

СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПОСРЕДСТВОМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА СВЯЗИ

В.В. Астахов, А.В. Шабунин

В работе показано, что синхронизация взаимодействующих хаотических систем может быть обеспечена с помощью параметрического периодического воздействия на элементы связи. Данный эффект демонстрируется для связанных неавтономных осцилляторов и для связанных автоколебательных систем. Исследуется возможность синхронизации цепочки идентичных хаотических осцилляторов с периодическими граничными условиями. В результате численных экспериментов и линейного анализа на устойчивость установлено, что при определенных значениях амплитуды и частоты параметрическое воздействие может стабилизировать пространственно однородные хаотические движения, однако только в цепочках конечной длины.

Введение

В последнее время вопросы синхронизации и управления хаосом в различных динамических системах привлекают к себе большое внимание. Для взаимодействующих нелинейных систем установлено, что при определенных значениях параметра связи в них может наблюдаться явление синхронизации хаотических колебаний [1–7]. Режим синхронизации между хаотическими динамическими системами можно также обеспечить, используя различные методы управления хаосом [8–12]. Как правило, в этих методах применяется пропорциональная обратная связь, с помощью которой достигается стабилизация хаотической фазовой траектории в симметричном подпространстве $X_1=X_2$ объединенного фазового пространства идентичных систем. В данной работе для стабилизации фазовой траектории в симметричном подпространстве предлагается использовать периодическое параметрическое воздействие на элементы связи. Использование периодических параметрических возмущений для целенаправленного изменения динамики хаотической системы рассматривалось в работах [13–16]. В них на примерах модели контакта Джозефсона и осциллятора Дуффинга – Холмса теоретически и экспериментально было показано, что резонансные параметрические возмущения могут привести к подавлению хаоса. Идея использования параметрического воздействия для синхронизации связанных хаотических систем базируется на хорошо известной классической задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса [17,18]. В такой системе, начиная с некоторых пороговых значений амплитуды и частоты, вибрации точки подвеса превращают неустойчивое состояние равновесия в устойчивое.

В данной работе показано, что синхронизация взаимодействующих хаотических систем может быть обеспечена посредством периодической модуляции коэффициента связи. Это демонстрируется для различных динамических систем: двух связанных неавтономных осцилляторов, двух связанных автоколебательных систем, цепочки осцилляторов с периодическими граничными условиями.

В разделе 1 теоретически и с помощью численных экспериментов продемонстрирована возможность синхронизации на простом примере двух идентичных неавтономных осцилляторов с кусочно-линейными характеристиками. Определены условия устойчивости симметричных движений. Построена область синхронизации хаотических осцилляторов на плоскости параметров (амплитуда, частота параметрического воздействия).

В разделе 2 исследована возможность стабилизации синфазных движений посредством параметрической накачки применительно к связанным автоколебательным системам. В качестве модели использовались два связанных через емкость генератора Чуа. Результатами компьютерных экспериментов показано, что существует область значений амплитуды и частоты параметрического воздействия, при которых синфазные колебания взаимодействующих генераторов становятся устойчивыми. Возможность синхронизации исследовалась при различных значениях параметров парциальных генераторов. Рассмотрена зависимость пороговых значений амплитуды синхронизирующего воздействия от величины коэффициента связи.

В разделе 3 исследована возможность синхронизации цепочки идентичных хаотических осцилляторов с периодическими граничными условиями. Результатами численных экспериментов и линейного анализа на устойчивость продемонстрировано, что при определенных значениях амплитуды и частоты параметрическое воздействие может стабилизировать пространственно однородные хаотические движения. Показано, что переход от несинхронных хаотических колебаний к синхронным имеет место только в цепочках конечной длины. Максимальное число элементов цепочки, при котором может быть достигнута синхронизация, зависит от частоты параметрического воздействия.

1. Стабилизация синфазных движений в двух связанных неавтономных осцилляторах

Рассмотрим два связанных идентичных нелинейных неавтономных осциллятора вида

$$\ddot{x}_{1,2} + \alpha \dot{x}_{1,2} + f(x_{1,2}) - \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}) = B \sin(\omega t), \quad (1)$$

где

$$f(x) = (b-1)x + 0.5(b-a)(|x-1| - |x+1|), \quad (2)$$

α – параметр диссипации, γ – коэффициент связи, B и ω – амплитуда и частота внешнего воздействия.

При $\gamma=0$ получаем уравнение индивидуальной системы. В отсутствие внешнего воздействия это нелинейный затухающий осциллятор с тремя состояниями равновесия

$$\begin{aligned} P_1: & (x_1=0, y_1=0), \\ P_2: & (x_2=(b-a)/(b-1), y_2=0), \\ P_3: & (x_3=-(b-a)/(b-1), y_3=0). \end{aligned}$$

Если

$$0 < a < 1, \quad b > (1+\alpha^2/4), \quad \alpha > 0.$$

то неподвижная точка P_1 является седлом, а точки $P_{2,3}$ – устойчивыми фокусами. При внешнем воздействии в некоторой области значений параметров нелинейный осциллятор демонстрирует хаотические колебания. В связанных осцилляторах ($\gamma > 0$) наблюдаются различные виды регулярных и хаотических движений, в том числе и режим несинхронизованных хаотических колебаний подсистем.

В системе (1) режим синхронизации хаотических колебаний осцилляторов можно обеспечить с помощью параметрического периодического воздействия на элемент связи. Предположим, что коэффициент связи γ можно менять периодическим образом во времени относительно некоторого постоянного уровня γ_0

$$\gamma = \gamma_0 + F(t), \quad (3)$$

где $F(t)$ – периодическая функция с периодом $T=2\pi/\Omega$ (Ω – частота параметрической накачки). Для того чтобы более наглядно проиллюстрировать механизм стабилизации симметричных движений, зададим параметрическое воздействие в виде

$$F(t) = \varepsilon \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin(\Omega t)), \quad (4)$$

ε – амплитуда параметрической накачки.

С учетом (4) перепишем уравнения связанных осцилляторов следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= y_{1,2}, \\ \dot{y}_{1,2} &= -\alpha y_{1,2} - f(x_{1,2}) + [\gamma_0 + \varepsilon \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin(\Omega t))](x_{2,1} - x_{1,2}) + B \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

Используя замену переменных

$$u = (x_1 - x_2)/2, \quad u_1 = (x_1 + x_2)/2,$$

$$v = (y_1 - y_2)/2, \quad v_1 = (y_1 + y_2)/2,$$

можно записать уравнения

$$\dot{u} = v, \quad (6)$$

$$\dot{v} = -\alpha v - \omega_0^2(t)u, \quad (7)$$

$$\dot{u}_1 = v_1, \quad (8)$$

$$\dot{v}_1 = -\alpha v_1 - f(u_1) + B \sin(\omega t), \quad (9)$$

описывающие динамику системы в окрестности симметричного подпространства $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. Здесь

$$\omega_0^2(t) = A + 2\gamma_0 + 2\varepsilon \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin(\Omega t)),$$

$$f(u_1) = (f(x_1) + f(x_2))/2.$$

$$A = \begin{cases} a-1, & \text{при } |x| \leq 1, \\ b-1, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Уравнения (8),(9) представляют собой уравнения индивидуального осциллятора и описывают динамику системы в симметричном подпространстве ($x_1 = x_2, y_1 = y_2$) ее полного фазового пространства. Режиму синхронизации соответствует $u=0, v=0$. Для того чтобы получить условия стабилизации симметричных движений хаотических осцилляторов, исследуем эволюцию малых возмущений в окрестности неподвижной точки $u=0, v=0$ (уравнения (6), (7)) за период параметрического

воздействия $T=2\pi/\Omega$. Это можно сделать, используя известные процедуры (см., например, [19]).

Период параметрического воздействия разделим на два интервала: от 0 до $T/2$ и от $T/2$ до T . На каждом из этих интервалов уравнения (6), (7) являются линейными и автономными и могут быть решены аналитически. Запишем матрицы, связывающие возмущения в моменты времени 0 и $T/2$ и в моменты $T/2$ и T

$$\begin{bmatrix} u(T/2) \\ v(T/2) \end{bmatrix} = [M_1] \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u(T) \\ v(T) \end{bmatrix} = [M_2] \begin{bmatrix} u(T/2) \\ v(T/2) \end{bmatrix}.$$

Устойчивость решения $u=0, v=0$ определяется собственными значениями матрицы $[M]=[M_2][M_1]$, которые имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2} = \exp(-\alpha\pi/\Omega)(0.5S \pm (0.25S^2 - 1)^{1/2}), \quad (10)$$

где

$$S = 2(\operatorname{ch}\beta_1 \operatorname{ch}\beta_2 + K \operatorname{sh}\beta_1 \operatorname{sh}\beta_2),$$

$$\beta_1 = (\pi/\Omega)(0.25\alpha^2 - A - 2\gamma_0 - 2\varepsilon\Omega^2)^{1/2},$$

$$\beta_2 = (\pi/\Omega)(0.25\alpha^2 - A - 2\gamma_0 + 2\varepsilon\Omega^2)^{1/2},$$

$$K = (0.25\alpha^2 - A - 2\gamma_0) / ((0.25\alpha^2 - A - 2\gamma_0)^2 - 4\varepsilon^2\Omega^4)^{1/2}.$$

Симметричные движения устойчивы, если $|\mu| < 1$. Причем это условие должно выполняться при любых значениях динамических переменных в окрестности симметричного подпространства, то есть для $A=a-1$, и для $A=b-1$.

На рис. 1 на плоскости (амплитуда, частота параметрического воздействия) выделена область, где выполняется условие устойчивости симметричных движений. Значения других параметров системы связанных осцилляторов ($B=1.5$, $\alpha=0.1$, $\omega=1$, $\gamma=0.1$, $a=0.5$, $b=2$) соответствуют случаю, когда в отсутствие параметрической накачки ($\varepsilon=0$) наблюдается режим несинхронизованных хаотических колебаний.

Проведенные численные исследования системы (5) подтвердили, что режим

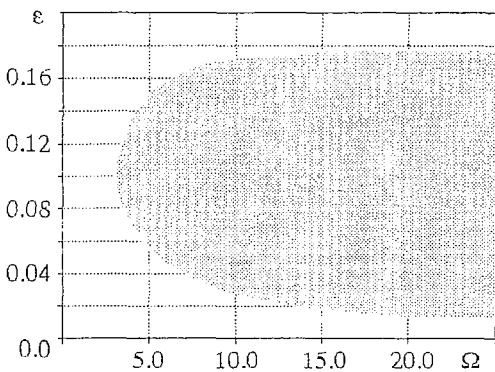


Рис. 1. Области синхронизации колебаний связанных нелинейных осцилляторов на плоскости параметров (ε, Ω)

синхронизации хаотических осцилляторов можно обеспечить с помощью параметрических периодических возмущений элемента связи, и синхронизация хаотических колебаний происходит именно при тех значениях амплитуды и частоты параметрической накачки, которые получены в результате теоретического анализа. Численные эксперименты проводились следующим образом. При указанных выше значениях параметров задавались начальные условия с незначительной расстройкой от симметричного режима $x_1(0) = x_2(0) + \Delta x$, $y_1(0) = y_2(0) + \Delta y$. Обычно выбиралось $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = 0.02$. Затем

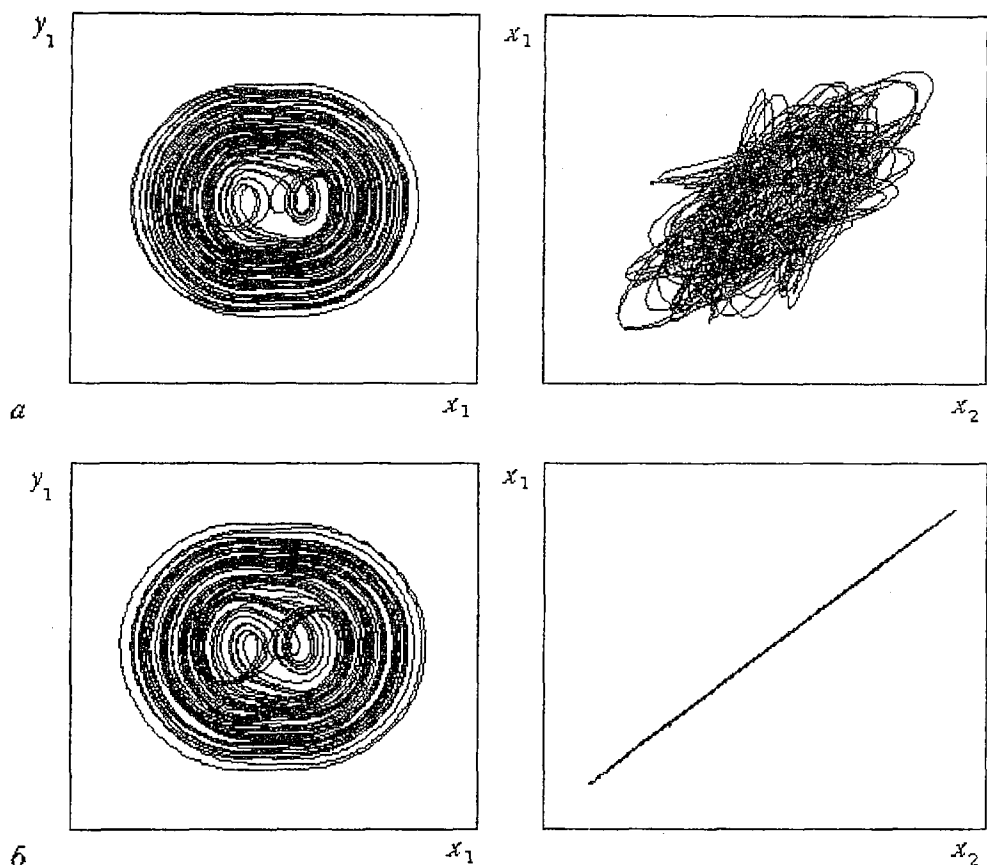


Рис. 2. Проекция фазовых портретов аттракторов без параметрического воздействия (а) и с воздействием (б)

строились проекции фазовых портретов и временные реализации колебательных режимов при различных значениях амплитуды ϵ и частоты Ω . В отсутствие параметрической накачки ($\epsilon=0$) фазовая траектория покидает окрестность симметричного подпространства и наблюдаются несинхронизованные хаотические колебания осцилляторов (рис. 2, а). При параметрическом воздействии (рис. 2, б) начальные отклонения Δx и Δy затухают, фазовая траектория входит в симметричное подпространство и уже не покидает его, если значения ϵ и Ω принадлежат выделенной на рис. 1 области. Если значения выбирались вне этой области, начальные отклонения нарастали во времени, и синхронизация не наблюдалась.

Из рис. 1 видно, что эффект стабилизации симметричных движений имеет пороговый характер. Причем частота параметрических возмущений Ω должна в несколько раз превышать характерную частоту невозмущенных движений (в данном случае частоту $\omega=1$). Чем меньше амплитуда параметрического воздействия, тем больше должна быть его частота Ω . В рассматриваемой системе для синхронизации хаотических осцилляторов достаточно незначительных возмущений коэффициента связи (ϵ порядка 20 процентов от $\gamma_0=0.1$) на частоте Ω , в 15–20 раз превышающей частоту $\omega=1$ (см.рис. 1).

Предварительные исследования показали, что режим синхронизации хаоса возникает и в том случае, когда к моменту включения параметрической накачки изображающая точка находится далеко от симметричного подпространства полного фазового пространства системы. Однако при этом существенно

возрастает время переходного процесса, после которого наблюдается режим установившихся синхронных хаотических колебаний. Время достижения окрестности симметричного подпространства, где начинает работать механизм стабилизации симметричных движений, в возмущенной системе значительно больше, чем в невозмущенной.

2. Стабилизация синфазных колебаний в двух связанных через емкость генератора Чуа

В качестве модели взаимодействующих автоколебательных систем использовались два связанных через емкость генератора Чуа, схема которых представлена на рис. 3. Предположим, что емкость связи C_c можно менять периодически образом во времени относительно некоторого постоянного уровня C_0 , то есть

$$C_c = C_0 + C_- \sin(\omega t).$$

Уравнения, описывающие схему на рис. 3 при параметрическом периодическом воздействии на емкость связи, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha (y_1 - x_1 - f(x_1)), \\ \dot{y}_1 &= (1+\gamma)(x_1 - y_1 + z_1)/(1+2\gamma) + \gamma(x_2 - y_2 + z_2)/(1+2\gamma) + \gamma_1(y_2 - y_1)/(1+2\gamma), \\ \dot{z}_1 &= -\beta y_1, \\ \dot{x}_2 &= \alpha (y_2 - x_2 - f(x_2)), \\ \dot{y}_2 &= (1+\gamma)(x_2 - y_2 + z_2)/(1+2\gamma) + \gamma(x_1 - y_1 + z_1)/(1+2\gamma) + \gamma_1(y_1 - y_2)/(1+2\gamma), \\ \dot{z}_2 &= -\beta y_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $f(x) = bx + 0.5(a-b)(|x+1| - |x-1|)$, $\alpha = C_2/C_1$, $\beta = C_2/(LG^2)$, $\gamma = \gamma_0 + \xi \sin(\Omega t)$, $\gamma_0 = C_0/C_2$, $\xi = C_-/C_2$, $\gamma_1 = \xi \Omega \cos(\Omega t)$, $a = m_1/G$, $b = m_0/G$, $x_{1,2} = (V_{c1})_{1,2}/B_p$, $y_{1,2} = (V_{c2})_{1,2}/B_p$, $z_{1,2} = (i_L)_{1,2}/GB_p$, $x = dx/dt$, $\tau = tG/C_2$, $\Omega = C_2/G\omega$.

В отсутствие параметрического воздействия ($\xi=0$) при нулевой связи ($\gamma_0=0$) получаем уравнения одиночного генератора Чуа, динамика которого детально исследована и описана в литературе (см., например, [24]). Эта система при вариации параметров демонстрирует переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Эволюция хаоса приводит к образованию хаотического аттрактора, получившего в литературе название «double scroll» [20].

При включении связи ($\gamma_0 > 0$, $\xi = 0$) система (11) ведет себя существенно более сложным образом [21]. Помимо бифуркаций удвоения периода циклов, происходят бифуркации потери симметрии, рождения тора и образования хаоса через разрушение квазипериодических движений. Наблюдается ряд глобальных бифуркаций, в результате которых происходит объединение различных хаотических множеств. Возбуждение автоколебаний и переход к хаосу в связанных системах происходит при меньших значениях управляющего

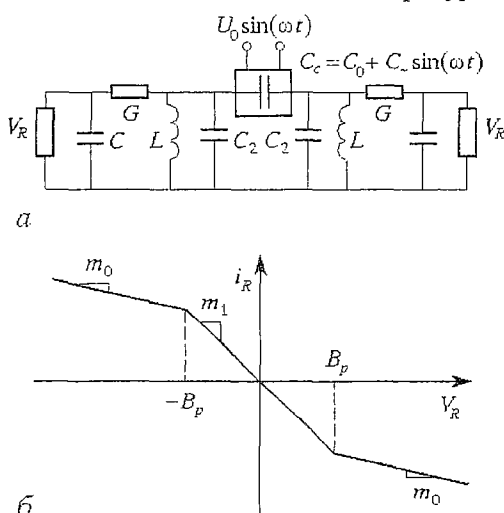


Рис. 3. Схема связанных генераторов Чуа (а) и вольт-амперная характеристика нелинейного элемента (б)

параметра α , чем в одиночном генераторе. Поэтому при значениях α , соответствующих регулярным режимам в одиночном генераторе, в связанной системе при определенных γ_0 может существовать развитый хаос со встроенными в аттрактор седловыми симметричными циклами. Для данной системы характерна мультистабильность, когда при фиксированных значениях параметров сосуществует несколько устойчивых состояний (регулярных или хаотических аттракторов).

На рис. 4 на плоскости параметров (α, γ_0) при фиксированных значениях $a=-8/7$, $b=-5/7$, $\beta=22$ построены области существования устойчивых симметричных режимов (выделены штриховкой). Вне этих областей синфазные колебания являются неустойчивыми и в эксперименте не реализуются. Исследуем возможность их стабилизации посредством высокочастотного параметрического воздействия на элемент связи, варьируя амплитуду и частоту в интервалах значений $[0, 0.25]$ и $[0, 30]$, соответственно. Начальные условия будем задавать в малой окрестности симметричного подпространства.

Проведенные эксперименты показали, что в областях, ограниченных линиями l на рис. 4, симметричные колебания могут быть стабилизированы при соответствующем подборе значений амплитуды и частоты параметрического воздействия. На рис. 5 представлены проекции фазовых портретов колебательных режимов при различных значениях α и γ_0 без воздействия и с воздействием. В левой колонке изображены периодические (рис. 5, а) и хаотические (рис. 5, г, ж) несинфазные колебания, которые наблюдаются в системе без воздействия. В средней и правой колонках показаны проекции фазовых портретов на плоскость (x_1, x_2) (рис. 5, б, д, з) и (x_1, y_1) (рис. 5, в, е, и) синфазных колебательных режимов, которые существуют в системе в устойчивом виде при периодической модуляции коэффициента связи. Характер результирующих симметричных движений зависит от параметров индивидуальной системы (то есть от значений α). В связанной системе хаотические колебания возникают при меньших значениях параметра α , чем в одиночном генераторе [21]. Следовательно, стабилизация симметричных движений будет приводить к регуляризации колебаний. Система переходит из хаотических режимов (рис. 5, г, ж) к периодическим (рис. 5, е, и). Переход к синфазным хаотическим колебаниям в рассмотренной нами области значений параметров не наблюдался.

На рис. 6 на плоскости параметров (амплитуда, частота параметрического воздействия) для различных значений коэффициента связи γ_0 построены области значений, при которых происходит стабилизация синхронных состояний. По формам областей синхронизации можно заключить, что явление стабилизации не имеет выраженного резонансного характера. Это схоже со случаем связанных неавтономных осцилляторов, рассмотренным в предыдущем разделе. Зависимость амплитуды синхронизирующего воздействия от частоты носит пороговый характер. Если частота Ω меньше некоторого минимального значения, то синхронизация отсутствует, но если Ω выше этого порогового значения, то минимальная величина синхронизирующей амплитуды уже не зависит от частоты. Из рисунка видно, что расположение областей синхронизации на плоскости (ξ, Ω) зависит от значений коэффициента связи γ_0 . При увеличении связи области синхронизации сдвигаются вверх.

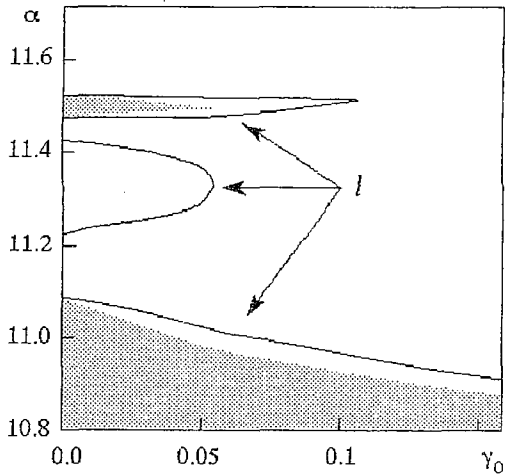


Рис. 4. Области синхронизации колебаний связанных генераторов на плоскости параметров (γ_0, α)

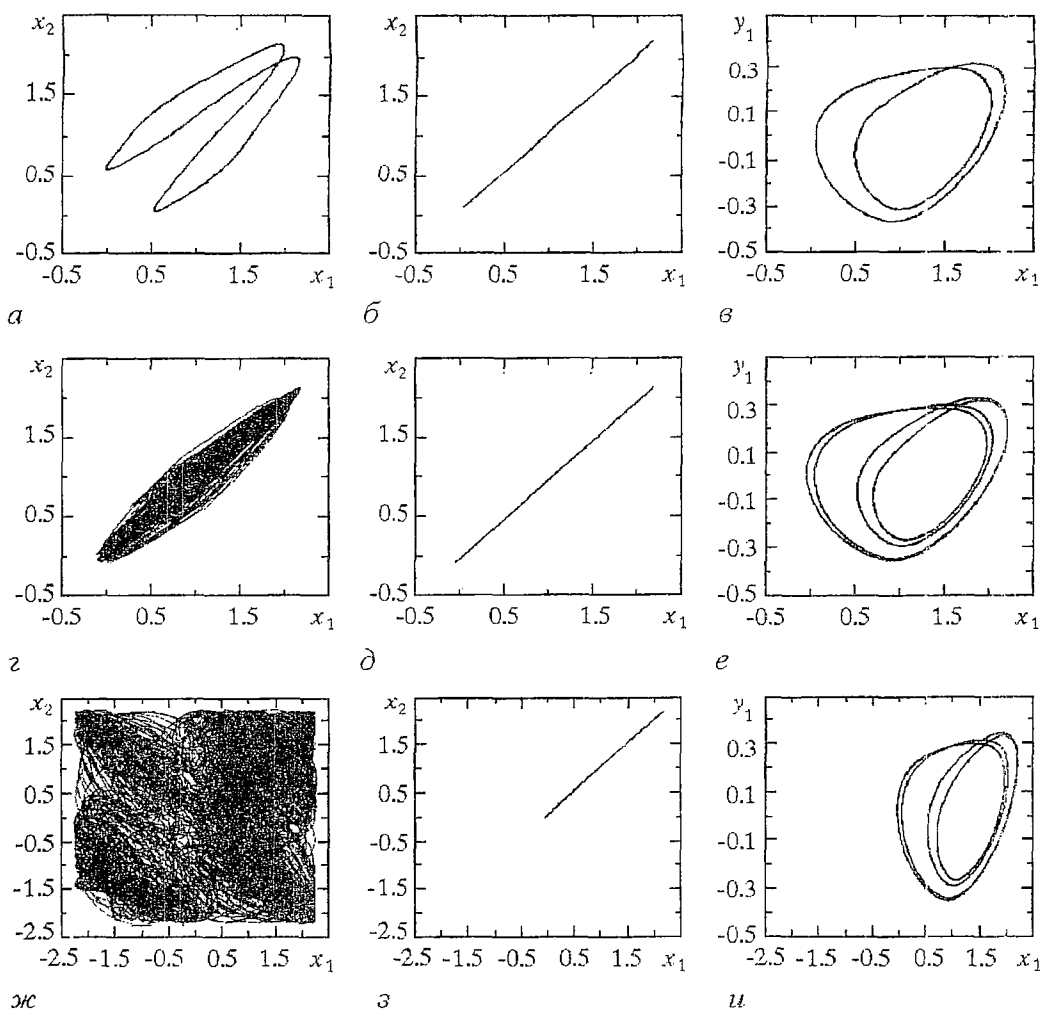


Рис. 5. Проекция фазовых портретов колебательных режимов в отсутствие параметрического воздействия (*а, з, ж*) и с параметрической модуляцией частотой $\Omega=30$ (*б, в, д, е, з, и*), со следующими значениями параметров $\alpha=11.26$, $\gamma_0=0.06$, $\xi = 0.23$ (*а, б, в*); $\alpha=11.475$, $\gamma_0=0.048$, $\xi = 0.17$ (*з, д, е*); $\alpha=11.475$, $\gamma_0=0.06$, $\xi = 0.17$ (*ж, з, и*)

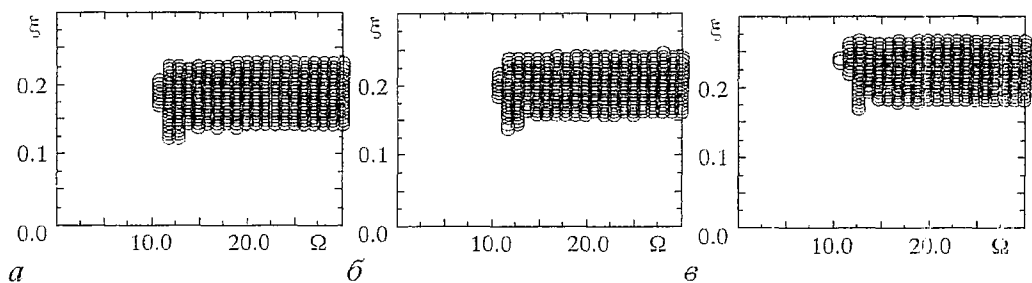


Рис. 6. Области синхронизации колебаний связанных генераторов на плоскости параметров (Ω, ξ) при $\alpha=11.475$ и различных значениях коэффициента связи γ_0 : *а* – 0.055; *б* – 0.006; *в* – 0.07

На рис. 7 представлена зависимость минимальной амплитуды синхронизирующего воздействия от коэффициента связи γ_0 для различных режимов невозмущенной системы. Если при выбранных значениях параметра α в некотором интервале γ_0 существуют устойчивые синфазные колебания (см. заштрихованные области на рис. 4), то часть соответствующей кривой на рис. 7 будет лежать на оси абсцисс (кривые 2,3,4). «Ненулевые» части представленных кривых располагаются практически параллельно друг другу. При горизонтальных сдвигах зависимости пороговых значений синхронизирующей амплитуды от коэффициента связи γ_0 совпадают друг с другом. Интересно, что пороговое значение амплитуды модуляции не зависит от типа колебаний в невозмущенной системе. Кривая 2, соответствующая хаотическим колебаниям в невозмущенной системе, располагается между кривыми 1 и 4, которые соответствуют периодическим режимам.

В предыдущем разделе для случая связанных неавтономных осцилляторов было показано, что стабилизация синфазных движений может быть достигнута при достаточно малых значениях амплитуды параметрического воздействия. Для используемых связанных генераторов наблюдается несколько иная ситуация. Малыми возмущениями можно обеспечить синхронизацию только в очень узкой области на плоскости параметров (α, γ_0) . На рис. 7 прямой штриховой линией выделены области параметра γ_0 при различных значениях параметра α , где коэффициент модуляции ξ/γ_0 меньше единицы. Это соответствует обычному случаю модуляции параметра. Вне этих областей синхронизация наблюдается только при больших амплитудах воздействия, когда значения емкости связи в некоторые моменты времени становятся отрицательными, хотя ее среднее значение остается положительным. Естественно, что реализовать подобные условия в эксперименте затруднительно. Тем не менее существует некоторая область значений параметров, в которой параметрическое воздействие обеспечивает синхронизацию при значениях коэффициента модуляции меньше единицы, что вполне реализуемо в физическом эксперименте.

На рис. 8 представлены проекции фазовых портретов колебательных режимов, наблюдаемых в системе при плавном уменьшении амплитуды модуляции ξ от значения, обеспечивающего синфазные колебания. На начальном этапе происходит постепенное «разбухание» аттрактора в проекции (x_1, x_2) , что отражено на рис. 8, б, в. Затем при некотором значении ξ система жестко переходит на другой аттрактор (рис. 8, г). При дальнейшем уменьшении параметра наблюдается переход к аттрактору, фазовый портрет которого изображен на рис. 8, д. «Разбухание» аттракторов, отраженное на рис. 8, б, в, происходит в результате усиления шума вблизи бифуркационной точки, который добавлялся нами в систему при исследовании эффекта стабилизации синфазных движений. В отсутствие шума колебания остаются строго синфазными вплоть до отмеченного выше жесткого перехода.

Анализируя различные проекции фазовых портретов колебательных режимов, представленных на рис. 8, г, д можно заметить, что они схожи с режимами, которые существуют в невозмущенной системе. Конечно, движения в

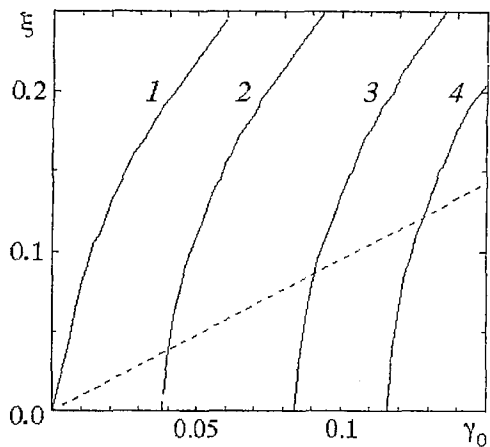


Рис. 7. Зависимость минимальной амплитуды синхронизирующего воздействия от коэффициента связи при $\Omega=30$, $\alpha=11.27$ (кривая 1), 11.475(2), 10.95 (3), 10.90 (4)

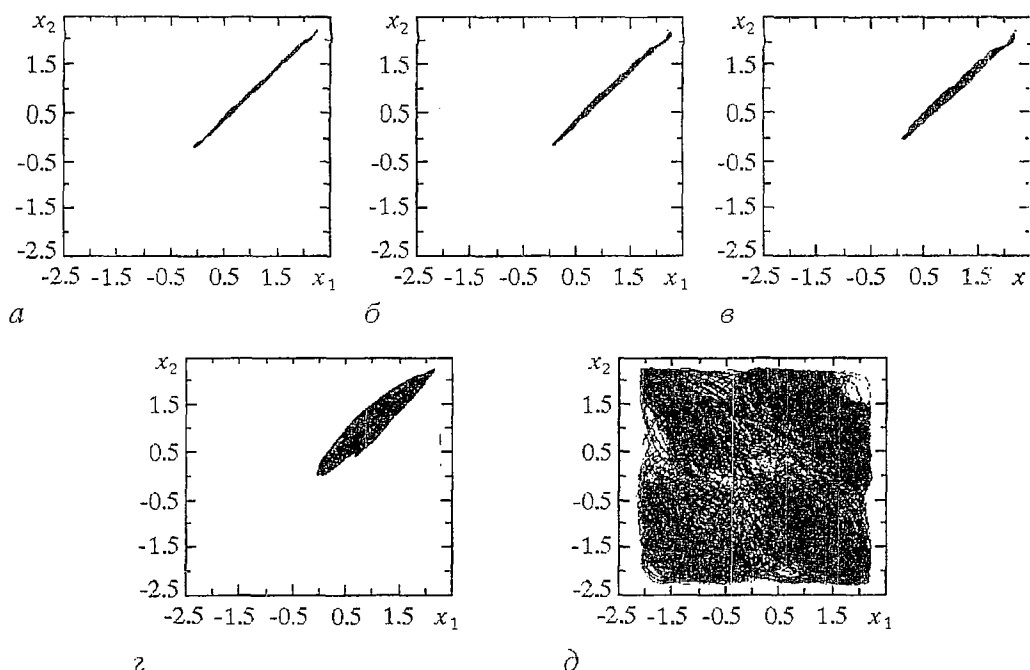


Рис. 8. Проекция фазовых портретов аттракторов, сменяющих синхронный режим при уменьшении амплитуды параметрического воздействия $\xi = 0.17$ (а), 0.169 (б), 0.1682 (в), 0.168 (z) и 0.14 (д); $\alpha=11.475$; $\gamma_0=0.07$; $\Omega=30$

системе с параметрическим воздействием не могут быть совершенно такими же, как в автономной системе, поскольку добавляется еще один временной масштаб $2\pi/\Omega$. В рассматриваемом случае колебания могут быть представлены в виде суммы «быстрых» движений с характерным временным масштабом $2\pi/\Omega$ и «медленных» с характерным собственным временным масштабом автономной системы. Поскольку период воздействия значительно отличается от собственного временного масштаба, «амплитуда» быстрых колебаний существенно меньше «амплитуды» медленных движений. Усредненные по периоду внешнего воздействия движения соответствуют режимам, которые могут наблюдаться в автономной системе. Аттрактор, представленный на рис. 8, д, соответствует аттрактору «double scroll». На рис. 8, z представлен аттрактор, который соответствует колебательному режиму, существующему в невозмущенной системе, но при данных значениях α и γ_0 являющемуся неустойчивым. Эти наблюдения позволяют предположить, что высокочастотное параметрическое воздействие не индуцирует в системе новых режимов (имеется в виду, усредненных по периоду «быстрых» движений), а меняет их характер устойчивости. Однако для подтверждения этого предположения требуются дополнительные исследования.

3. Синхронизация цепочки хаотических осцилляторов

Исследуем возможность стабилизации пространственно однородных движений в цепочке связанных хаотических осцилляторов с помощью параметрического воздействия на элементы связи.

Рассмотрим цепочку нелинейных неавтономных идентичных осцилляторов

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= y_m, \\ \dot{y}_m &= -\alpha y_m - f(x_m) + (\gamma/2)(x_{m+1} - 2x_m + x_{m-1}) + B \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (12)$$

(где $m=1, \dots, N$, N – число осцилляторов в цепочке) с периодическими граничными условиями

$$x_0 = x_N, \quad y_0 = y_N, \quad x_{N+1} = x_1, \quad y_{N+1} = y_1.$$

Здесь также как и в разделе 2 нелинейность $f(x)$ задана соотношением (2), а периодическое параметрическое воздействие – в виде соотношений (3), (4). При $N=2$ система (12) переходит в систему (5).

Для того чтобы определить условия устойчивости синхронных движений в цепочке в зависимости от амплитуды и частоты параметрической накачки, линеаризуем систему (12) в окрестности пространственно однородного состояния $x_m = \bar{x}$ и $y_m = \bar{y}$. В результате получим уравнения для возмущений относительно x и y

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_m^{(1)} &= \eta_m^{(2)}, \\ \dot{\eta}_m^{(2)} &= -\alpha \eta_m^{(2)} - [A + 2\Gamma(t)]\eta_m^{(1)} + \Gamma(t)[\eta_{m+1}^{(1)} + \eta_{m-1}^{(1)}], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_m^{(1)} &= x_m - \bar{x}, \\ \eta_m^{(2)} &= y_m - \bar{y}, \\ \Gamma(t) &= (1/2)[\gamma_0 + \varepsilon \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin(\omega t))], \end{aligned} \quad (14)$$

$$A = f'(\bar{x}) = \begin{cases} a-1, & \text{если } |x| \leq 1, \\ b-1, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Используя преобразование переменных

$$\begin{aligned} \xi_j^{(1)} &= (1/N) \sum_{m=1}^N \exp(-km) \eta_m^{(1)}, \\ \xi_j^{(2)} &= (1/N) \sum_{m=1}^N \exp(-km) \eta_m^{(2)} \end{aligned} \quad (15)$$

(где $k = i2\pi j/N$, $i^2 = -1$, $j = 1, \dots, N$), перепишем систему (13) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j^{(1)} &= \xi_j^{(2)}, \\ \dot{\xi}_j^{(2)} &= -\alpha \xi_j^{(2)} - \omega^2(t, j) \xi_j^{(1)}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\omega^2(t, j) = A + [\gamma_0 + \varepsilon \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin(\Omega t))][1 - \cos(2\pi j/N)]. \quad (17)$$

Уравнения (16) описывают динамику пространственных возмущений в окрестности синхронного состояния $x_m = \bar{x}$, $y_m = \bar{y}$. Пространственно однородным возмущениям соответствует $j=N$, пространственно неоднородным – $j=1, \dots, N-1$. Синхронное состояние будет устойчивым, если все возможные в системе несинфазные возмущения будут затухать.

Отметим, что уравнения (16) имеют такой же вид, как и уравнения (6), (7) в разделе 1, описывающие динамику трансверсальных к симметричному подпространству возмущений в двух связанных осцилляторах, а при $N=2$, $j=1$ полностью совпадают с ними. Это позволяет использовать полученные в разделе 1

результаты при определении собственных значений $\mu_{1,2}$, характеризующих эволюцию трансверсального возмущения с номером j за период параметрического воздействия $T = 2\pi/\Omega$. Выражения для собственных значений имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2}(j) = \exp(-\alpha\pi/\Omega) \{0.5S(j) \pm [0.25 S^2(j) - 1]^{1/2}\}, \quad (18)$$

где

$$S(j) = 2 \operatorname{ch}\beta_1(j) \operatorname{ch}\beta_2(j) + K(j) \operatorname{sh}\beta_1(j) \operatorname{sh}\beta_2(j),$$

$$\beta_1(j) = (\pi/\Omega)[C_1(j) - C_2(j)]^{1/2},$$

$$\beta_2(j) = (\pi/\Omega)[C_1(j) + C_2(j)]^{1/2},$$

$$K(j) = 2C_1(j)/[(C_1(j) - C_2(j))(C_1(j) + C_2(j))]^{1/2},$$

$$C_1(j) = (\alpha^2/4) - A - (1 - \cos(2\pi j/N))\gamma_0,$$

$$C_2(j) = (1 - \cos(2\pi j/N))\varepsilon\Omega^2.$$

Синхронные движения в цепочке связанных хаотических осцилляторов будут устойчивыми, если при всех $j=1, \dots, N-1$ выполняется условие $|\mu(j)| < 1$, как для $A = -a-1$, так и для $A = b-1$.

На рис. 9 отрезками прямых вертикальных линий показаны области значений амплитуды параметрической накачки ε , где выполняются условия устойчивости синхронных движений в цепочках с различным числом элементов N при фиксированном $\Omega = 25$. Значения других параметров системы ($B=1.5$, $\omega=1$, $\alpha = -0.1$, $\gamma_0 = 0.1$, $a=0.5$, $b=2$) соответствуют случаю, когда в отсутствие параметрической накачки ($\varepsilon=0$) наблюдаются режимы пространственно-временного хаоса. Из

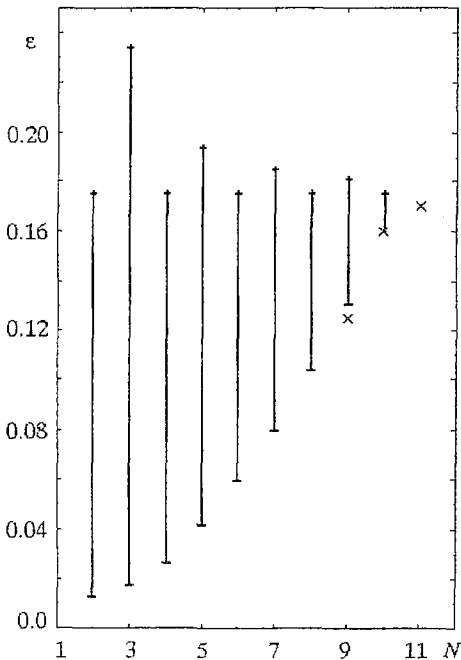


Рис. 9. Области существования пространственно-однородных колебаний в цепочках различной длины (N) в зависимости от амплитуды воздействия (ε) при фиксированном значении частоты воздействия ($\Omega=25$)

рисунка видно, что по мере увеличения числа элементов N область синхронизации постепенно уменьшается, ее нижняя граница смещается вверх по амплитуде. Когда цепочка содержит более 10 осцилляторов, параметрическое воздействие указанной частоты уже не обеспечивает подавления всего спектра трансверсальных возмущений. Дело в том, что стабилизация синхронного состояния по отношению к трансверсальному возмущению к определенному номеру j происходит в определенном конечном интервале значений амплитуды воздействия ε . Границы этих интервалов не совпадают. Синхронизация в цепочке возможна только в том случае, если существует общая, принадлежащая каждому из этих интервалов область значений ε . При $N > 10$ часть интервалов не перекрывается.

Представленные теоретические результаты находятся в хорошем соответствии с результатами компьютерных экспериментов. Практически все значения амплитуды, при которых наблюдалась синхронизация в системе (12), лежат в интервалах устойчивости,

построенных по результатам теоретического анализа. Несколько точек (отмеченные на рис. 9 крестиками) располагаются за их пределами, что объясняется следующим. При анализе на устойчивость накладывалось условие, чтобы модуль собственных значений был меньше единицы как для $A=a-1$, так и для $A=b-1$, то есть в каждой точке фазовой траектории. Это является завышенным требованием. Для устойчивости однородного состояния достаточно, чтобы усредненные величины собственных значений были по модулю меньше единицы. Поэтому в результате численных экспериментов получаются более широкие области синхронизации, чем построенные теоретически.

Посредством периодической модуляции коэффициента связи можно обеспечить стабилизацию пространственно однородных движений только в цепочках конечной длины. Максимальное число элементов цепочки, при котором может наблюдаться синхронизация, зависит от частоты параметрического воздействия. Так, например, при $\Omega = 15; 25; 50; 100$ оно не превышает значений 8; 10; 15; 21, соответственно. В случаях, когда длина цепочки больше, параметрическая накачка оказывает только частичное стабилизирующее воздействие. Пространственно однородное состояние приобретает устойчивость по отношению только к некоторой части спектра трансверсальных возмущений.

Заключение

На примере двух связанных неавтономных осцилляторов, двух связанных автоколебательных систем и цепочки хаотических осцилляторов с периодическими граничными условиями продемонстрирована возможность стабилизации синхронных состояний посредством периодической модуляции коэффициента связи. Показано, что переход от несинхронных хаотических колебаний к синхронным имеет место только в цепочках конечной длины.

Отметим, что предложенный способ синхронизации хаоса с помощью параметрического периодического воздействия на элементы связи можно рассматривать как один из методов управления хаосом. Хаотический аттрактор, соответствующий несинхронным колебаниям осцилляторов, содержит хаотическое (или регулярное) подмножество, расположенное в симметричном подпространстве полного фазового пространства системы. При параметрическом воздействии симметричные состояния становятся устойчивыми к трансверсальным возмущениям. В то же время на форму симметричных движений это воздействие не оказывает никакого влияния.

Работа была поддержана Госкомитетом по высшему образованию России (грант 95-0-8.3-66).

Библиографический список

1. Yamada T., Fujisaka H. Stability theory of synchronized motions in coupled oscillator systems // Progr. Theor. Phys. 1984. Vol.69. P.32.
2. Pikovsky A.S. On the interaction of strange attractors // Z. Phys. 1984. Vol. B55. P.149.
3. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т.29. С.795.
4. Pecora L.M., Carrol T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol.64. P.821.
5. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Внешняя и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника. 1991. Т.36. С.338.

6. De Sousa Viera M.C., Lichtenberg A.J., Lieberman M.A. Synchronization of regular and chaotic systems // Phys. Rev. 1992. Vol. A46. P.R7359.

7. Rul'kov N.F., Volkovskii A.R., Rodriguez-Lozano A., Del Rio E., Velarde M.G. Mutual synchronization of chaotic self-oscillators with dissipative coupling // Int. J. Bif. Chaos. 1992. Vol.2. P.669.

8. Lai Y.-Ch., Grebogi C. Synchronization of chaotic trajectories using control // Phys. Rev. 1993. Vol. E47. P.2357.

9. Kocarev L., Shang A., Chua L.O. Transitions in dynamical regimes by driving: A unified method of control and synchronization of chaos // Int. J. Bif. Chaos. 1993. Vol.3. P.479.

10. Murali K., Lakshmanan M. Drive – response scenario of chaos synchronization in identical nonlinear systems // Phys. Rev. 1994. Vol. E49. P.4882.

11. Ushio T. Chaotic synchronization and controlling chaos based on contraction mappings // Phys. Lett. 1995. Vol. A198. P.14.

12. Астахов В.В., Сильченко А.Н., Стрелкова Г.И., Шабунин А.В., Анищенко В.С. Управление и синхронизация хаоса в системе связанных генераторов // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. С. 1323.

13. Lima R., Pettini M. Suppression of chaos by resonant parametric perturbations // Phys. Rev. 1990. Vol. A41. P.726.

14. Cicogna G., Fronzoni L. Effects of parametric perturbations on the onset of chaos in the Josephson-junction model: Theory and analog experiments // Phys. Rev. 1990. Vol. A42. P.1901.

15. Fronzoni L., Giocondo M., Pettini M. Experimental evidence of suppression of chaos by resonant parametric perturbations // Phys. Rev. 1991. Vol. A43. P.6483.

16. Chason R. Suppression of chaos by selective resonant parametric perturbations // Phys. Rev. 1995. Vol. E51. P.761.

17. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т.21. С.588.

18. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. Т.44. С.7.

19. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.

20. Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-33, 1986. P. 1072.

21. Астахов В.В., Шабунин А.В., Сильченко А.Н., Стрелкова Г.И., Анищенко В.С. Динамика двух связанных через емкость генераторов Чуа // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. С. 320.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 3.04.97
после переработки 25.04.97

SYNCHRONIZATION OF CHAOTIC OSCILLATORS BY MEANS OF PERIODIC MODULATION OF THE COUPLING COEFFICIENT

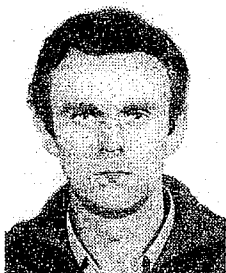
V.V. Astakhov, A.V. Shabunin

We investigate synchronization of oscillators with chaos by high frequency periodic modulation of the coupling coefficient. As models we use non-autonomous nonlinear oscillators and Chua's self-oscillators coupled via a capacity. For the non-autonomous oscillators regions of stability of in-phase oscillations were determined both analytically and in numeric experiment. Phenomena of stabilization of synchronous motions in the self-oscillators were investigated by numeric experiments. Besides low-dimensional systems we consider the spatial synchronization in a chain of coupled

oscillators with periodic boundary conditions. The effect of synchronization is investigated in dependence on the number of elements in the chain. We show that spatial synchronization by parametric modulation of the coupling takes place only in chains of finite length.



Астахов Владимир Владимирович окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил кандидатскую диссертацию (1983). Работает доцентом кафедры радиофизики СГУ, докторант этой кафедры. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос. Имеет более 40 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



Шабунин Алексей Владимирович – родился в Саратове (1966). Закончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности радиофизик (1990). Аспирант кафедры радиофизики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос. Автор четырех опубликованных работ.