \partial \tau - \partial A_3 / \partial \xi &= \alpha A_1^* \end{aligned} \quad (4)$$

с граничными условиями $A_1(\xi=0; \tau) = A_3(\xi=1; \tau) = 0$, которая описывает нестационарное линейное взаимодействие встречных волн с положительной и отрицательной энергиями. Теория такого взаимодействия достаточно подробно изложена в литературе (см., например, [1,17]). Решение уравнений (4) можно представить в виде суперпозиции собственных мод

$$A_1 = \sum_n C_n \exp(k_n \tau) \sin[(\alpha^2 - k_n^2)^{1/2} \xi],$$

$$A_3 = \sum_n D_n \exp(k_n \tau) \sin[(\alpha^2 - k_n^2)^{1/2} (\xi - 1)],$$

амплитуды которых C_n, D_n определяются из начальных условий, а k_n – корни трансцендентного уравнения

$$(\alpha^2 - k^2)^{1/2} \cos[(\alpha^2 - k^2)^{1/2}] + k \sin[(\alpha^2 - k^2)^{1/2}] = 0. \quad (5)$$

Данное уравнение имеет бесконечное число комплексных корней, что отражает наличие бесконечного числа собственных мод, то есть степеней свободы, в исследуемой распределенной системе. Условие самовозбуждения моды с номером n есть $\alpha_n = \pi n + \pi/2$, причем можно показать, что корни с $\text{Re}(k_n) > 0$ являются чисто вещественными. Наименьшее значение $\alpha_0 = \pi/2$, то есть наименьшую амплитуду накачки, необходимую для возникновения генерации, имеет мода с $n=0$.

Полагая в уравнениях (1) производные по времени равными нулю, можно найти решения, описывающие стационарные автоколебательные режимы (подробнее см. [16]). В явном виде решение, соответствующее моде с номером n , выглядит так:

$$A_1 = \pm m_n \text{sn}(\alpha \xi; m_n), \quad A_2 = \text{dn}(\alpha \xi; m_n), \quad A_3 = \pm m_n \text{cn}(\alpha \xi; m_n). \quad (6)$$

Здесь $\text{sn}, \text{cn}, \text{dn}$ – эллиптические функции Якоби, причем модуль эллиптических функций m_n определяется из уравнения

$$\alpha = (2n+1)K(m_n), \quad n=0,1,2,\dots,$$

где K – полный эллиптический интеграл 1-го рода. Поскольку $K > \pi/2$, стационарное решение для моды с номером n существует только при $\alpha > \pi n + \pi/2$, что согласуется с условиями самовозбуждения автоколебаний.

Полученные решения являются точными и описывают стационарные режимы генерации. Однако, для того чтобы выяснить, какие из этих режимов устанавливаются в результате переходного процесса (и устанавливаются ли вообще), необходимо прибегнуть к численному интегрированию нестационарных уравнений (1) с граничными и начальными условиями (2) и (3).

Численный эксперимент позволяет выявить ряд качественных аналогий между динамикой рассматриваемой распределенной системы и динамикой некоторых известных систем с конечным числом степеней свободы, в частности, системы Лоренца, которая является одной из наиболее известных и хорошо изученных эталонных моделей нелинейной динамики [11,12,18],

$$\dot{X} = \sigma(Y-X), \quad \dot{Y} = rX - Y - XZ, \quad \dot{Z} = -bZ + XY,$$

где r , σ и b – параметры, а также уравнений, описывающих распадное ограничение параметрической неустойчивости [19], которые возникают в ряде задач физики плазмы.

Поскольку система уравнений (1) является двухпараметрической, опишем вначале динамику при изменении параметра α и при фиксированном $u=0.1$. Результаты численного моделирования показывают, что при $\alpha=\pi/2$ происходит самовозбуждение колебаний, что согласуется с результатами линейной теории. После самовозбуждения состояние равновесия O , соответствующее в фазовом пространстве нулевым решениям уравнений (1), становится седловым: появляется чисто вещественный положительный корень характеристического уравнения (5). Размерность неустойчивого многообразия точки O , очевидно, равна числу нарастающих собственных мод и всегда конечна, тогда как размерность устойчивого многообразия всегда бесконечна².

При не слишком больших значениях α переходный процесс заканчивается установлением стационарного состояния, соответствующего основной моде. На рис. 1 приведены зависимости амплитуды выходного сигнала $A_3(\xi=0)$ от времени в процессе установления колебаний, а также пространственные распределения амплитуд в установившемся режиме. Отметим, что последние хорошо согласуются с найденными теоретически решениями (6). В фазовом пространстве появляется пара нетривиальных состояний равновесия C^\pm , которые соответствуют стационарным решениям для основной моды и симметричны относительно замены $A_1 \rightarrow -A_1, A_3 \rightarrow -A_3$. С ростом управляющего параметра переходный процесс приобретает осциллирующий характер, а его длительность увеличивается (рис. 1, б). Осцилляции обусловлены запаздыванием внутренней распределенной обратной связи.

В системе Лоренца при $r>1$ также возникает пара симметричных устойчивых неподвижных точек C^\pm , причем у седлового состояния равновесия O имеется устойчивое многообразие W_s и пара симметричных неустойчивых многообразий W_u^\pm , которые притягиваются к C^+ и к C^- соответственно. То, какое именно из двух устойчивых состояний реализуется по окончании переходного процесса, определяется видом начальных возмущений. При увеличении r многообразия W_u^\pm замыкаются на W_s , образуя сепаратрисные петли. В результате этой бифуркации W_u^+ начинает притягиваться к C^- , а W_u^- – к C^+ (см., например, [11,18]). Аналогичная бифуркация происходит и в рассматриваемой системе ($\alpha=5.6$). В этом случае одно и то же начальное возмущение при $\alpha<5.6$ приводит к установлению состояния C^+ , а при $\alpha>5.6$ – C^- , и наоборот. Соответствующие зависимости представлены на рис. 1, в.

Наконец, при $\alpha \approx 8.19$ движение становится хаотическим. На рис. 2 представлены временная реализация процесса и проекция странного аттрактора. Хорошо видно, что аттрактор напоминает аттрактор Лоренца. В хаотическом режиме фазовая траектория раскручивается по спирали, уходя от одного из неустойчивых положений равновесия, и затем перескакивает в окрестность другого, причем процесс переключений является случайным. Следует отметить, что, как и в упомянутых конечномерных системах, странный аттрактор появляется раньше, чем происходит потеря устойчивости состояниями равновесия C^\pm . Таким образом, в узком диапазоне параметра α сосуществуют устойчивые стационарные состояния и хаотическое движение, а переход к хаосу при плавном увеличении параметра сопровождается гистерезисом. Это легко проверить, задавая начальные условия в виде, близком к стационарному решению. Например, при $u=0.1$ странный аттрактор рождается при $\alpha \approx 8.19$, а C^\pm теряют устойчивость при $\alpha \approx 8.27$.

² Основные определения и понятия применительно к распределенным динамическим системам и некоторые общие свойства аттракторов обсуждаются, например, в статье [20].

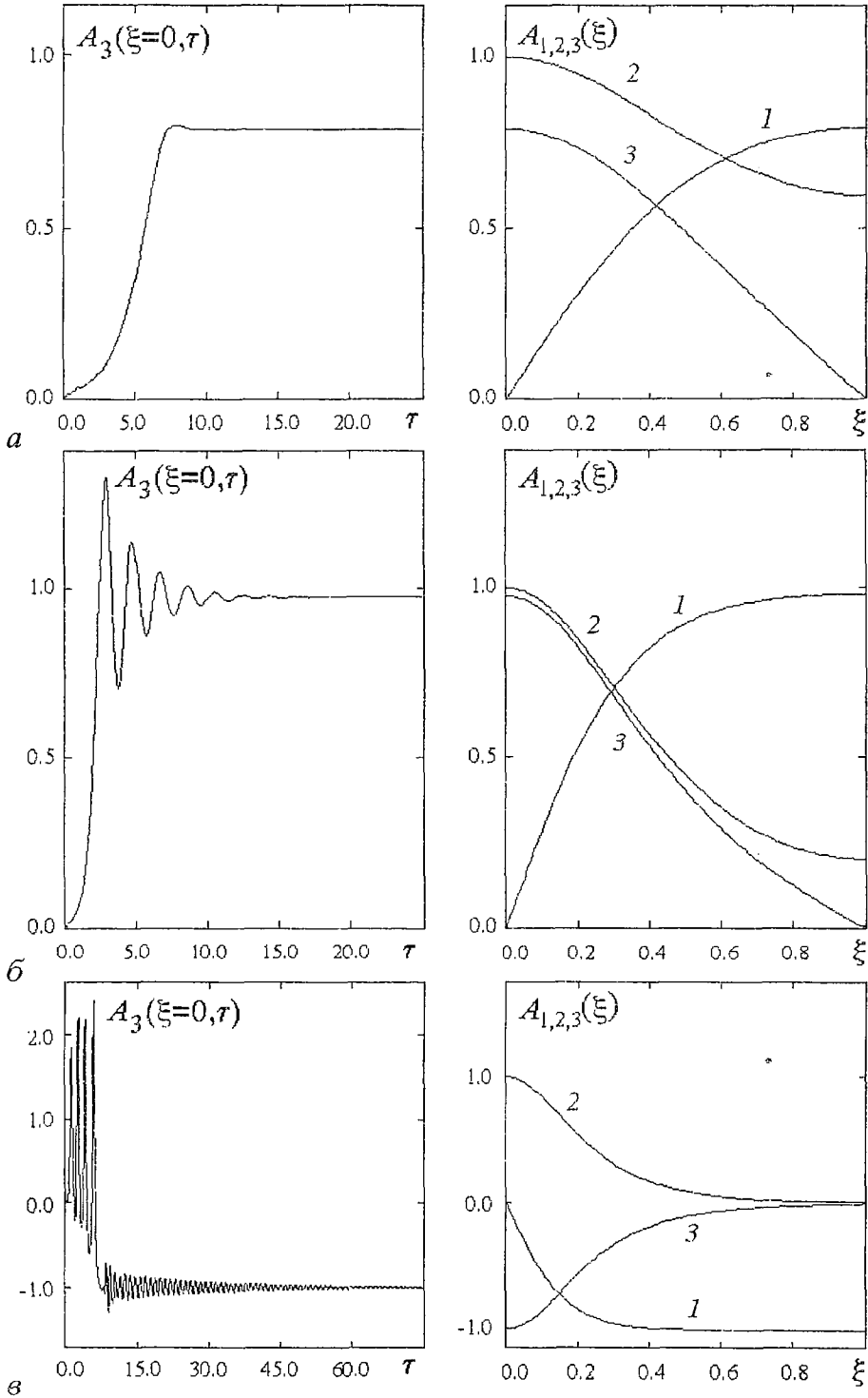


Рис. 1. Зависимость амплитуды выходного сигнала $A_3(\xi=0)$ от времени в процессе установления колебаний (слева) и стационарные распределения амплитуд волн (справа) для модели параметрического взаимодействия встречных волн при $u=0.1$: *a* - $\alpha=2.0$; *б* - $\alpha=4.0$; *в* - $\alpha=6.0$

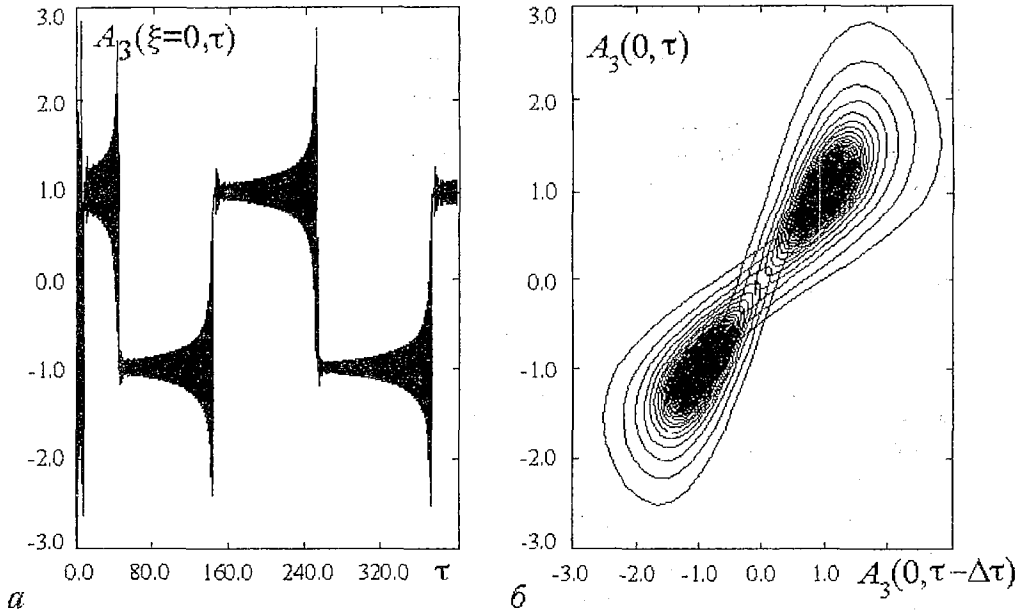


Рис. 2. Реализация и проекция фазового портрета, соответствующие странному аттрактору при $u=0.1, \alpha=10.0$

Как показывают результаты численного моделирования [16], при других положительных значениях u динамика системы носит аналогичный характер, хотя бифуркационные значения α изменяются. Однако при $u \rightarrow 0$ значение α , при котором происходит переход к хаосу, стремится к бесконечности. Аналогичное поведение в системе Лоренца наблюдается в пределе $\sigma \rightarrow b+1$. Таким образом, хаотические колебания возможны лишь в том случае, когда групповая скорость волны накачки меньше, чем у холостой волны.

Особый интерес вызывает тот факт, что хотя исследуется распределенная система с бесконечным числом степеней свободы, ее динамика оказывается качественно близкой к ряду конечномерных систем, в частности – к системе Лоренца. Это обусловлено тем, что основную роль в организации сложной динамики играют три неустойчивых стационарных состояния: нулевое O и ненулевые S^\pm , которые соответствуют нижней собственной моде и симметричны друг другу. Несмотря на то, что с ростом α появляются все новые нарастающие собственные моды, в процессе конкуренции высшие моды подавляются основной. Распределенный характер, таким образом, проявляется лишь в усложнении переходного процесса.

Следует, однако, заметить, что жесткое возникновение хаоса, наблюдаемое в данном случае, нетипично для РАС типа «электронный поток – электромагнитное поле» [1–5], где доминирует другой сценарий, характеризующийся мягкой потерей устойчивости стационарным режимом через возникновение автомодуляции, вызванной запаздыванием обратной связи. В этом смысле более адекватными представляются модельные РАС, рассматриваемые в следующем разделе.

2. Простые модели взаимодействия прямой и обратной волн с положительной и отрицательной энергиями

Рассмотрим систему двух взаимодействующих волн с положительной и отрицательной энергиями, групповые скорости которых направлены навстречу друг другу. В окрестности точки синхронизма (ω_0, k_0) дисперсионное соотношение связанных волн приближенно можно представить в виде [11]:

$$(\Omega - v_1 K)(\Omega + v_2 K) = -L^2, \quad (7)$$

где $\Omega = \omega - \omega_0$, $K = k - k_0$ – отстройки частоты и волнового числа от точки синхронизма, $v_{1,2}$ – групповые скорости, L – параметр связи. Знак «–» в правой части (7) соответствует активной связи, когда взаимодействуют волны с энергиями разных знаков. Величины Ω и K можно интерпретировать как частоту и волновое число медленно меняющейся огибающей волнового пакета. Совершая в уравнении (7) обратное преобразование Фурье, получим линейное дифференциальное уравнение Клейна – Гордона, описывающее динамику амплитуды возмущения

$$(\partial/\partial t + v_1 \partial/\partial x)(\partial/\partial t - v_2 \partial/\partial x)A = L^2 A. \quad (8)$$

Граничные условия имеют вид

$$A(x=0;t)=0, \quad \partial A/\partial t + v_1 \partial A/\partial x|_{x=1} = 0.$$

При этом мы по-прежнему полагаем, что пространственная координата нормирована на длину системы, поэтому параметр L пропорционален длине пространства взаимодействия. Уравнение (8) полностью аналогично системе (4), так что по-прежнему имеется бесконечное число собственных мод, которые само-возбуждаются, когда L превышает критические значения $\pi n + \pi/2$, $n=0,1,2,\dots$ [17].

Простейшее обобщение уравнения (8) на нелинейный случай можно получить, заменяя в правой части A на некоторую нелинейную функцию $f(A)$, которая должна описывать эффекты нелинейного насыщения неустойчивости. Таким образом, приходим к нелинейному уравнению Клейна – Гордона

$$(\partial/\partial t + v_1 \partial/\partial x)(\partial/\partial t - v_2 \partial/\partial x)A = L^2 f(A). \quad (9)$$

Уравнение такого вида возникает, в частности, в теории ЛОВ типа М [17,21]. Оно достаточно хорошо описывает процессы установления колебаний на основной моде и конкуренции основной и высших мод. Однако более сложные автомодуляционные режимы генерации не наблюдаются. Заметим также, что уравнения параметрического взаимодействия, которые были рассмотрены в предыдущем разделе, в случае $u=0$ сводятся к уравнению Син-Гордона ($f(A)=\sin(A)$). В этом случае, как показано в [16], критическое значение бифуркационного параметра стремится к бесконечности и сложная динамика невозможна. Проведенные нами исследования уравнений типа (9) с различными нелинейностями не обнаружили возникновения автомодуляции. При любом значении параметра L устанавливается стационарное состояние, соответствующее основной моде, хотя длительность переходного процесса увеличивается с ростом L и может быть очень велика. Отметим, что невозможность возникновения автомодуляционных режимов можно показать аналитически. Доказательство основано на существовании у квазилинейного гиперболического уравнения типа (9) глобальной функции Ляпунова

$$\Phi(t) = \int_0^L [1/2(\partial A/\partial t)^2 + 1/2(\partial A/\partial x)^2 - W(A)] dx,$$

где $dW(A)/dA=f(A)$, непрерывно убывающей вдоль траекторий уравнения за исключением неподвижных точек, где $\Phi=\text{const}$ [20,22].

В то же время, в ЛОВ типа О во взаимодействии участвуют три волны: две волны пространственного заряда в электронном пучке и обратная электромагнитная волна, причем даже в кинематическом пределе, когда не учитываются кулоновские силы, взаимодействие остается трехволновым и дисперсионное соотношение имеет третий порядок [17]. Поэтому рассмотрим модель ЛОВ типа О, которая строится путем простейшего нелинейного обобщения уравнений линейной нестационарной теории

$$\partial^2 \theta / \partial x^2 = -iL^2 F, \quad (10)$$

$$\partial F / \partial t - \partial F / \partial x = -LI. \quad (11)$$

Здесь θ – аналог фазы электрона относительно волны, F – аналог комплексной амплитуды волны, I – величина, играющая роль комплексной амплитуды первой гармоники сгруппированного тока, для которой используем следующее выражение:

$$I = -2J_1(|\theta|)\theta/|\theta|, \quad (12)$$

где J_1 – функция Бесселя 1-го порядка. Осциллирующий характер функции Бесселя отражает многократную перегруппировку электронов в сильном поле – основной нелинейный эффект в приборах с инерционной группировкой. Отметим, что выражения типа (12) часто возникают при приближенном анализе группировки электронного потока методом заданного поля [23]. Уравнения (10) и (11) являются аналогами уравнения движения и уравнения возбуждения, соответственно. Параметр L в теории ЛОВ равен $2\pi CN$, где C – параметр усиления Пирса, N – число замедленных длин волн, укладываемых вдоль длины системы [17]. Граничные условия к уравнениям (10)–(12) имеют вид

$$\theta(x=0) = 0, \quad \partial \theta / \partial x|_{x=0} = 0, \quad F(x=1) = 0.$$

Как и в теории ЛОВ, эти соотношения означают, что на вход системы поступает немодулированный электронный пучок, а на правой границе отсутствует электромагнитная волна.

Как показывает численное моделирование, самовозбуждение колебаний в рассматриваемой системе происходит при $L=1.98$, причем частота генерации равна $-\pi$, что совпадает с результатами линейной теории ЛОВ [17]. На рис. 3 приведены зависимости амплитуды F_0 и частоты ω_0 выходного сигнала в режиме стационарной генерации от параметра L . Характер зависимости $F_0(L)$ легко объяснить, анализируя пространственные распределения $F(x)$ и $I(x)$, представленные на рис. 4. Когда бифуркационный параметр достигает значения $L \approx 3.0$, величина гармоники тока вблизи правой границы системы падает до нуля, то есть происходит полная разгруппировка сгустков. В этой области имеет место насыщение амплитуды выходного сигнала. При дальнейшем увеличении L становится возможным образование вторичных сгустков и рост амплитуды возобновляется. Вместе с тем зависимость $F(x)$ усложняется.

При $L \approx 4.8$, когда происходит разгруппировка вторичных сгустков, стационарный режим теряет устойчивость и возникает автомодуляция. Далее реализуется сложная последовательность чередующихся регулярных и хаотических автомодуляционных режимов. Это наглядно иллюстрирует рис. 5, где представлена бифуркационная диаграмма, на которой отложены положения максимумов амплитуды выходного сигнала F_{\max} в зависимости от параметра L . Как было обнаружено в работах [24,25], в ЛОВ наблюдается аналогичная картина. В то же время имеются и некоторые различия. Прежде всего, частота автомодуляции $\omega_a \approx -4.5\pi$, что примерно в три раза больше, чем в ЛОВ. Это объясняется тем, что в ЛОВ

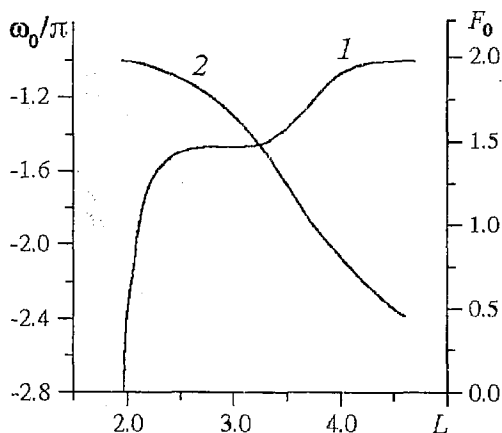


Рис. 3. Зависимости амплитуды (1) и частоты (2) стационарной генерации от параметра L для простой модели ЛОВ

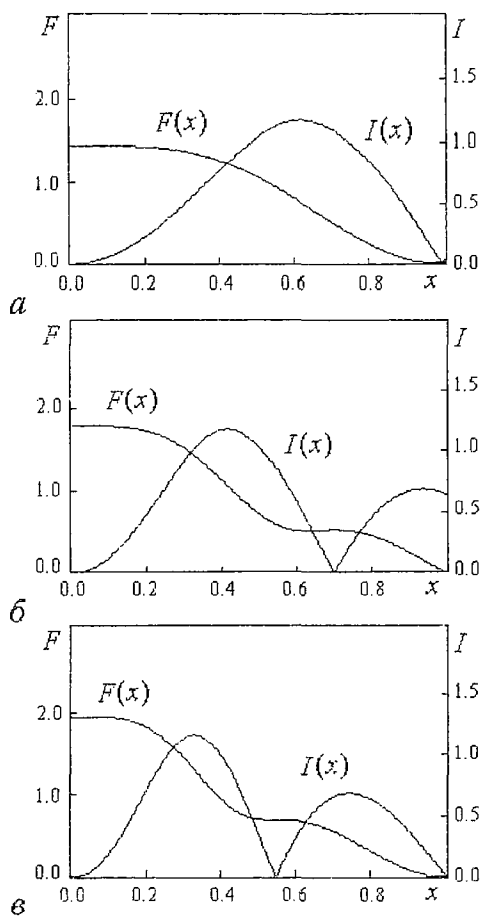


Рис. 4. Стационарные пространственные распределения амплитуд поля и тока для простой модели ЛОВ: а - $L=2.8$; б - $L=3.8$; в - $L=4.6$

автомодаляция возникает при $L \approx 2.9$, причем распределение поля в момент потери устойчивости примерно такое же, как на рис. 4, а, а период автомодаляции близок ко времени запаздывания в цепи обратной связи (в используемой здесь нормировке это время равно единице). Для приближенной модели (10)–(12) распределение $F(x)$ вблизи порога автомодаляции имеет более сложный вид (см. рис. 4, в), поскольку успевают образоваться вторичные сгустки (зависимость $I(x)$ имеет два максимума). После потери устойчивости за время прохода излучения вдоль длины системы успевают сформироваться три максимума поля. Соответственно и частота автомодаляции оказывается в три раза выше. Это хорошо видно из рис. 6, а, где представлена картина пространственно-временной динамики поля и тока. Здесь следует отметить аналогию с нелинейной динамикой релятивистской ЛОВ, где в слабо- и ультрарелятивистском случаях переход к автомодаляции происходит от режимов с различными пространственными распределениями амплитуд, отчего и частоты оказываются различными [26,27].

В области $4.9 < L < 6.0$ наблюдается несколько бифуркаций удвоения периода. Однако они, по-видимому, не носят универсального характера, то есть

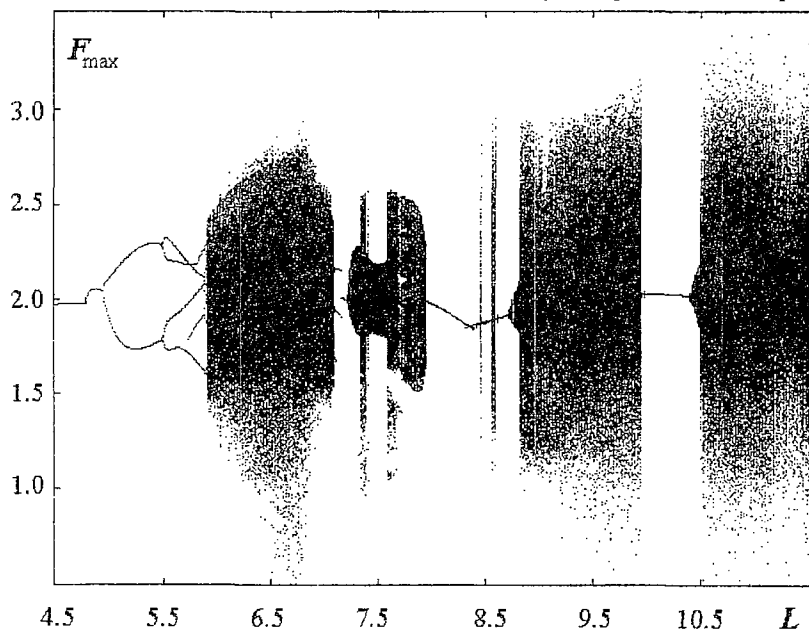


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма простой модели ЛОВ

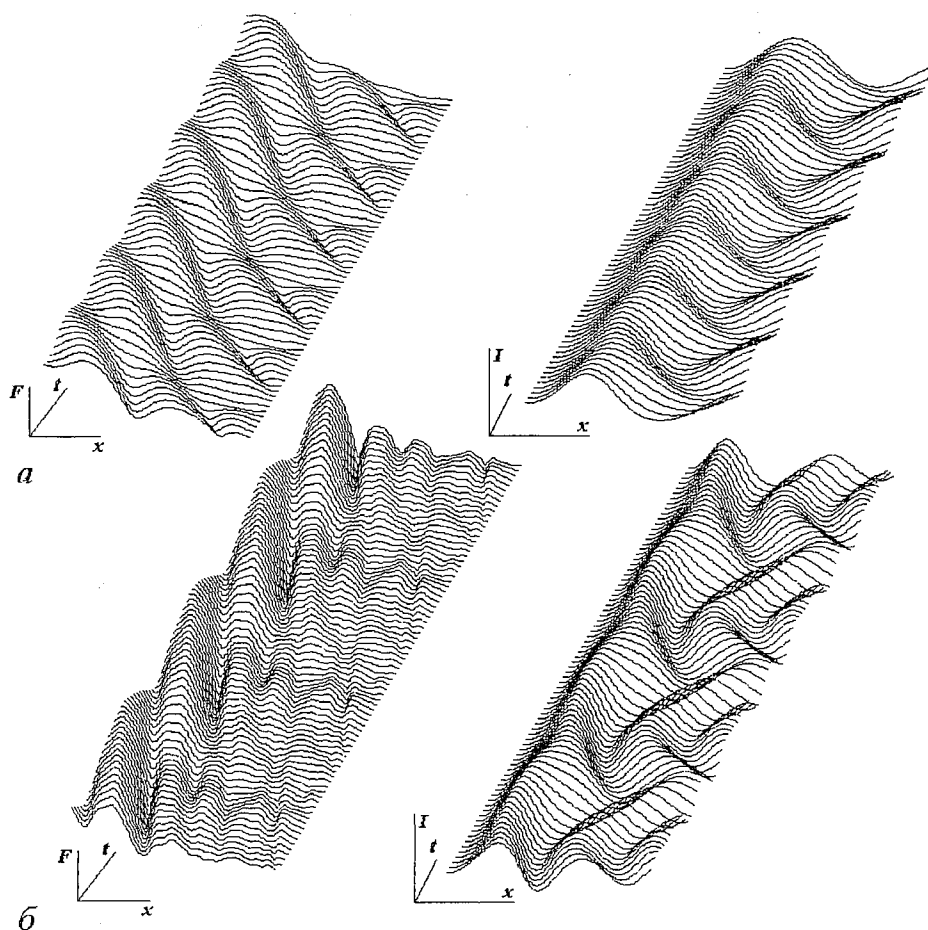


Рис. 6. Картины пространственно-временной динамики поля (слева) и тока (справа) для простой модели ЛОВ в двух режимах периодической автомодуляции: *a* – $L=4.9$; *б* – $L=8.0$

не удастся наблюдать основные закономерности перехода к хаосу по сценарию Фейгенбаума, которые в ЛОВ прослеживаются достаточно четко, хотя и при других значениях параметров [24,25].

Чередование режимов регулярной и хаотической автомодуляции вызвано перестройкой пространственно-временных распределений поля и тока, то есть многократной перегруппировкой электронов. Как видно из рис. 6, *a*, в первой области периодической автомодуляции имеются либо один, либо два максимума тока, причем эти состояния периодически сменяют друг друга. Максимумы и минимумы соответствуют сгусткам, фаза которых отличается на π . Точки, в которых $I(x)=0$, соответствуют полной разгруппировке сгустков. Во второй области (рис. 6, *б*) чередуются состояния с двумя и тремя максимумами. Между ними лежит область, где происходит постепенный переход от одного режима к другому. В этой области состояния с одним-двумя и двумя-тремя максимумами аperiodически сменяют друг друга, а автомодуляция становится хаотической, причем временные реализации выходного сигнала напоминают перемежаемость. Увеличение параметра L приводит к образованию все большего числа сгустков, и, как следствие, к дальнейшему чередованию областей регулярного и хаотического поведения.

3. Модель клистронного автогенератора с запаздыванием

Автомодуляционные явления в РАС, имеющих электронно-волновую природу, как правило, связаны с запаздывающим характером обратной связи,

которая может быть как внешней, так и внутренней. Простейшими моделями такого рода систем являются дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом (см., например, [12,18]). Идея применения уравнений подобного рода для описания динамики резонансных автогенераторов СВЧ-электроники возникла достаточно давно [22,28]. Особый интерес представляет уравнение

$$\dot{A} + \gamma A = 2\alpha J_1(|A(t-\tau)|)A(t-\tau)/|A(t-\tau)|, \quad (13)$$

которое возникает при описании двухрезонаторных генераторов клистронного типа с внешней обратной связью, в частности, пролетного клистрона О-типа и гироклистрона [29,30]. Здесь A – комплексная амплитуда поля в выходном резонаторе, γ – параметр затухания, обратно пропорциональный нагруженной добротности резонатора, α – параметр взаимодействия, аналогичный параметру Пирса в теории приборов О-типа, τ – время запаздывания. Удобно избавиться от параметра τ , производя замену

$$\alpha \rightarrow \alpha\tau, \quad \gamma \rightarrow \gamma\tau, \quad \tau \rightarrow 1.$$

Условия самовозбуждения автоколебаний можно найти из характеристического уравнения, которое имеет вид

$$p + \gamma = \alpha e^{-p}. \quad (14)$$

Анализ уравнения (14) показывает [18,29] наличие бесконечного числа комплексных корней, что соответствует бесконечному числу собственных мод. Поскольку в момент смены характера устойчивости $p=i\omega$, из (14) можно получить

$$\omega/\gamma = -\operatorname{tg}\omega. \quad (15)$$

Корни этого уравнения, для которых $\cos\omega > 0$, определяют частоты, на которых могут возбуждаться колебания. Кроме того, из (14) следует уравнение, из которого можно найти границы зон неустойчивости на плоскости параметров:

$$\arccos(\gamma/\alpha) = -(\alpha^2 - \gamma^2)^{1/2}.$$

Для основной моды условие самовозбуждения имеет простой вид:

$$\alpha > \gamma,$$

а ее частота равна нулю. Это означает, что генерация возникает точно на собственной частоте резонаторов (при выводе уравнения (13) предполагается, что собственные частоты обоих резонаторов одинаковы).

Решения, соответствующие монохроматическим колебаниям на основной моде, имеют вид $A=A_0 \exp(i\phi_0)$, где фаза ϕ_0 произвольна, а амплитуда A_0 находится из уравнения

$$\gamma A_0 = 2\alpha J_1(A_0). \quad (16)$$

Очевидно, что с ростом α число вещественных корней этого уравнения увеличивается (рис. 7). Следовательно, появляются все новые и новые стационарные состояния, то есть даже для колебаний на основной собственной моде будет характерна мультистабильность. Появление новых стационарных режимов обусловлено многократной перегруппировкой электронов. Будем обозначать состояния равновесия как S_n и P_n , причем S_n соответствуют корням уравнения (16), расположенным на возрастающих участках функции Бесселя, а P_n – на падающих. Здесь $n=0,1,\dots$, а общее число корней увеличивается с ростом α . В принятых обозначениях S_0 соответствует тривиальному решению $A_0=0$. Можно

показать, что S_n всегда аperiodически неустойчивы, то есть имеется чисто вещественный положительный корень характеристического уравнения. Состояния равновесия P_n по мере роста α теряют устойчивость в результате бифуркации Хопфа: пара комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения меняет знак вещественной части с отрицательного на положительный, и в окрестности P_n мягко образуется предельный цикл, соответствующий режиму периодической автомодуляции. Частоты, с которыми возникает автомодуляция, по-прежнему находятся из уравнения (15), но теперь уже при условии $\cos\omega < 0$.

Будем называть эти возмущения автомодуляционными модами, поскольку они возбуждаются лишь на фоне автоколебаний на основной моде с большой амплитудой. Частота низшей автомодуляционной моды лежит в пределах $\pi/2 < \omega < \pi$. Как и для модели ЛОВ, рассмотренной в предыдущем разделе, физическая причина возникновения автомодуляции заключается в кинематической разгруппировке сгустков, которая происходит, когда амплитуда колебаний достаточно велика. По терминологии работы [4] такой механизм автомодуляции называется амплитудным.

Рассмотрим последовательность бифуркаций, наблюдаемых в численном эксперименте по мере увеличения α при постоянном γ (то есть по мере увеличения тока электронного пучка). При $\alpha > \gamma$ происходит самовозбуждение колебаний на основной моде. При небольшой надкритичности переходный процесс завершается установлением стационарного режима, который соответствует состоянию равновесия P_0 . Когда α превышает некоторое критическое значение, стационарный режим мягко теряет устойчивость и происходит возбуждение первой автомодуляционной моды. Частота возникающей автомодуляции совпадает с найденной из уравнения (15) и при малых γ близка к $\pi/2$. Отметим, что нас интересовала, главным образом, область небольших γ , где автомодуляционные колебания являются квазигармоническими (при $\gamma > 1$ они носят релаксационный характер).

На рис. 8 приведены проекции фазовых портретов, восстановленных по методу Паккарда – Такенса, для различных автомодуляционных режимов при $\gamma = 0.1$, а также проекции состояний равновесия S_n и P_n . Периодической автомодуляции в фазовом пространстве соответствует предельный цикл (рис. 8, а). С ростом α он увеличивается в размерах и искажается (рис. 8, б), а частота автомодуляции уменьшается. На предельном цикле образуются петли, и соответственно, происходит усложнение временной реализации выходного сигнала: в течение одного периода колебаний наблюдается несколько локальных максимумов. Такое поведение связано с приближением фазовой траектории к седловому состоянию равновесия S_1 . Существуют циклы с различным количеством петель (рис. 8, в), причем переход от одного цикла к другому в зависимости от параметра γ может происходить как мягко, так и жестко. В области жестких переходов наблюдается мультистабильность: в зависимости от начальных условий фазовая траектория может притягиваться к тому или иному циклу.

С ростом параметра α на фоне описанных процессов трансформации предельных циклов происходит переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума, что

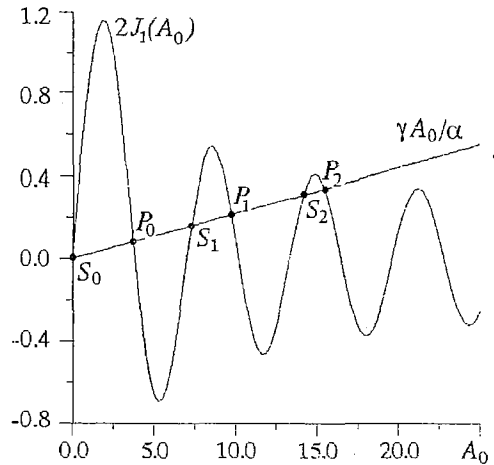


Рис. 7. К анализу стационарных решений уравнения (13)

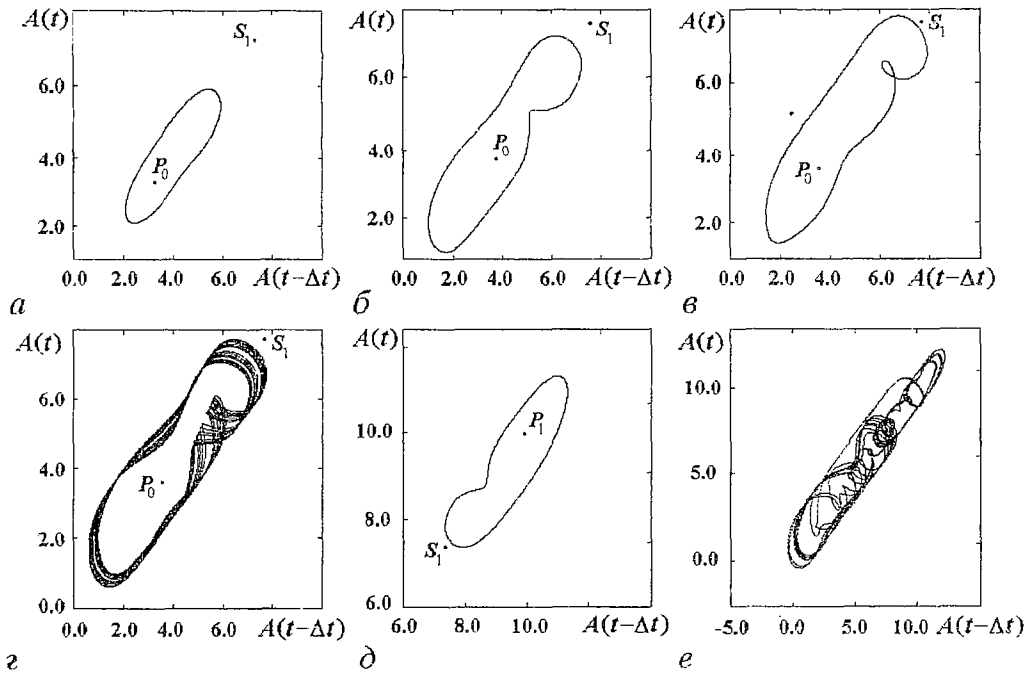


Рис. 8. Фазовые портреты для простой модели клистронного автогенератора с запаздыванием в различных автомодуляционных режимах при $\gamma=0.1$: а - $\alpha=3.0$; б - $\alpha=4.5$; в - $\alpha=4.8$; г - $\alpha=5.1$; д - $\alpha=5.6$; е - $\alpha=7.5$

типично для нелинейной динамики систем с запаздыванием при амплитудном механизме автомодуляции [4,5]. Проекция странного аттрактора приведена на рис. 8, з.

По мере дальнейшего увеличения α появляется еще одно состояние равновесия P_1 . Таким образом, за порогом возникновения автомодуляции возможно жесткое возбуждение стационарных колебаний со значительно большей амплитудой. Для этого амплитуда начального возмущения должна быть достаточно велика. Далее P_1 , в свою очередь, теряет устойчивость в результате автомодуляции. В некоторой области параметров аттракторы, сформировавшиеся на базе P_0 и P_1 , сосуществуют. Поскольку с ростом α размеры аттракторов увеличиваются, происходит их столкновение, в результате которого странный аттрактор теряет устойчивость и превращается в метастабильное хаотическое множество. После нерегулярного переходного процесса, который может быть довольно длительным, происходит переход к периодической автомодуляции на базе P_1 (рис. 8, д). Затем происходит образование объединенного странного аттрактора, когда проекция фазовой траектории охватывает как состояние равновесия P_0 , так и P_1 (рис. 8, е). При этом временная реализация напоминает перемежаемость и состоит из участков, соответствующих двум различным типам движения, чередующихся случайным образом. На рис. 9 представлена бифуркационная диаграмма при $\gamma=0.1$, на которой видны область перехода к хаосу по сценарию Фейгенбаума, жесткий переход между автомодуляционными режимами на базе различных циклов, переход к периодической автомодуляции на базе P_1 и последующее объединение аттракторов.

Дальнейшая трансформация колебательных режимов обусловлена появлением все новых и новых состояний равновесия P_n и носит аналогичный характер. Наблюдается последовательная смена регулярных и хаотических режимов автомодуляции, описанная ранее в [30]. Здесь следует отметить очевидную аналогию с моделью лампы обратной волны, которая рассматривалась

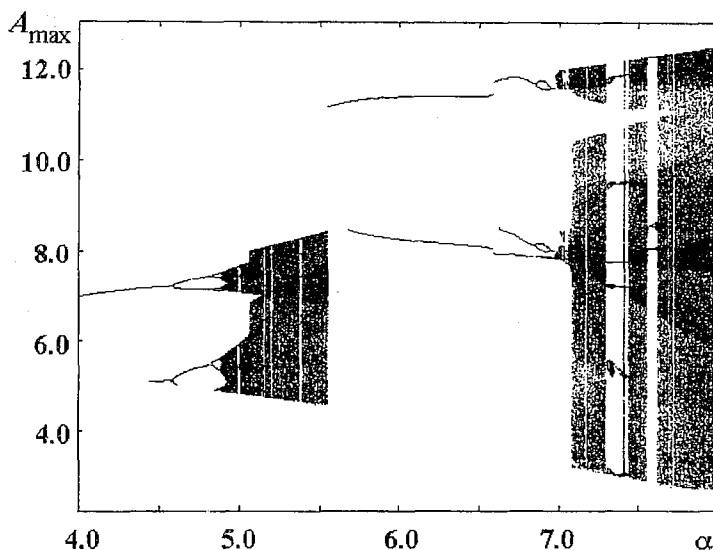


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма простой модели автогенератора клистронного типа с запаздыванием при $\gamma=0.1$

в предыдущем разделе. Важно также подчеркнуть, что, несмотря на появление все большего числа неустойчивых собственных мод с увеличением α , в результате конкуренции происходит подавление высших мод основной. Вклад высших мод выражается лишь в усложнении начальной стадии переходного процесса. Когда амплитуда основной моды достигает достаточно большой величины, происходит возбуждение первой автомодуляционной моды. Именно эти моды участвуют в организации сложной динамики. Впрочем, при больших γ наблюдаются жесткие переходы к режимам на базе других автомодуляционных мод, характерные для многих систем с запаздыванием (см. [18,31]).

Заключение

Нелинейная динамика РАС, рассматриваемых в настоящей работе, обнаруживает некоторые общие черты. Прежде всего, несмотря на то, что все эти модели имеют бесконечное число степеней свободы, основную роль, по-видимому, играет лишь небольшое число мод. Численное моделирование показывает, что по мере увеличения бифуркационного параметра, определяющего степень неравновесности (обычно он пропорционален току электронного пучка), происходит последовательная смена режимов регулярной и хаотической автомодуляции. Появляются новые устойчивые периодические движения, которые затем теряют устойчивость и поглощаются странным аттрактором. Поэтому временные реализации выходного сигнала напоминают перемежаемость. Подобное поведение обусловлено многократной перегруппировкой электронов в сильном поле, то есть, фактически, конкуренцией возникающих пространственно-временных структур. Важно, что аналогичное поведение характерно для многих приборов СВЧ-электроники. Особенно наглядно проявляется сходство с динамикой генератора с виртуальным катодом, где возникновение хаотических колебаний объясняется образованием нескольких взаимодействующих структур – электронных сгустков [7].

Таким образом, проведенное в данной работе исследование простых модельных систем помогает выявить универсальные закономерности сложной динамики РАС, имеющих электронно-волновую природу.

Авторы благодарны С.П. Кузнецову за обсуждение некоторых результатов работы и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-02-16541) и программы «Университеты России – фундаментальные исследования» (грант № 282).

Библиографический список

1. Трубецков Д.И., Четвериков А.П. Автоколебания в распределенных системах электронный поток – встречная (обратная) электромагнитная волна // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 9.
2. Гинзбург Н.С., Петелин М.И. Конкуренция и кооперация мод в лазерах на свободных электронах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 6. С. 3.
3. Antonsen T.M., Levush B. Mode competition and suppression in free electron laser oscillators // Phys. Fluids B. 1989. Vol. 1, № 5. P. 1097.
4. Блюх Ю.П., Бородин А.В., Любарский М.Г., Онищенко И.Н., Файнберг Я.Б. Применение метода функционального отображения для исследования ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1–2. С. 34.
5. Блюх Ю.П., Любарский М.Г., Подобинский В.О., Файнберг Я.Б. Исследование механизмов стохастизации секционированных пучковых СВЧ-генераторов // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 7–8. С. 718.
6. Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е. Сложное поведение электронного потока с виртуальным катодом и генерация хаотических сигналов в виртуальных системах // Изв. РАН. Сер. физ. 1997. Т. 61, № 12. С. 2391.
7. Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е. К вопросу о механизме возникновения хаотической динамики в вакуумном СВЧ-генераторе на виртуальном катоде // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 9. С. 1137.
8. Блюх Ю.П., Любарский М.Г., Митин Л.А., Переводчиков В.И., Подобинский В.О., Файнберг Я.Б. Исследование механизмов стохастизации сигнала пучково-плазменного СВЧ-генератора // Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 7–8. С. 747.
9. Четвериков А.П. Периодические и хаотические автоколебания в простых распределенных электронно-волновых системах // Изв. РАН. Сер. физ. 1994. Т. 58, № 8. С. 172.
10. Четвериков А.П. Нелинейная динамика системы взаимодействующих встречных электромагнитной волны и электронной волны с кубичной фазовой нелинейностью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 46.
11. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
12. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
13. Бурлак Г.Н., Ийикабулов К. Уединенные волны и управляемый динамический хаос при параметрическом взаимодействии // ЖЭТФ. 1996. Т. 109, № 3. С. 774.
14. Гинзбург Н.С., Сергеев А.С. Периодическая и стохастическая автомодуляция излучения в лазере на свободных электронах, основанном на вынужденном встречном рассеянии волн // РЭ. 1988. Т. 33, № 3. С. 580.
15. Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Петелин М.И. Нелинейная теория вынужденного рассеяния волн на релятивистских электронных пучках // ЖЭТФ. 1979. Т. 76, № 3. С. 930.
16. Дмитриева Т.В., Рыскин Н.М. Сложная динамика и хаос при параметрическом взаимодействии встречных волн // ЖЭТФ. 1999. Т. 116, № 5. С. 1871.
17. Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В.Н. Шевчика и Д.И. Трубецкова. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1978.
18. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.

19. Пиковский А.С., Рабинович М.И., Трахтенгерц В.Ю. Возникновение стохастичности при распадном ограничении параметрической неустойчивости // ЖЭТФ. 1978. Т. 74, № 4. С. 1366.

20. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // УМН. 1983. Т. 38, № 4. С. 133.

21. Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Нестационарные нелинейные явления при взаимодействии электронного потока, движущегося в скрещенных полях, с обратной электромагнитной волной // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20, № 2. С. 300.

22. Кузнецов С.П. Теоретические методы для анализа нестационарных явлений в некоторых распределенных автоколебательных системах типа электронный поток – электромагнитная волна: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук / СГУ. Саратов, 1977.

23. Шевчик В.Н. Основы электроники сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1959.

24. Рыскин Н.М., Титов В.Н., Трубецков Д.И. Детали перехода к хаосу в системе электронный пучок – обратная электромагнитная волна // ДАН. 1998. Т. 358, № 5. С. 620.

25. Рыскин Н.М., Титов В.Н. О сценарии перехода к хаосу в однопараметрической модели лампы обратной волны // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 1. С. 75.

26. Рыскин Н.М., Титов В.Н. Исследование автомодуляционных режимов колебаний в релятивистской лампе обратной волны // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 6. С. 566.

27. Трубецков Д.И., Анфиногентов В.Г., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Храмов А.Е. Сложная динамика электронных приборов СВЧ (нелинейная нестационарная теория с позиций нелинейной динамики) // Радиотехника. 1999. № 4. С. 61.

28. Кузнецов С.П. Применение математического аппарата теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом к некоторым задачам электроники СВЧ // Лекции по электронике СВЧ. 3-я зимняя школа-семинар инженеров. Кн. 1. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974. С. 112.

29. Ергаков В.С., Моисеев М.А. Двухрезонаторный генератор с запаздывающей обратной связью // РЭ. 1986. Т. 31, № 5. С. 962.

30. Афанасьева В.В., Лазерсон А.Г. Динамический хаос в двухрезонаторных клистронных автогенераторах с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 5. С. 88.

31. Ikeda K., Dadio H., Akimoto O. Successive higher-harmonic bifurcations in system with delayed feedback // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49, № 20. P. 709.

Высший колледж прикладных наук
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 1.09.99
после доработки 12.11.99

COMPLEX DYNAMICS OF SIMPLE MODELS OF EXTENDED ELECTRON-WAVE SYSTEMS

T.V. Dmitrieva, N.M. Ryskin, V.N. Titov, A.M. Shigaev

Complex dynamics of some spatially-extended self-oscillating systems, that can be treated as the simple models of vacuum microwave electron devices, is studied. The model of parametric interaction of counter-propagating waves, models of interaction of counter-propagating waves with positive and negative energies, and the model of klystron-type oscillator with delayed feedback are considered. The application of results obtained for explanation of peculiarities of complex dynamics of some microwave electron devices is discussed.



Дмитриева Татьяна Владимировна – родилась в 1980 году. Студентка 3-го курса Высшего колледжа прикладных наук при Саратовском университете. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных автоколебательных систем.



Рыскин Никита Михайлович – родился в 1966 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского университета (1991). Работал в НИИ механики и физики СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика в СГУ (1996). Доцент Высшего колледжа прикладных наук СГУ. Область научных интересов – нелинейные явления в распределенных системах, содержащих электронные потоки и электромагнитные поля, вакуумная микроэлектроника. Автор и соавтор более 45 научных работ.



Титов Владимир Николаевич – родился в 1974 году в рабочем поселке Степное Саратовской области. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1997). Аспирант кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов: динамический хаос в распределенных системах, электронные приборы СВЧ с длительным взаимодействием.



Шигаев Андрей Михайлович – родился в 1981 году. Студент 3-го курса Высшего колледжа прикладных наук при Саратовском университете. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных автоколебательных систем.