Изв.вузов «ПНД», т.7, № 6, 1999

УДК 537.8(09)

ОСОБЕННОСТИ МАКСВЕЛЛОВСКОГО «ТРАКТАТА ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ И МАГНЕТИЗМЕ» И ПРИНЦИПЫ НАУЧНОГО ПЕРЕВОДА*

М.Л. Левин, М.А. Миллер, Е.В. Суворов

5. Уравнения поля

«Теория Максвелла – это уравнения Максвелла». Эта часто цитируемая оценка принадлежит Герцу. В ней есть лозунговая экстремальность – она выставляет независимость ценности правильного результата от поисковых блужданий. Конечно, в «Трактате» обсуждается еще и множество разнообразнейших проблем разной степени важности и общности, но уравнения электродинамики, несомненно, являют собой их кульминацию. Фактически уравнения были найдены задолго до первого издания «Трактата» и опубликованы в 1861–1862 годах. Но это не ослабляет волнения, охватывающего при знакомстве с ними в «Трактате», наверное, из–за возможности следовать шаг за шагом максвелловским путем приближения к ним.

К счастью, Максвелл избежал участи некоторых других первооткрывателей – ему не пришлось бороться за приоритет. Уравнения были неожиданны и не сразу поняты. Многие другие исследователи, занятые аналогичными делами, т. е. развивающие свои варианты теории, не восприняли достижения Максвелла как решающие и тем более как завершающие. Одной из причин, наверное, было привлечение образной, фарадеевского толка аргументации, о чем уже несколько раз говорилось выше. Это отпугивало, по крайней мере, некоторых континентальных физиков. Как ни странно, но такая территориальная поляризация наблюдалась на самом деле: немецкая и французская наука была более привержена рассудочному, аналитическому способу познания, чем британская, тяготевшая к образным, геометрическим методам. И шло это традиционно еще со времен Великого Противостояния дифференциалов Лейбница и флюксий Ньютона. Вообще написанные Максвеллом уравнения показались «конкурентам» неубедительными и неубедительно обоснованными. И они не приняли их за фундаментальные исходные законы, по существу, не нуждающиеся в почленной аргументации и не подлежащие выводу из иерархически более элементарных (такая потребность возникла позже, в процессе создания квантовой теории поля).

---

* Окончание. Начало см. Изв. вузов «ПНД», т. 7, № 5, 1999. С. 97.

Другими причинами были, видимо, изобилие этих уравнений, непривычный их облик и еще неполная очищенность от некоторых частностей (подробности чуть позже). Максвелл писал: «Эти соотношения можно считать основополагающими. Их можно было бы скомбинировать так, чтобы исключить некоторые из величин. Однако наша задача сейчас состоит не в получении компактных математических формул, а в написании выражения для каждого соотношения, о котором мы что–либо знаем. На этой стадии исследования исключение любой величины, отражающей полезную идею, было бы скорее потерей, чем выигрышем».

Представленная Максвеллом итоговая система уравнений (а в ней присутствовали уравнения и для полей, и для потенциалов, и материальные связи, и выражения для сил) была внутренне непротиворечива, так что решение вопроса об излишествах действительно отступало на второй план: все это уладилось позже при формулировке и доказательстве теорем единственности (и существования, конечно). Первостепеннее стояла проблема полноты и замкнутости (и достоверности, конечно). По этому поводу Максвелл не позволил себе высказывать какие–либо общие сентенции, но привел несколько простейших решений для предъявления экспериментаторам. Как мы знаем, все контрольные эффекты, предложенные самим Максвеллом (а также несколькими поколениями исследователей позже), прошли обоснованную экспериментальную экспертизу в том смысле, что были подтверждены в пределах точности, с которой макроскопическая электродинамика оказалась вообще справедливой.

Далее мы проведем сопоставление сводных уравнений электродинамики, содержащихся в «Трактате», с уравнениями Максвелла в их современном представлении. Для этого воспроизведем формульную часть «Кватернионных выражений для электромагнитных уравнений» и рядом с каждой трактатной формой поместим соответствующее ей выражение в обозначениях, принятых теперь с использованием гауссовой системы единиц.

Уравнение для магнитной индукции:

$$\mathfrak{B} = V{\bullet}\nabla\mathfrak{A}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}, \qquad \text{(A)}$$

B – магнитная индукция, **A** – вектор–потенциал (электрический).

Уравнения для электродвижущей напряженности:

$$\mathfrak{E} = V{\bullet}\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi,$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c}\,\mathbf{u}\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{t}} - \nabla\varphi, \qquad \text{(B)}$$

E – напряженность электрического поля, φ – скалярный потенциал (электрический), **u** – скорость контура или системы отсчета, *c* – скорость света в вакууме.

Уравнение для механической силы:

$$\mathfrak{F} = V{\bullet}\mathfrak{G}\mathfrak{B} + e\mathfrak{E} - m\nabla\Omega,$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\,\mathbf{j}_{\text{пол}}{}^{e} \times \mathbf{B} + \rho^{e}\mathbf{E} - \rho^{m}\nabla\Psi, \qquad \text{(C)}$$

f – объемная плотность силы, $\mathbf{j}_{\text{пол}}{}^{e}=\mathbf{j}_{\text{пр}}{}^{e}+\mathbf{j}_{\text{см}}{}^{e}$ – плотность полного (истинного) электрического тока, $\mathbf{j}_{\text{пр}}{}^{e}$ – плотность тока проводимости, $\mathbf{j}_{\text{см}}{}^{e}$ – плотность тока смещения, ρ^{e} – плотность электрического заряда, ρ^{m} – плотность магнитного заряда, Ψ – скалярный потенциал (магнитный).

Уравнение для намагничения:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \tag{D}$$

B – магнитная индукция, **H** – напряженность магнитного поля, **M** – вектор намагничения.

Уравнение для электрических токов:

$$4\pi\mathfrak{G} = V\bullet\nabla\mathfrak{H},$$

$$\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{пол}}{}^{e} = \nabla\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{H}. \tag{E}$$

Уравнение для токов проводимости:

$$\mathfrak{K} = c\mathfrak{E}$$

$$\mathbf{j}_{\text{пр}}{}^{e} = \sigma\mathbf{E}, \tag{G}$$

где – σ проводимость среды.

Уравнение для электрического смещения:

$$\mathfrak{D} = -\frac{1}{4\pi}k\mathfrak{E},$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{α}$$

ε – диэлектрическая проницаемость.

Уравнение для истинного тока:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K} + \mathfrak{D} = (c + \frac{1}{4\pi}k)\mathfrak{E}, \tag{H}$$

$$\mathbf{j}_{\text{пол}}{}^{e} = \mathbf{j}_{\text{пр}}{}^{e} + \mathbf{j}_{\text{см}}{}^{e} = (\sigma = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t})\mathbf{E}. \tag{I}$$

Уравнение для электрической объемной плотности:

$$\mathfrak{e} = S\bullet\nabla\mathfrak{D},$$

$$4\pi\rho^{e} = \nabla\bullet\mathbf{D} = \mathrm{div}\,\mathbf{D}. \tag{J}$$

Уравнение для электрической поверхностной плотности $\rho_{\text{пов}}{}^{e}$:

$$4\pi\rho_{\text{пов}}{}^{e} = \mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1), \tag{K}$$

$\mathbf{n}_{12}$ – нормаль к поверхности из среды 1 в среду 2.

Уравнение для намагничения:

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H},$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{L}$$

μ – магнитная проницаемость.

Уравнение для магнитной плотности:

$$\mathfrak{m} = S \bullet \nabla \mathfrak{J},$$

$$\rho^{m} = -\nabla \bullet \mathbf{M} = -\operatorname{div}\mathbf{M}. \qquad (\beta)$$

Уравнение для магнитной силы (когда rot **H** = 0):

$$\mathfrak{H} = -\nabla\Omega,$$

$$\mathbf{H} = -\nabla\Psi. \qquad (\gamma)$$

Итак, перед нами совокупность сводных уравнений (А)–(γ), и мы в состоянии оценить их совершенство и правильность с позиций нашего понимания. Вообще говоря, она отличается от системы, впоследствии канонизированной как системы уравнений Максвелла. Но за малыми исключениями отличия скорее методические, а не принципиальные. Прежде всего, совокупность (А)–(γ) по-другому организована, и в этом, и в некоторых ее деталях еще проглядываются следы моделей, принимавших участие в процессе поиска. Это те самые строительные леса, отмеченные ранее Максвеллом – с признательностью за оставление их – в трудах Фарадея, и выходит, что по недосмотру сохраненные теперь им самим. Кроме того, при перегруженности системы (А)–(γ) в ней есть известная незавершенность: в частности, не проведено несколько «напрашивающихся» обобщений, даже из числа уже подготовленных и обсужденных в тексте. И мы обязаны Дж. Дж. Томсону, Г. Герцу, О. Хевисайду и Х. Лоренцу тем, что именно они оказались доброжелательно вдумчивыми последователями, сумевшими первыми осознать непреходящее значение этих уравнений и довести их до того общего по смыслу и изящного по форме состояния, которое в наше время принимается за образец физической теории.

Опуская промежуточные этапы и мотивировки действий, приведем систему уравнений Максвелла в ее усовершенствованном представлении. Потом были предложены, возможно, более удачные (в отношении компоновки, объединения, обобщения, классификации по типам симметрии и инвариантности и т. п.) варианты записи, но данная форма (лишь слегка подправленная позже) остается и по сей день одной из наиболее употребительных:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{пр}}^{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad (3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho^{e}, \qquad (4)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mathbf{j}^{e} = \sigma\mathbf{E}^{e}, \qquad (5)$$

$$\mathbf{f}_{\text{мех}} = \rho^{e}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}_{\text{пр}}^{e}\times\mathbf{B}. \qquad (6)$$

Причем даже порядок расстановки уравнений настолько прижился, что в «определенных кругах» (кастовость тут тоже регламентируется научным происхождением) часто говорят, «как следует из первого, второго, и т. д. уравнения Максвелла», считая, видимо, перенумерацию отступничеством от Заветов Учителя, хотя легко усмотреть из сравнения (А)–(γ) с (1)–(6), что все это дело рук Апостолов, а не Его Самого.

Сейчас принимается такая классификация. Уравнения (1)–(4) – собственно уравнения электромагнитного поля. Уравнения (5) – материальные уравнения (в их простейшей разновидности – линейная изотропная среда с локальными и мгновенными взаимодействиями – без дисперсии). Сторонние поля $\mathbf{E}_{стор}$ могут быть включены в (5) или вставлены прямо в (1)–(4). Уравнение (6) выражает силу, действующую на свободные заряды и токи; через него осуществляется метрологическая связь с полями другой природы (механикой, гравитацией). Иногда (6) заменяется законом сохранения энергии, но тогда приходится делать оговорки, преждевременные на стадии постулирования общих законов движения.

Уравнения для полей (1)–(4) разбиваются на две пары: (1) и (4) выражают поля через их источники – электрические заряды и токи, а (2) и (3) источников не содержат, это автономная пара уравнений, определяющая связь между **E** и **B**, причем универсально, вне зависимости от материальных соотношений и от свойств источников. Так вот, источниковые уравнения (1) и (4) написаны Максвеллом сразу в «окончательном виде», принятом потом. Это, соответственно, (*E*) и (*J*). В них скрыто содержится и уравнение непрерывности для токов проводимости (или конвекции)

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^e + \frac{\partial\rho^e}{\partial t} = 0. \qquad (7)$$

Его Максвелл не вставляет в эту совокупность, что не означает, однако, что он не относит его к числу основополагающих. Более того, отсутствие в системе (A)–(γ) уравнения непрерывности, возможно, даже обусловлено вполне последовательными доводами: Максвелл считал его более общим, так сказать, надэлектродинамическим законом природы.

Другая автономная пара (2) и (3) представлена в «Трактате» иначе. Во-первых, Максвелл ввел в (B) проводящий контур, движущийся со скоростью **u** относительно других неподвижных элементов системы (среды), что позволило ему установить (так сказать, попутно, заодно) закон преобразования полей при переходе в движущуюся (инерциальную) систему отсчета (в нерелятивистском приближении, однако). Это и есть остаточный след модели. Его легко устранить, положив **u**=0 (редкая ситуация, когда частный случай инициирует более общие соотношения!). Во-вторых, Максвелл не прибегнул к форме (2), (3), а как бы, опустив ее (возможно, даже и не заметив этого), сразу выдал решение: уравнения (2), (3) тождественно удовлетворяются, если представить **E** и **B** через потенциалы **A**, φ, рассматриваемые пока как произвольные функции координат и времени:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \Delta\varphi,$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \qquad (8)$$

При **u**=0 (8) точно совпадают с (A) и (B). Фактически Максвелл вышел на соотношения (8) путем последовательных обобщений разных модельных ситуаций. Но тем сильнее, как нам кажется, мы должны проникнуться чувством преклонения перед таинственной силой (в смысле мощи интуиции) Великого Ума: Максвелл нашел функциональное решение уравнений, минуя сами уравнения, причем нашел в самом общем виде, и вдобавок в таком, который подсказал еще один, иной и по-иному содержательный подход к описанию электромагнитных полей вообще. Уравнения (2), (3) были явно выписаны О. Хевисайдом, и Дж. Дж. Томсон успел вставить их в примечания к 3-му изданию «Трактата».

Конечно, уравнения (1)–(4) и их прообразы в «Трактате» предполагают дифференцируемость всех встречающихся в них полей. Правда, каждому дифференциальному уравнению может быть поставлено в соответствие интегральное уравнение, где это ограничение на поля снимается. Максвелл отводил такому описанию (как уже отмечалось, обладающему большим сродством с полевыми представлениями Фарадея) важную роль в формировании науки, посвященной топологии векторных (а затем уже и тензорных любого ранга) полей (в отношении полей электромагнитных в этом деле еще и сейчас есть изрядные недоработки). Но, несмотря на большую общность, в сводном перечне уравнений в «Трактате» интегральная запись не фигурирует, а должные замечания по этому поводу рассеяны по разным разделам текста. Пока еще Максвелл искал принципиально правильные связи и только после получения доказательств их правильности должен был возникнуть следующий вопрос – установление наиболее общих правильных связей. А аппарат для решения этого вопроса был уже наготове. Более того, он включил в основную совокупность уравнений соотношение (K), которое мы интерпретируем сейчас как граничное условие – условие, определяющее закон перехода полей (в данном случае нормальных компонент D) через границу раздела сред (в данном случае через заряженную поверхность) и которое, строго говоря, вытекает из интегрального соотношения, обобщающего (4):

$$\oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = 4\pi \int \rho dV,$$

где замкнутая поверхность S охватывает весь объем V. Таким образом, можно думать, что Максвелл временно отложил обсуждение вопроса о справедливости общих интегральных уравнений для электромагнитных полей, и соответственно об общих условиях скачкообразного или непрерывного перехода разных компонент разных полей через резкие границы раздела сред.

Вторая группа уравнений, представляющая материальные связи, фактически не подвергалась никаким изменениям и выглядит вполне по–современному: (5) совпадает с (α), (L), (G) с точностью до обозначений. При этом Максвелл не ставил целью установление каких–то общих связей, ограничившись простейшими. Чуть позже он расширит возможные свойства сред, включив анизотропию (зависимость от направления) и оговорив дисперсию (зависимость от частоты). Важно отметить, что в этом простейшем наборе связей не сделано ни опущений, ни излишеств, а названо ровно столько соотношений, сколько необходимо для замыкания всей системы уравнений. Проблема замыкания и в наше время доставляет кое–какие беспокойства, так как для различных способов описания электромагнитных полей требуются разные независимые функции, причем одни из них могут быть вспомогательными («скрытыми от измерений»), а другие физически адекватными измеряемым величинам. Система (1)–(4) содержит 3x5=15 скалярных величин, подлежащих определению; это компоненты векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}^e$ (заряд ρ^e всюду, кроме идеальной электростатики, находится по известному распределению токов $\mathbf{j}^e$). Попарные подсистемы (2), (3) и (1), (4) налагают каждая только по три (а не четыре!) связи на искомые векторы. В самом деле, из (2)–(3) шесть компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ выражаются через три компоненты $\mathbf{A}$ и скаляр φ, но последние благодаря градиентной инвариантности еще допускают введение одной скалярной функции f, которой можно распорядиться произвольным образом. Напомним, что градиентной (или калибровочной) инвариантностью называется независимость векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ относительно преобразования потенциалов

$$\mathbf{A}' \to \mathbf{A} - \Delta f, \qquad \varphi' \to \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{9}$$

В результате система (1)–(4), содержащая 15 скалярных величин, фактически производит только шесть независимых ограничений первого порядка. И следовательно, для ее замыкания требуется еще девять связей: как раз именно столько выдают материальные соотношения (5).

Обращение к потенциалам, заметим, оказалось и здесь – при оценке условий замыкания системы уравнений поля – продуктивной необходимостью, так как без максвелловского представления (8) вряд ли возможно было установить инвариантное преобразование (9). В таком явном, окончательно оформленном виде оно не встречается в «Трактате», хотя в процессе выхода на уравнения (8) Максвелл неоднократно обсуждает вопросы о неоднозначности введения скалярного и векторных потенциалов порознь.

Осталось обсудить наиболее трудное место, связанное с выводом выражения для механической силы (C). То, что в (C) наряду с членом, описывающим силу, действующую на токи, входит одновременно еще и член, соответствующий силе, действующей на фиктивные магнитные заряды, с помощью которых можно заменить (с известными оговорками) действие замкнутых токов, не должно приводить к недоразумениям: нужные пояснения сделаны в соответствующих параграфах «Трактата», относящихся к магнитостатике. Но обобщение равноправности такого подхода на произвольно текущие во времени процессы требует все же некоторых дополнений.

Поскольку магнитные заряды рассматриваются как вспомогательные величины, вводимые ради методических удобств, то не имеет смысла говорить и о плотности механической силы, действующей на них со стороны поля, как о величине физически измеряемой, однако можно утверждать, что суммарная (интегральная) сила, действующая на всю систему токов проводимости, будет совпадать с силой, действующей на эквивалентные им магнитные листы. Причем если в силе, действующей на токи, фигурирует вектор магнитной индукции, то в силе, действующей на магнитные заряды, «занят» вектор напряженности магнитного поля **H**. По существу, это равносильно тому, что, так сказать, «будущий» принцип двойственности, т. е. принцип инвариантности уравнений поля относительно дуальной замены $\mathbf{E}\to\mathbf{H}$, $\mathbf{H}\to-\mathbf{E}$, $\rho^e\to\rho^m$, $\mathbf{j}^e\to\mathbf{j}^m$, $\rho^m\to-\rho^e$, $\mathbf{j}^m\to-\mathbf{j}^e$, справедлив также и в своем силовом проявлении. Остается ли такая дуальность справедливой при воздействии на «реальные» магнитные монополи, если таковые все-таки будут найдены в природе, по-видимому, нельзя разрешить внутри собственно максвелловской электродинамики, а в прогностических теориях неоспариваемой ясности нет вплоть до настоящего времени.

Однако дуальность заведомо должна быть соблюдена при чисто абстрактном использовании магнитных зарядов, основанном на переопределении токовых источников поля по правилам (β): $\rho^m=-\mathrm{div}\mathbf{M}$, где **M** – вектор намагничения, отыскиваемый как одно из возможных решений интегрального уравнения вида

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\int_V \mathbf{j}_{\text{пр}}{}^e \times \mathbf{r}\,dV = \int_V \mathbf{M}\,dV,$$

что отвечает двум рецептам введения магнитного момента: для системы токов и для системы зарядов.

Таким образом, в выражении (C) нет излишеств, но приведено одновременно два выражения для силы, действующей на токи или на магнитные заряды в зависимости от предпочитаемого описания фактических источников магнитного поля. Однако, строго говоря, при зарядовом описании в уравнение (C) должен быть введен еще один член, связанный с появлением магнитных токов. Действительно, по смыслу введения магнитных зарядов в уравнения поля как источников этого поля (фиктивных или реальных) они должны удовлетворять закону сохранения, и, значит, любое изменение во времени плотности ρ^m сопровождается подтеканием или оттеканием магнитного тока (фиктивного или реального) с плотностью j^m:

$$\mathrm{div}\mathbf{j}^m = -\frac{\partial\rho^m}{\partial t}. \qquad (10)$$

Уравнение непрерывности (10) двойственно ($\mathbf{j}^e\to\mathbf{j}^m$, $\rho^e\to\rho^m$) уравнению непрерывности (7). И потому последовательный учет принципа двойственности в задаче о механическом действии электромагнитного поля на источники (строго говоря, конечно, на «носители источников») должен в общем случае дополнить (C) членом $(1/c)\mathbf{j}^m\times\mathbf{D}$.

И, наконец, последнее замечание, также относящееся к выражению (С). В той части силы, которая определяет воздействие поля на токи (строго говоря, конечно, на носители токов), Максвелл оперирует не с током проводимости, а с истинным током, дополнительно содержащим еще и ток смещения. Это отличает соотношение (С) от используемого нами теперь. Разница обусловлена несколько иным определением понятия силы (во–первых) и отсутствием еще одного члена, двойственного члену с электрическим током смещения (во–вторых). Поскольку вопрос представляет не только исторический интерес, остановимся на нем подробнее. Без ущемления сути дела в целях сокращения формул положим сразу $\varepsilon=1$, $\mu=1$, т. е. будем рассматривать силы, действующие на заряды и токи в вакууме.

Закон сохранения импульса в этом случае принимает вид

$$\operatorname{div} \overleftrightarrow{T} - \partial \mathbf{g}/\partial t = \mathbf{f}_{\text{мех}},$$

где

$$\mathbf{f}_{\text{мех}} = \rho^e \mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{j}_{\text{пр}}{}^e \times \mathbf{H}, \qquad \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H},$$

$$\overleftrightarrow{T} \to T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta) - \frac{1}{8\pi}\,\delta_{\alpha\beta}\,(E^2 + H^2).$$

Здесь $\mathbf{g}$ – плотность электромагнитного импульса, $T_{\alpha\beta}$ – тензор напряжения, дающий поток импульса (втекающий, а не вытекающий) внутрь объема, где находятся источники, отсюда и различие в знаках по сравнению с обычной записью законов сохранения. Соотношение (11) может быть переписано в несколько ином виде, если ввести понятие «обобщенной» силы, включающей в себя наряду с обычной механической (по нашей терминологии – лоренцевой) силой еще и изменение электромагнитного импульса

$$\operatorname{div} \overleftrightarrow{T} = \mathbf{f}_\Sigma = \mathbf{f}_{\text{мех}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \rho^e \mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{j}_{\text{пр}}{}^e \times \mathbf{H} + \frac{1}{c}\,\mathbf{j}_{\text{см}}{}^e \times \mathbf{H} + \frac{1}{4\pi c}\,\mathbf{E}\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{12}$$

Сравнивая выражение для $\mathbf{f}_\Sigma$ в (12) с максвелловской формулой (С) (где для однозначности подхода нужно сразу же положить $\rho^m=0$), нетрудно обнаружить, что они отличаются только наличием дополнительного члена в (12)

$$\frac{1}{4\pi c}\,\mathbf{E}\times\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\,\mathbf{j}_{\text{см}}{}^m \times \mathbf{E}, \tag{13}$$

которому может быть придан вид, сходный с лоренцевым, если ввести условно «магнитный ток смещения»:

$$\mathbf{j}_{\text{см}}{}^m = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Следовательно, формулы (11) или (12) допускают такую дуально симметричную запись:

$$\operatorname{div} \overleftrightarrow{T} = \mathbf{f}_\Sigma = \rho^e \mathbf{E} + \rho^m \mathbf{H} + \frac{1}{c}\,\mathbf{j}_{\text{пол}}{}^m \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\,\mathbf{j}_{\text{пол}}{}^m \times \mathbf{E}\,. \tag{12}$$

Причина отсутствия у Максвелла добавочного члена (13) отчасти раскрывается там, где он выводит выражение для механической силы, дифференцируя тензор напряжений (его магнитную часть), и проводит соответствующие обобщения на переменные во времени процессы. Воспроизведем это вычисление в наших обозначениях. Если в магнитостатике задан тензор $T_{\alpha\beta}{}^m = (1/4\pi)H_\alpha H_\beta - (1/8\pi)\delta_{\alpha\beta}H^2$, то его дивергенция равна

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}{}^{m}}{\partial x_\beta}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_\beta}H_\alpha H_\beta-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\delta_{\alpha\beta}\mathbf{H}^2=\frac{1}{4\pi}H_\beta\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{1}{4\pi}H_\alpha\frac{\partial H_\beta}{\partial x_\beta}-\frac{1}{8\pi}\nabla_\alpha\mathbf{H}^2=$$

$$=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\nabla)H_\alpha+\frac{1}{4\pi}H_\alpha\operatorname{div}\mathbf{H}-\frac{1}{8\pi}\nabla_\alpha\mathbf{H}^2. \tag{14}$$

Здесь по дважды встречающимся индексам проводится суммирование $_{\beta\beta}\to\sum_{\beta=1}^{3}$.

Приняв во внимание тождество

$$\nabla\mathbf{H}^2=2(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}+2\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H},$$

можно соотношению (14) придать окончательный (для случая магнитостатики) вид:

$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{T}^{m}=-\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}+\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\mathbf{j}_{\text{пр}}{}^{e}\times\mathbf{H}. \tag{15}$$

Именно эта формула и приводится Максвеллом в п. 642–644. Обобщение состоит в замене $\mathbf{j}_{\text{пр}}{}^{e}\to\mathbf{j}_{\text{пр}}{}^{e}+\mathbf{j}_{c}{}^{e}$. Таким образом, уравнение (22) п. 644 подтверждает итоговое уравнение (C).

Однако в переменных полях соотношение (15) следует сложить с двойственным ему соотношением для электрической части тензора напряжений

$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{T}^{e}=\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{E}-\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\mathbf{E}=\rho^{e}\mathbf{E}+\frac{1}{4\pi c}\mathbf{E}\times\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \tag{16}$$

и в результате взамен максвелловской формулы (C) получить выражение (12).

Конечно, с помощью современного оперативного формализма, следуя Хевисайду, восстановление дуальной симметрии в выражении для силы (15) и (16) выглядит почти как очевидное. Но следует напомнить, что в «Трактате» вопрос о симметрии не обсуждался в столь общей постановке и, более того, его выяснение было отчасти затруднено отсутствием выписанного в явном виде уравнения (2). Вполне возможно, что это было причиной ненаписания последнего члена в (12) и (16).

Заметим в конце, что мы ограничились здесь комментированием только основных уравнений в их «итоговом» приведении (A)–(γ). Однако в тексте «Трактата» имеется несколько важных разбросанных замечаний, позволивших впоследствии обобщить эти уравнения на случай движущихся сред при наличии конвективных токов и т. д.

6. Незавершенность

Когда выстраивается новая система взглядов, охватывающая все явления, ранее считавшиеся независимыми, разрозненными, как-то несправедливо говорить о незавершенности монографии, где впервые дано последовательное изложение основ теории и где не только установлены ее общие уравнения, но и приоткрыты тайны «феномена осенения» – скачка мысли в направлении, показавшемся сначала просто правильным, а потом оказавшемся единственно правильным. И все же в отличие от «Начал» Ньютона – а максвелловский «Трактат» может быть отнесен по некоторым критериям к следующей за ними вехе в истории познания мира (заметим, кстати, что по латыни они не «Начала», а «Принципы», т. е. главные положения) – в «Трактате» нет такого широкого панорамного разворота применений найденных уравнений. Максвелл прожил недолгую жизнь (1831–1879) и до самой кончины, даже в последней болезни, продолжал работать над «Трактатом», так что при других, более благоприятных, стечениях обстоятельств мы могли бы унаследовать от него второе издание «Трактата», как принято сейчас писать, полностью переработанное и улучшенное. Он, конечно же, не успел воспользоваться всеми плодами своих уравнений и в продвижении по «дедуктивному спуску» ограничился лишь некоторыми демонстрациями. Но это были впечатляющие примеры.

Прежде всего, уравнениям подчинились все законы электростатических, магнитостатических, стационарнотоковых и квазистационарных полей, и стало возможным понять точность соответствующих приближений. Далее, Максвелл извлек из найденных им уравнений несомненно наиболее представительное решение для произвольно быстрого изменения полей во времени и пространстве – плоские электромагнитные волны в однородной среде, распространяющиеся со скоростью света и способные переносить энергию и импульс. Это был Триумф Великого Объединения – электричества, магнетизма и оптики, предсказанного еще Фарадеем. И как мы понимаем сейчас, такие решения можно воспринимать как фундаментальные; их суперпозиция (в линейном случае) дает любое распределение поля, удовлетворяющее уравнениям Максвелла, так что в известном смысле оба описания – через уравнения или через совокупность фундаментальных решений – эквивалентны. Наконец, Максвелл наметил схему объяснения «воздействия магнетизма на свет», т. е. фарадеевского эффекта вращения плоскости поляризации в замагниченной среде – прообраза будущих параметрических и нелинейных электромагнитных эффектов.

Среди максвелловедов (людей, изучающих не только особенности творения, но и свойства Творца) бытует несколько очевидных «эвристических недоразумений» типа «странно, что Максвелл не обратил внимания на...». И ведь действительно странно, что он, получив электромагнитную волну для свободного значения частоты, ограничился только оптическими приложениями, ни словом не упомянув о возможности существования электромагнитных волн в более низкочастотных диапазонах. По-видимому, и не нужно искать всему этому каких-либо особых объяснений. Прошло более 115 лет со времени выхода первого издания «Трактата», а исследования содержательности максвелловских уравнений не ослабевают. Максвеллу удалось проникнуть в одну из самых емких сокровищниц Природы, оценить масштабы богатств которой люди смогли только за несколько поколений. Освоить их одному смертному, даже такому великому и радивому, как Максвелл, было не по силам; тем более, еще не спало «волнение достижения» и еще оставалась известная неуверенность в исчерпывающей полноте найденных законов.

Поэтому если и имеет смысл обсуждать какую-то незавершенность «Трактата», то только в узком смысле, рабочую незавершенность, касающуюся отдельных вопросов, которые Максвелл по характеру предшествующего материала, казалось, должен был затронуть и замкнуть. Выше указывалось на них. Так, сходство структур электростатических и магнитостатических полей позволило Максвеллу подробнейшим образом проследить, как сопоставляются их математические описания и тем самым установить статический вариант принципа двойственности (иногда говорят, перестановочной двойственности, чтобы отойти от терминологического совпадения с дифракционным принципом Бабине). Естественно было бы завершить это сопоставление формулировкой общего принципа, что относительно быстро и случилось потом (Хевисайд, 1885–1891 годы), но понятно, что это произошло лишь после «восстановления» уравнения (2).

Вторая рабочая незаконченность относится к законам сохранения энергии, импульса и момента импульса. И здесь Максвелл еще в статических разделах «Трактата» отрабатывает многие тонкие моменты, связанные с этими понятиями, опираясь на них потом в обобщениях на быстропеременные поля, но все же последний шаг остался не сделанным, хотя математически любые законы сохранения могли быть сформулированы по типу уравнения непрерывности ($\mathrm{div}\,\mathbf{u}\rho+\partial\rho/\partial t=0$), так всесторонне (и модельно, и отвлеченно) разработанному в «Трактате» на примере закона сохранения электрического (7) и магнитного (10) зарядов.

Наконец, несколько слов о полях и потенциалах. Максвелл тщательно продумывал измерительную (метрологическую) сторону вопроса, связанного с введением электромагнитных полей, и мог высказаться по этому поводу после обсуждения уравнений электродинамики. Недаром же у него уравнение (C) для механической силы записано через поля, а не через потенциалы. Таким образом, он должен был выйти на утверждение об измеримости полей и вспомогательности потенциалов в общем случае, тем более что опять же в статике и квазистатике эти моменты им не были опущены.

Возможно, что к перечню сему можно присоединить еще несколько обоснованных домыслов, например, об описаниях полей в движущихся системах отсчета, об обобщениях материальных уравнений и т. п. Однако и без того эти рассуждения выглядят несколько спекулятивно, т. е. основываются скорее не на доводах, а на отсутствии контрдоводов.

И все же особого замечания заслуживает вопрос об инвариантности уравнений относительно преобразований координат и времени. Максвелл был первым человеком, который придал установленным им законам Природы релятивистски инвариантный облик; однако он не акцентрировал свое достижение, предоставив это сделать впоследствии другим (Фитцжеральд, Лоренц, Пуанкаре, Эйнштейн). Вообще говоря, преобразования, которые мы называем лоренцевыми, могли бы быть написаны еще в XVIII веке при изучении одномерного волнового уравнения (уравнения струны, например), но они наверняка рассматривались бы тогда, как некое забавное, чисто формальное свойство уравнения.

Поскольку максвелловские уравнения тоже приводят к волновым уравнениям для полей (или для потенциалов), то они в этом ограниченном смысле не дают фактического продвижения. Оно наступило после понимания того, что законы природы должны быть одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, т. е. после упрочения убежденности в справедливости принципа относительности. И максвелловской электродинамике «повезло» в том смысле, что электродинамическая постоянная, совпавшая со скоростью света в вакууме, оказалась элитарно выделенной, предельно возможной среди всех других скоростей движения тел, и тем самым волновое уравнение для электромагнитных полей в вакууме тоже обрело свойство элитарной уникальности.

7. Заключение

В свое время в известной учебной книге по электродинамике (перевод на русский язык был осуществлен А. В. Гапоновым–Греховым и М. А. Миллером) американский физик Смайт написал, что он был бы благодарен всякому, указавшему способ устранения неточностей. И переводчики ответили ему тогда, что одним из лучших средств исполнения этого пожелания служит перевод книги на другой язык. Примерно так же обстоит дело и с любой другой научной продукцией. В частности, именно в процессе перевода «Трактата» нам удалось выяснить такие тонкости, которые при менее скрупулезном прочтении оригинала могли бы проскользнуть незамеченными.

Так что этот выпускаемый отдельным изданием обзор взглядов переводчиков «Трактата» (в значительной своей части перекрывающийся с Послесловием к переводу) следует, возможно, квалифицировать как сочинение об особенностях творческой психологии Максвелла, раскрываемых при тщательном изучении написанного им «Трактата об Электричестве и Магнетизме».

В конце мы приводим перечень некоторых известных нам монографий по максвелловской электродинамике на русском языке, где в той или иной степени восполнены еще и образовательные функции.

Монографии
по максвелловской электродинамике на русском языке

1. *Лоренц Г. А.* Теория электромагнитного поля. М.: Гостехиздат, 1933.

2. *Лоренц Г. А.* Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. М.: Гостехиздат, 1956.

3. *Абрагам М., Беккер Р.* Введение в теорию электричества Максвелла // Теория электричества. М.: Гостехиздат, 1939.

4. *Беккер Р.* Электронная теория // Теория электричества. М.: Гостехиздат, 1941. Т. 2.

5. *Планк М.* Теория электричества и магнетизма // Введение в теоретическую физику. М.: ГТТИ, 1933. Ч. 3.

6. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. М.: ИЛ, 1958.

7. *Стрэттон Дж.* Теория электромагнетизма. М.: Гостехиздат, 1948.

8. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954.

9. *Поль Р.В.* Учение об электричестве. М.: Физматгиз, 1962.

10. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Электричество и магнетизм. Физика сплошных сред // Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1966. Т. 5–7.

11. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм // Берклеевский курс физики. М.: Наука, 1983. Т. 2.

12. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.

13. *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика. М.: Физматгиз, 1963.

14. *Рамо С., Уиннери Дж.* Поля и волны в современной радиотехнике. М.: Гостехиздат, 1950.

15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. Электродинамика сплошных сред // Теоретическая физика. М.: Наука, 1973. Т. 2; 1982. Т. 8.

16. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.

17. *Власов А.А.* Макроскопическая электродинамика. М.: Гостехиздат, 1955.

18. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957; Второе изд. М.: Радио и связь, 1988.

19. *Семенов А.А.* Теория электромагнитных волн. М.: Изд–во МГУ, 1962.

20. *Говорков В.А.* Электрические и магнитные поля. М.: Госэнергоиздат, 1960.

21. *Никольский В.В.* Теория электромагнитного поля. М.: Высш. шк., 1964.

22. *Федоров Н.Н.* Основы электродинамики. М.: Высш. шк., 1965.

23. *Кацелененбаум Б.З.* Высокочастотная электродинамика. М.: Наука, 1966.

24. *Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В.* Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1971.

25. *Вольман В.И., Пименов Ю.З.* Техническая электродинамика. М.: Связь, 1971.

26. *Баскаков С.И.* Основы электродинамики. М.: Сов. радио, 1973.

27. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1973.

28. *Иваненко Д.Д, Соколов А.А.* Классическая теория поля. М.: Гостехиздат, 1951.

29. *Гринберг Г.А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.: Изд–во АН СССР, 1948.

30. *Ампер А.М.* Электродинамика. Сб. тр. М.: Изд–во АН СССР, 1948.

31. *Де Гроот С.Р., Сатторп Л.Г.* Электродинамика. М.: Наука, 1982.

32. *Тонелла М.А.* Основы электромагнетизма и теория относительности. М.: ИЛ, 1962.

33. *Новаку В.* Введение в электродинамику. М.: ИЛ, 1963.

34. *Скиллинг Г.Г.* Введение в теорию электромагнитных волн. М.: Связьиздат, 1947.

35. *Френкель И.Я.* Электродинамика (общая теория) // Собр. избр. тр. М.: Изд–во АН СССР, 1956. Т. I.

36. *Савельев И.В.* Механика. Электродинамика // Основы теоретической физики. М.: Наука, 1975. Т. I.

37. *Семенов А.А.* Введение в электродинамику излучающих систем. М.: Изд–во МГУ, 1963.

38. *Марков Г.Т. и др.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Сов. радио, 1979.

39. *Матвеев А.Н.* Электродинамика. М.: Высш. шк., 1980.

40. *Матвеев А.Н.* Электродинамика и теория относительности. М.: Высш. шк., 1964.

41. *Хайкин С.Э.* Электромагнитные колебания и волны. М.: Госэнергоиздат, 1959.

42. *Новожилов Ю.В.*, *Яппа Ю.А.* Электродинамика. М.: Наука, 1978.

43. *Семенов Н.А.* Техническая электродинамика. М.: Связь, 1973.

44. *Терлецкий Я.П.*, *Рыбаков Ю.П.* Электродинамика. М.: Высш. шк., 1980.

45. *Кузнецов Б.Г.* Эволюция основных идей электродинамики. М.: Изд–во АН СССР, 1963.

46. *Поливанов К.М.* Электродинамика движущихся тел. М.: Энерго–издат,1982.

47. *Иродов И.Е.* Основные законы электромагнетизма. М.: Высш. шк., 1983.

48. *Красюк Н.П.*, *Дымовин Н.Д.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высш. шк., 1974.

49. *Туров Е.А.* Материальные уравнения электродинамики. М.: Наука, 1983.

50. *Покровский С.И.* Электричество и магнетизм. М.: ГТТИ, 1933. Ч. 1.; 1935. Ч. 2.

51. *Стражев В.И.*, *Томильчик Л.М.* Электродинамика с магнитным зарядом // Наука и техника, 1975.

52. *Дучков В.М.* Электродинамика: История и методология макроскопической электродинамики. М.: Высш. шк., 1975.

53. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977.

54. *Фрадкина Э.М.* Лекции по курсу «Теория Максвелла и электромагнитные волны». М.: МАИ, 1971.

55. *Фредерикс В.К.* Электродинамика и введение в теорию света. Л.: Кубуч, 1934.

56. *Рудаков В.Н.* Теория электромагнитного поля (в 3 ч.). Л.: Электротехн. ин–т им. В. И. Ульянова (Ленина), 1971.

57. *Фальковский О.И.* Техническая электродинамика. М.: Связь, 1978.

58. *Бейтмен Г.* Математическая теория распространения электромагнитных волн. М.: Физматгиз, 1958.

59. *Медведев В.В.* Начала теоретической физики. М.: Наука, 1977.

60. *Ахиезер А.И.* *Ахиезер И.А.* Электромагнетизм и электромагнитные волны. М.: Высш. шк., 1985.

61. *Фущич В.И.*, *Никитин А.Г.* Симметрия уравнений Максвелла. Киев: Наук. думка, 1983.

Автобиография. *Я, Левин Михаил Львович*, родился в 1921 г. в г. Саратове, в семье научного работника. В 1926 г. переехал в Москву. В 1938 г. после окончания средней школы поступил на физический факультет Московского университета, который и окончил в 1944 г.

В 1943–44 гг. я одновременно с учебой в МГУ работал в качестве научного сотрудника сперва в теоретической лаборатории завода 465 НКЭП, а затем в той же лаборатории (руководитель – М.А.Леонтович), переведенной в НИИ–108 НКЭП. В июле 1944 г. был арестован органами тогдашнего НКГБ. Приговорен постановлением ОСО от 3 марта 1945 г. к 3–м годам по ст. 58–10,11 УК. В августе 1945 г. освобожден по амнистии. До этого три месяца работал в так называемой «Кучинской шараге» (точного названия не знаю), где начальником был полковник Ф.Ф. Железов. В сентябре 1945 г. начал работать на радиофизическом факультете Горьковского университета. В ноябре 1946 г. защитил кандидатскую диссертацию, после чего, занимая штатную должность ассистента, исполнял обязанности доцента кафедры теоретической физики.

В 1948 г. по «аллилуевскому делу» была арестована моя мать – Р.С. Левина, член-корр. АН СССР. Это усугубило зыбкость моего положения, а в июне 1950 г. я был уволен, не получив на руки характеристику с места работы. Поэтому 1950–51 учебный год провел в Горьком «тунеядцем», зарабатывая на жизнь анонимными переводами научных книг.

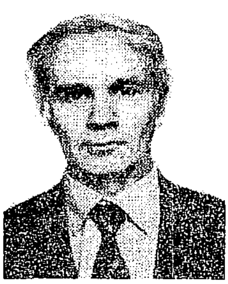
С сентября 1951 г. по август 1955 г. работал в Тюменском пединституте, сперва ст.преподавателем, затем и.о. доцента. Осенью 1954 г. смог защитить докторскую диссертацию, написанную еще в 1948 г. В сентябре 1955 г. после избрания по конкурсу занял должность профессора кафедры теоретической физики Ивановского пединститута. В мае 1956 г. Военная Коллегия Верховного Суда СССР отменила постановление ОСО из-за отсутствия состава преступления. Моя мать была полностью реабилитирована еще раньше, в 1955 г.

С сентября 1956 г. работаю в Радиотехническом институте АН СССР. В 1960 г. избран на должность нач. лаборатории, которая в 1977 г. переведена в Московский Радиотехнический институт АН СССР. С декабря 1989 г. нач. теоретического отдела института. Кроме того, начиная с осени 1957 г. являюсь по совместительству профессором кафедры радиофизики МФТИ.

Моя жена – Наталья Михайловна Леонтович, математик, сейчас на пенсии. Дочь – Татьяна, научный сотрудник Гос. Третьяковской галереи. Сын – Андрей, научн. сотрудник Института океанологии АН СССР. Сын – Петр, студент МФТИ.

8 июня 1990 г. Левин

Миллер Михаил Адольфович родился 3 мая 1924 года в Нижнем Новгороде. Во время войны (1942) служил в рядах Красной Армии. Окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1949). Некоторое время работал в промышленности, затем поступил в аспирантуру Горьковского университета к профессору М.Т. Греховой. Своим учителем считает также М.Л. Левина. Защитил кандидатскую диссертацию по поверхностным электромагнитным волнам (1953), затем докторскую диссертацию по взаимодействию заряженных частиц с высокочастотными электромагнитными полями (1960). Долго время читал лекции в Горьковском университете. В настоящее время работает главным научным сотрудником Института прикладной физики РАН в Нижнем Новгороде. Заслуженный Соросовский профессор. E-mail: mimi@pent.sci-nnov.ru



Суворов Евгений Васильевич – родился в 1943 году в Ульяновске. Окончил Радиофизический факультет Горьковского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского (1965). Кандидатскую и докторскую диссертации защитил по специальности физика и химия плазмы. Заведующий отделом Института прикладной физики РАН, по совместительству – профессор кафедры «Высшая школа общей прикладной физики» Нижегородского госуниверситета. Круг научных интересов – взаимодействие мощного излучения с плазмой, ЭЦ нагрев и безындукционная генерация тока в установках УТС, плазменная диагностика, электродинамика.

Издательство ГосУНЦ «Колледж» планирует
во втором полугодии 2000 года выпустить учебное пособие

Короновский А.А., Трубецков Д.И. Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд–во ГосУНЦ «Колледж», 2000. – 196 с.: илл.

Второе издание книги «Нелинейная динамика в действии» существенно отличается от первого издания. Главы, посвященные применению аппарата нелинейной динамики к биологическим системам значительно расширены, в них включены модели, представляющие интерес для широкого круга читателей. В то же время, часть материала первого издания исключена из текста книги.

Учебное пособие для студентов естественных факультетов, а также для студентов гуманитарных специальностей университетов и всех, кто интересуется приложением методов нелинейной динамики в различных науках.

Оглавление

Из предисловия к первому изданию

Предисловие ко второму изданию

Глава 1. Модели развития и взаимодействия в экологии. Модель Мальтуса и ее обобщение Ферхюльстом. Модель рыболовства. Модель Лотки – Вольтерры. Модель конкуренции двух видов. Детерминированный хаос в экологических моделях. Модель «хищник – пища – жертва». Вместо заключения.

Список литературы к первой главе

Глава 2. Пространственная динамика популяций. Модель популяции, учитывающая пространственное распределение особей по ареалу проживания. Бегущая волна в модели пространственно распределенной популяции. Возможны ли стационарные волны в природе? Клеточные автоматы. Игра «Жизнь». Искусственная жизнь?

Список литературы ко второй главе

Глава 3. Нелинейная динамика биологических объектов. Энергетическая модель сердца. Колебательная модель сердечной мышцы. Спиральные волны в сердце. Снова клеточные автоматы. В каком режиме работает сердце здорового человека? Кровь как нелинейная активная среда. Динамические болезни. О пользе дыхания Чейна – Стокса.

Список литературы к третьей главе

Глава 4. Феномен логистического уравнения. Вездесущее логистическое уравнение. Модель сосуществования производителей и управленцев. Нелинейные модели Вайдлиха и их применение к экономическим и социальным задачам. Что произойдет, если к двум уравнениям Вайдлиха добавить третье?

Список литературы к четвертой главе

Глава 5. Нелинейность в человеческом сообществе. Нелинейная динамика боевых действий. Эпидемии в человеческом обществе.

Список литературы к пятой главе

Ответы к некоторым задачам