

## СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС И СТОХАСТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ

*В.С. Анищенко, А.Б. Нейман*

Фундаментальное явление синхронизации имеет место в нелинейных автоколебательных системах, находящихся под действием периодической силы или связанных друг с другом. При внешнем воздействии синхронизация проявляется в захвате или подавлении собственной частоты осциллятора периодической силой. В настоящей статье мы обсуждаем удивительные явления синхронизации в стохастических бистабильных системах, которые не имеют собственной детерминированной частоты. Стохастическая бистабильная система характеризуется управляемой шумом средней частотой переключений между метастабильными состояниями, которая является аналогом собственной частоты. *Стохастическая синхронизация* проявляется в захвате средней частоты переключений внешней периодической силой. То же самое явление наблюдается в связанных бистабильных системах. Стохастическая синхронизация неразрывно связана с явлением стохастического резонанса.

### Введение

Шум может вызывать нетривиальное поведение нелинейных динамических систем, разрушая тем самым наши интуитивные представления, основанные на «негативном» значении слова «шум». Позитивная роль шума в ряде нелинейных явлений привлекла в последнее время пристальное внимание. В данной статье мы сосредоточимся на явлении синхронизации, которое проявляется в стохастических системах под действием внешней периодической силы и в связанных стохастических системах. Мы начнем с описания явлений резонанса и синхронизации в разделе 1. В разделе 2 мы кратко опишем эффект стохастического резонанса. Явление стохастической синхронизации обсуждается в разделе 3 на примере триггера Шмитта под действием шума и периодического сигнала, и в разделе 4 на примере двух связанных бистабильных систем с шумом.

### 1. Резонанс и синхронизация в динамических системах

Резонансные свойства очень типичны в природе. Вероятно, резонанс – это первое физическое явление, с которым мы сталкиваемся в нашем детстве, когда качаемся на качелях. Резонансные явления имеют место в колебательных системах, находящихся под действием внешней периодической силы. Эти системы при отклонении от состояния равновесия (в отсутствие внешней силы) начинают

колебаться с *собственной частотой*  $f_0$ . Простейшие примеры механического маятника и колебательного контура хорошо известны из курса общей физики. Когда частота внешней силы  $f_1$  становится равной собственной частоте осциллятора, отклик системы на периодическое воздействие является максимальным, и график зависимости амплитуды колебаний от частоты внешней силы имеет хорошо известную резонансную форму с максимумом при  $f=f_0$ . Важно отметить, что явления резонанса могут иметь место как в линейных, так и в нелинейных системах.

Явление резонанса в диссипативных системах используется для создания приборов и систем, которые совершают незатухающие периодические колебания или *автоколебания*. В отличие от просто колебаний, амплитуда и частота автоколебаний не зависят в определенных пределах от начальных условий, а только от внутренних (собственных) параметров системы [1]. Автоколебательная система обычно содержит резонансный элемент и нелинейный элемент обратной связи, который определенным образом компенсирует потери энергии в системе. Генераторы незатухающих колебаний (автоколебательные системы) являются диссипативными (открытыми) нелинейными системами. На математическом языке автоколебания отвечают существованию асимптотически устойчивого предельного цикла в фазовом пространстве системы. Возникновению незатухающих колебаний соответствует бифуркация Андронова – Хопфа, то есть бифуркация рождения предельного цикла [2]. Самой популярной моделью автоколебательной системы является осциллятор Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon(1-x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – управляющий параметр, который отвечает за величину обратной связи.

С внешней периодической силой, приложенной к автоколебательной системе, явление *синхронизации* становится возможным для наблюдения [3–5]. Основной эффект синхронизации состоит в совпадении собственной частоты системы и частоты внешней силы. Собственная частота и фаза колебаний системы захватываются внешней периодической силой. При этом явление захвата частоты наблюдается в конечной области пространства параметров, которая называется *областью синхронизации*. Тот же самый эффект имеет место в связанных автоколебательных системах. В этом случае собственные частоты осцилляторов становятся либо равными, либо кратными друг другу [6].

Типичная бифуркационная диаграмма автоколебательной системы под действием периодической силы показана на рис.1, на плоскости параметров (амплитуда периодической силы  $A$ , отношение частоты воздействия  $f_0$  к собственной частоте осциллятора  $f_n$ ) [3,7].

Иррациональные значения отношения  $f_0/f_n$  отвечают квазипериодическому движению на двумерном торе, тогда как рациональные значения соответствуют различным типам резонансов на торе. Внутри резонансных областей (клевсов синхронизации) величина отношения  $f_0/f_n$  строго постоянна и равна отношению двух рациональных чисел. Это отношение называют *числом вращения Пуанкаре*, а области синхронизации – «языками Арнольда», который внес существенный вклад в развитие математической теории резонансов на торе [7]. Постоянство числа вращения внутри области синхронизации означает, что при изменении частоты внешней силы частота собственных колебаний системы следует за ней! Отсюда и происхождение терминов «захват частоты», «захват фазы». Если мы построим график зависимости числа вращения  $\rho$  от обобщенного параметра системы  $\varepsilon$  (в случае рис. 1 таковым является  $\alpha=f_0/f_n$ ), мы получим картинку, которая в литературе по нелинейной динамике известна как «дьявольская лестница» (рис. 2).

Горизонтальные отрезки графика соответствуют режимам захвата частоты с различными числами вращения (то есть различными рациональными соотношениями между собственной частотой и частотой воздействия). Между ними собственная частота системы и частота воздействия находятся в

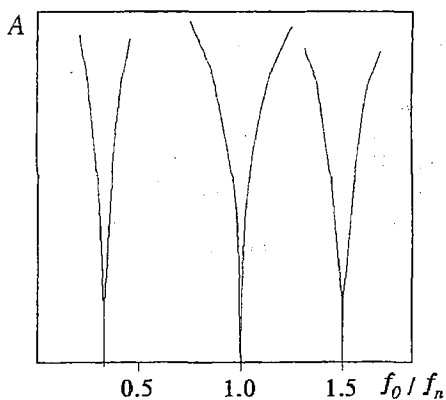


Рис. 1. Схематическая бифуркационная диаграмма автоколебательной системы под действием внешней периодической силы

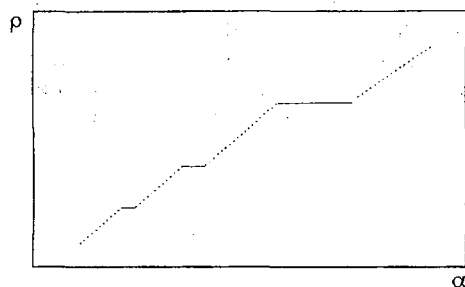


Рис. 2. Число вращений как функция управляющего параметра

иррациональном и зависящем от  $\alpha$  соотношении, что отвечает режиму двумерного эргодического тора в фазовом пространстве системы.

Важно отметить, что в отличие от резонанса, который можно наблюдать даже в линейных системах, *синхронизация – принципиально нелинейное явление*. В последнее время классическое определение синхронизации было распространено на хаотические системы [8–12]. Наибольший интерес представляет явление фазовой синхронизации в хаотических системах. Этот эффект можно наблюдать в двух слабо связанных осцилляторах, каждый из которых ведет себя хаотическим образом. Это приводит к тому, что фазы осцилляторов захватываются, в то время как амплитуды меняются хаотически [11].

## 2. Стохастический резонанс

Обратимся теперь к стохастическим системам, то есть к системам с шумом. В качестве примера мы рассмотрим бистабильные системы под действием шума. В пределе большого затухания (передемпфированные осцилляторы) такие системы не имеют собственной частоты, за исключением управляемого шумом характерного временного масштаба, который представляет собой среднее время выхода из метастабильного состояния [13]. Модель, которая широко используется в литературе и описывает движение передемпфированной броуновской частицы в симметричном двухямном потенциале  $U(x)$ , определяется стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ)

$$\dot{x} = -dU(x)/dx + (2D)^{1/2}\xi(t), \quad (2)$$

где  $\xi(t)$  – гауссов белый шум интенсивности  $D$ . Когда высота барьера  $\Delta U$  очень велика, то есть  $\Delta U \gg D$ , средняя частота  $f_s$  переключений между метастабильными состояниями подчиняется известному закону Крамерса

$$f_s = \nu \exp(-\Delta U/D), \quad (3)$$

где  $\nu$  – коэффициент, определяемый формой потенциала. Как видно из (3), характерная частота системы экспоненциально чувствительна к изменению интенсивности шума.

Явление *стохастического резонанса* (СР) было открыто авторами работы [14] и характеризует особенности динамики бистабильных стохастических систем, возмущаемых внешней периодической силой. Это явление привлекло большое внимание в последние десять лет [15–19] как прекрасный пример нетривиального

индуцированного шумом перехода в нелинейных системах и как механизм управляемой шумом самоорганизации в сложных системах [20]. В широком классе нелинейных динамических систем с увеличением шума отклик этих систем на малые периодические возмущения может быть значительно усилен. Отношение интенсивностей сигнала и шума (SNR), впервые использованное в работе [21], или усиление мощности [22,23] имеет максимум при оптимальной интенсивности шума, когда управляемый шумом временной масштаб системы близок к периоду внешней силы. Таким образом, СР представляет обобщение резонансных явлений на случай, когда система обладает характерным временным масштабом только в статистическом смысле. Добавляя периодическую силу с амплитудой  $A$  и частотой  $f_0$  в (2), мы приходим к СДУ

$$\dot{x} = -dU(x)/dx + A \sin(2\pi f_0 t + \phi) + (2D)^{1/2} \xi(t), \quad (4)$$

где  $\phi$  – равномерно распределенная случайная фаза. Амплитуда периодической силы  $A$  полагается достаточно малой, так что периодическая сила сама не может перебросить частицу из одной потенциальной ямы в другую.

Теоретические исследования показали, что явление СР в случае относительно слабого сигнала ( $A/D \ll 1$ ) может быть корректно описано в терминах теории линейного отклика [22,24]. Для усиления мощности  $\eta$  и для SNR можно получить следующие выражения:

$$\eta = |\chi(f_0)|^2, \quad \text{SNR} = 1/4 A^2 |\chi(f_0)|^2 / S_0(f_0), \quad (5)$$

где  $\chi(f)$  – восприимчивость системы и  $S_0(f)$  – спектр мощности системы в отсутствие периодической силы. Самая простая аппроксимация восприимчивости симметричной стохастической бистабильной системы, которая учитывает только процесс переключений бистабильной системы, приводит к известному результату для коэффициента усиления мощности и SNR

$$\eta = (1/D^2) \langle x^2 \rangle_{st} 2f_s^2 / (f_s^2 + 4\pi^2 f_0^2), \quad \text{SNR} = \pi A^2 / (2D^2) \langle x^2 \rangle_{st} f_s, \quad (6)$$

где  $\langle x^2 \rangle_{st}$  – второй момент невозмущенной системы в стационарном состоянии и  $f_s$  – средняя частота переключений между метастабильными состояниями, которая соответствует глобальному временному масштабу динамики переключений. График зависимости как SNR, так и усиления мощности от интенсивности шума  $D$  показывает колоколообразный максимум при оптимальной интенсивности шума. Однако в отличие от обычного резонанса в колебательной системе как SNR, так и усиление мощности не демонстрируют резонансной зависимости от частоты воздействия  $f_0$ .

### 3. Нелинейный стохастический резонанс. Стохастическая синхронизация

Когда амплитуда периодического воздействия становится достаточно большой, бистабильная система может демонстрировать ряд нелинейных эффектов. Следуя нашим основным целям, отметим здесь исследования явлений синхронизации, проведенные в [25,26]. В работе [25] при использовании другого статистического описания СР, основанного на анализе *распределения времен пребывания*, было показано, что резонансное поведение может наблюдаться как относительно интенсивности шума, так и относительно частоты внешней силы. С другой стороны, в работе [26] было показано, что при достаточно сильном периодическом воздействии зависимость SNR от частоты воздействия демонстрирует резонансное поведение в результате сильной синхронизации между стохастической динамикой переключений и внешней периодической силой.

Проводя параллель с обычными колебательными системами, разумно попытаться для стохастических систем найти эффекты, подобные классическим

явлениям синхронизации. Действительно, стохастические бистабильные системы в некотором смысле схожи с автоколебательными системами. Аналогом собственной частоты стохастические бистабильные системы имеют среднюю частоту переключений (СЧП). Поэтому мы предполагаем, что в нелинейном режиме работы стохастической бистабильной системы под действием периодической силы могут наблюдаться такие же области синхронизации, где СЧП захватывается периодическим воздействием. Эта гипотеза была обоснована экспериментально в [27] с использованием в качестве бистабильного элемента триггера Шмитта.

Триггер Шмитта представляет собой электронный прибор с двумя состояниями, демонстрирующий в чистом виде динамику переключений. Стохастический резонанс был впервые исследован экспериментально [21] и теоретически [28] с применением именно этого устройства. Сигнал на входе триггера является случайной функцией времени  $V_i(t)$ , а на выходе могут быть только два возможных значения  $\pm V_{out}$ . Триггер Шмитта может быть реализован на основе операционного усилителя (рис. 3). Эта система характеризуется пороговым значением напряжения  $V_{th} = R_2 V_0 / (R_1 + R_2)$ . Если интервал значений напряжения  $|V_i(t)| \geq V_{th}$ , триггер Шмитта является бистабильным. Идеальный триггер Шмитта под действием периодической силы и шума  $\xi(t)$  подчиняется уравнению

$$y = \text{sgn} [\gamma y - A \cos(2\pi f_0 t) - \xi(t)], \quad (7)$$

где  $\gamma$  определяет порог триггера. В наших экспериментах триггер Шмитта находился под действием периодического сигнала и шума в полосе частот  $0 \leq f \leq \leq 100$  кГц. Амплитуда периодического сигнала  $A$  во всех экспериментах выбиралась достаточно малой, чтобы избежать переключений триггера в отсутствие шума,  $A < \Delta V$ , где  $\Delta V = 150$  мВ – уровень порога триггера Шмитта. На выходе триггера мы имели дихотомический стохастический процесс, который может характеризоваться средними длительностями пребывания в верхнем и нижнем состояниях  $T_+$ ,  $T_-$ . Мы вычисляли эти величины, используя компьютер, связанный через АЦП с выходом системы. Средний период переключений, таким образом,  $T_s = T_+ + T_-$ . В частотной области эта величина соответствует средней частоте переключений  $f_s = 1/T_s = 1/(T_+ + T_-)$ .

В отсутствие периодического воздействия средняя частота переключений полностью управляется шумом и характеризуется экспоненциальным законом Аррениуса:  $f_s^{(0)} \propto \exp(-\Delta V/D)$ , где  $D$  – интенсивность шума. При наличии

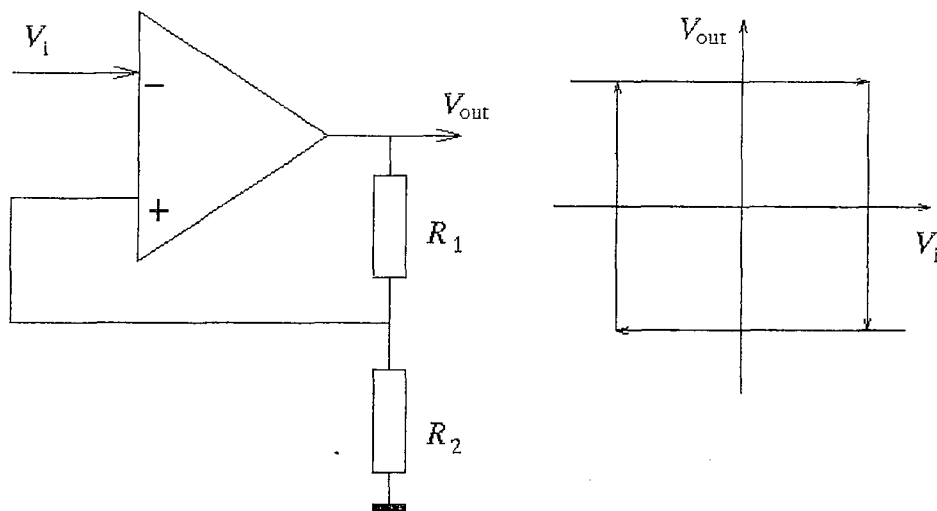


Рис. 3. Типичная схема и входная/выходная характеристики триггера Шмитта

периодического возбуждения средняя частота переключений становится функцией параметров периодической силы, в частности, зависит от амплитуды.

Результаты расчетов средней частоты переключений для триггера Шмитта как функции интенсивности шума показаны на рис. 4.

В отсутствие периодического воздействия, также как и в случае слабой периодической силы, зависимость средней частоты переключений (СЧП) от интенсивности шума ведет себя по экспоненциальному закону в полном соответствии с законом Крамерса (3). Для достаточно большой амплитуды периодической силы экспоненциальная зависимость нарушается. Ясно видно, что существует интервал интенсивности шума, в котором средняя частота переключений остается практически постоянной и совпадает с частотой периодической силы  $f_0$ . Изменения средней частоты переключений в этой области не превышают  $\pm 0.5\%$ , что меньше ошибки измерений. Таким образом, СЧП между двумя состояниями бистабильной системы с шумом *захватывается* внешней периодической силой: в определенной области СЧП равна частоте воздействия!

Проводя такие же вычисления для различных значений амплитуды периодической силы, мы получили область на плоскости параметров (амплитуда шума, амплитуда периодического воздействия), в которой СЧП равна частоте периодической силы в пределах ограничений точности экспериментов, приведенной выше. Эти области «синхронизации» показаны на рис. 5 для некоторых значений управляющей частоты  $f_0$ .

Начало каждой из областей определяет пороговое значение  $A_{th}$  амплитуды модуляции. Поэтому явление имеет пороговое свойство, также как и в связанных автоколебательных системах. Рис. 5 демонстрирует также пороговые значения синхронизации  $A_{th}$  от частоты воздействия и интенсивности шума: чем выше частота воздействия, тем больше пороговое значение  $A_{th}$  и тем сильнее шум мы должны ввести для того, чтобы получить эффект захвата средней частоты переключений. Тот же самый эффект наблюдался в физическом и в численном экспериментах для симметричной двухъямной системы.

Как мы и ожидали, области синхронизации на рис. 5 очень схожи с языками Арнольда в классическом неавтономном автоколебательном осцилляторе (см. рис. 1). Однако есть принципиальное различие между эффектами захвата частоты в автоколебательной системе и явлением захвата средней частоты переключений. В стохастической бистабильной системе не существует собственной частоты в классическом смысле. Роль собственной частоты осциллятора играет статистическая величина — средняя частота переключений между двумя состояниями системы. Для случая стохастического переключения трудно ввести

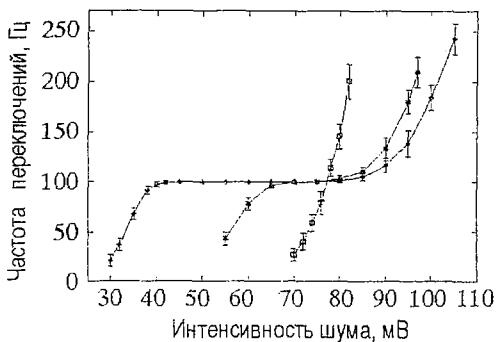


Рис. 4. Результаты измерений средней частоты переключений в зависимости от интенсивности шума при различных амплитудах периодического сигнала для триггера Шмитта:  $A = 0$  мВ ( $\blacklozenge$ ),  $A = 60$  мВ ( $\square$ ),  $A = 100$  мВ ( $*$ ). Частота сигнала  $f_0 = 100$  Гц, пороговый уровень триггера  $V_{th} = 150$  мВ [27]



Рис. 5. Области синхронизации для триггера Шмитта при различных частотах периодического воздействия:  $f_0 = 100$  Гц ( $*$ ),  $f_0 = 250$  Гц ( $\Delta$ ),  $f_0 = 500$  Гц ( $\square$ ). Пороговый уровень триггера  $V_{th} = 150$  мВ [27]

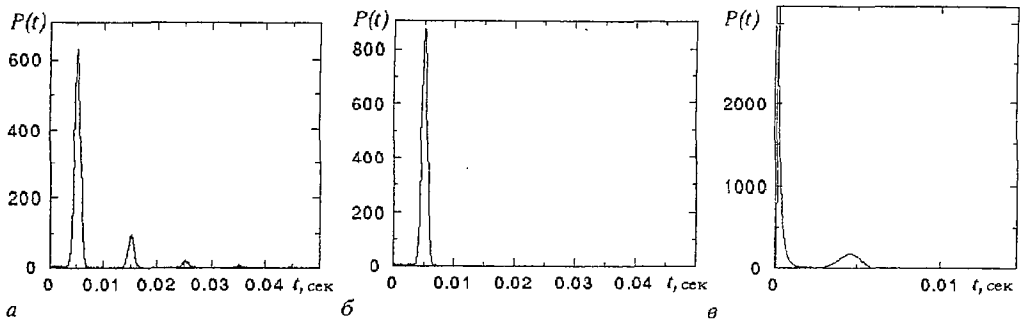


Рис. 6. Вычисленное распределение времен пребывания для триггера Шмитта под действием периодического сигнала с амплитудой  $A = 100$  мВ и частотой  $f_0 = 100$  кГц для различных уровней шума: а – 35 мВ; б – 70 мВ; в – 115 мВ

определение «фазы». В результате мы не наблюдаем захвата частоты на гармониках и субгармониках, как в классических автоколебательных системах. В то же время зависимость средней частоты переключений от интенсивности шума (см. рис. 4) очень схожа с частью графика «дьявольской лестницы» (см. рис. 2), соответствующей резонансу на основном тоне (число вращения  $\rho=1$ ).

Другой характеристикой, ясно показывающей это синхронное поведение, является распределение времен пребывания [25]. Результаты вычислений этой величины показаны на рис. 6. Для слабого шума ниже области синхронизации (рис. 6, а) распределение времен пребывания состоит из пиков, локализованных на временах, близких нечетным кратным половине периода внешнего периодического воздействия  $T_0/2$ . Внутри области синхронизации (рис. 6, б) распределение времен пребывания имеет один узкий пик на  $T_0/2$ , который свидетельствует о сильной синхронизации между периодическим сигналом и динамикой переключений: почти все переключения происходят с частотой сигнала. Выше области синхронизации интенсивность шума становится такой большой, что приводит к возможности появления невероятно коротких интервалов времени между моментами переключений, о наличии которых свидетельствует резкий пик зависимости  $p(\tau)$  вблизи нуля (рис. 6, в).

#### 4. Стохастическая синхронизация в двух связанных бистабильных системах

Как мы отметили выше, явление синхронизации можно наблюдать в связанных автоколебательных осцилляторах. Явления синхронизации в связанных стохастических бистабильных системах [29] были исследованы в работе [30]. В качестве простого примера связанных стохастических бистабильных осцилляторов рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 + \gamma(y-x) + (2D)^{1/2}\xi_1(t), \quad (8)$$

$$\dot{y} = \beta y - y^3 + \gamma(x-y) + (2D)^{1/2}\xi_2(t),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры, характеризующие высоту барьера в подсистемах,  $\xi_{1,2}(t)$  – статистически независимый белый гауссов шум. Параметр  $\gamma$  (коэффициент связи) характеризует степень взаимодействия подсистем. В случае несвязанных систем ( $\gamma=0$ ) стохастические процессы в подсистемах являются статистически независимыми с различными средними частотами переключений, определяемыми параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ . Однако с увеличением связи  $\gamma$  может наблюдаться определенная степень когерентности, при которой средние частоты переключений стремятся к одному и тому же значению. На рис. 7 показана зависимость средних

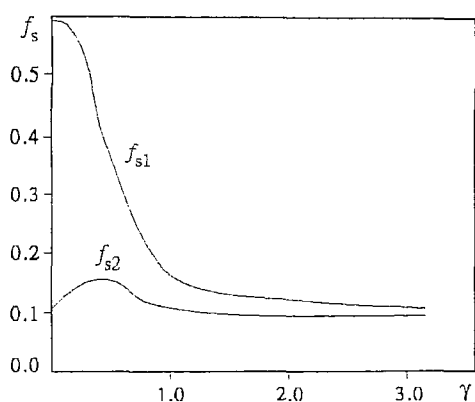


Рис. 7. Зависимости средних частот переключений от величины связи для значимых параметров  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 1.0$ ,  $D = 0.1$

частот переключений  $f_s$  в подсистемах: от  $\gamma$  для фиксированных значений  $D$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ .

Как видно из графика, СЧГ в подсистемах становятся практически равными, когда степень связи возрастает. Такое поведение парциальных частот типично для явления синхронизации в классических системах связанных генераторов.

### Обсуждение

Как хорошо известно, эффект синхронизации взаимодействующих осцилляторов – это один из механизмов самоорганизации в открытых системах [20]. В данной работе мы показали, что в стохастических системах, которые не имеют собственных частот в обычном детерминированном смысле, может наблюдаться явление, во многом схожее с синхронизацией в классическом понимании этого определения. Нелинейное взаимодействие характерных временных масштабов (среднего времени выхода из метастабильного состояния и внешнего детерминированного временного масштаба) дает начало этим явлениям. Как было показано недавно в работе [31], явление стохастической синхронизации может характеризоваться в терминах меры энтропии, показывающей минимум в зависимости энтропии системы от уровня шума. Этот минимум достигается именно в режиме стохастической синхронизации.

Последние исследования свидетельствуют, что описанные в настоящей работе явления стохастического резонанса и стохастической синхронизации проявляют себя в детерминированных хаотических системах с бистабильными свойствами [12,32,33]. В этом случае для реализации эффектов нет необходимости добавлять внешний шум. Хаотичность процесса переключений осуществляется здесь за счет детерминированной хаотической динамики.

Мы благодарны профессорам В. Эбелингу, Л. Шиманскому–Гайеру и Ю.Л. Климонтовичу за ценные обсуждения. Мы благодарим Б.В. Шульгина за помощь в проведении физического эксперимента.

*Работа частично финансировалась за счет грантов Госкомвуза РФ (95-0-8.3-66) и совместного гранта Физического общества Германии (436 RUS 113/334).*

### Библиографический список

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Е. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
2. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., and Maier A.G. Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems. New York: Wiley, 1973.
3. Hayashi Ch. Nonlinear Oscillation in physical systems. McCraw-hill book company, 1964.
4. Berge P., Pomeau Y., and Vidal C.H. Order within Chaos. N-Y: John Wiley and Sons, 1984.
5. Анщенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.



6. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
7. Арнольд В.И. Потеря устойчивости колебаний вблизи резонансов // Нелинейные волны / Ред. А.В.Гапонов–Грехов. М.: Наука, 1979. С.116.
8. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Stochastically synchronized oscillations in dissipative systems // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Вып.29. С.1050.
9. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., and Safonova M.A. Synchronization of chaos // Int.Journal of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
10. Pecora L.M., and Carroll T.J. Synchronization in chaotic systems // Phys.Lett.A. 1990. Vol. 64. P. 821.
11. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., and Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys.Rev.Lett. 1996. Vol. 76. P. 1804.
12. Anishchenko V.S. Dynamical Chaos – Models and Experiments. Singapore: World Scientific, 1995.
13. Hänggi P., Talkner P., and Borkovec M. Reaction–rate theory: Fifty years after Kramers // Rev.Mod.Phys. 1990. Vol. 62. P. 251.
14. Benzi R., Sutera S., and Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // J.Phys. 1981. Vol. A14. P. L453.
15. Proc. NATO ARW on Stochastic Resonance in Physics and Biology / Eds F.Moss, A.Bulsara, and M.F.Shlesinger // J.Stat.Phys. 1993. Vol. 70. P. 1.
16. Moss F., Pierson D., and O’Gorman D. Stochastic resonance: tutorial and update // Int. Journal of Bifurcation and Chaos. 1994. Vol. 4. P. 1383.
17. Wiesenfeld K., and Moss F. Stochastic resonance and the benefits of noise: from ice ages to crayfish and SQUIDS // Nature. 1995. Vol. 373. P. 33.
18. Proc. of the International Workshop on fluctuations in physics and biology: Stochastic Resonance, Signal Processing and Related Phenomena / Eds A.Bulsara, S.Chillemi, L.Kiss, P.V.E.McClintock, R.Mannella, F.Marchesoni, K.Nikolis, and K.Wiesenfeld // Nuovo Cimento. 1995. Vol. D17.
19. Bulsara A., and Gammaitoni L. Tuning into noise // Physics Today. 1996. March. P. 39.
20. Haken H. Advanced Synergetics: Instability Hierarchies of Self–Organizing Systems and Devices. Berlin: Springer, 1983.
21. Fauve S., and Heslot F. Stochastic resonance in a bistable system // Phys.Lett. A. 1983. Vol. 97. P. 5.
22. Jung P., and Hänggi P. Amplification of small signals via stochastic resonance // Phys.Rev. A. 1991. Vol. 44. P. 8032.
23. Jung P. Periodically driven stochastic systems // Phys.Rep. Vol. 234. P. 175.
24. Dykman M.I., McClintock P.V.E., Mannella R., and Stocks N.G. Stochastic resonance in the linear and nonlinear responses of a bistable system to a periodic field // Soviet Phys. JETP Lett. 1990. Vol. 52. P. 141.
25. Gammaitoni L., Marchesoni F., and Santucci S. Stochastic resonance as a bona fide resonance // Phys.Rev.Lett. 1995. Vol. 74. P. 1052.
26. Stocks N.G. A theoretical study of the non–linear response of a periodically driven bistable system // Nuovo Cimento. 1995. Vol. D17. P. 925.
27. Shulgin B., Neiman A., and Anishchenko V. Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by a periodic force // Phys.Rev.Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157.
28. McNamara B., and Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance // Phys.Rev. A. 1989. Vol. 39. P. 4854.
29. Malchow H., and Schimansky–Geier L. Noise and Diffusion in Bistable Non–equilibrium Systems. Leipzig: Teubner–Texte, 1984.
30. Neiman A. Synchronization–like phenomena in coupled stochastic bistable systems // Phys.Rev.E. 1994. Vol. 49. P. 3485.
31. Neiman A., Shulgin B., Anishchenko V., Ebeling W., Schimansky–Geier L., and Freund J. Dynamical entropies applied to stochastic resonance // Phys.Rev.Lett. 1996. Vol. 76. P. 4299.

32. Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O. Stochastic Resonance in Chua's Circuit // Int. Journal of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, № 2. P. 397.

33. Хованов И.А., Анищенко В.С. Механизм стохастического резонанса в системе с перемежаемостью типа «хаос–хаос» // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 20. С. 75.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 8.01.97  
после переработки 5.05.97

## STOCHASTIC RESONANCE AND STOCHASTIC SYNCHRONIZATION

V.S. Anishchenko, A.B. Neiman

The fundamental phenomenon of synchronization occurs in non-linear self-sustained oscillators subjected to a periodic force or coupled with each other. This phenomenon manifests itself in locking or suppressing of the natural frequency of the oscillator by periodic force. In this paper we discuss surprising synchronization-like phenomena in stochastic bistable systems which have no natural frequency at all. A stochastic bistable system possesses a noise-controlled mean switching frequency between metastable states being an analogy of the natural frequency. The stochastic synchronization reveals locking of the mean switching frequency by external periodic force. The same phenomenon can be observed in coupled stochastic bistable systems.



Нейман Александр Борисович – родился в октябре 1962 года. Окончил физический факультет Саратовского университета (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1991). В настоящее время – докторант кафедры радиофизики. Автор более 35 публикаций в международных и отечественных изданиях. Область научных интересов: нелинейная динамика, стохастическая динамика нелинейных систем, теория случайных процессов и теория информации.