

## ИНДУЦИРОВАННЫЙ ШУМОМ ПЕРЕНОС БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С АСИММЕТРИЧНЫМ ПЕРИОДИЧНЫМ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОТЕНЦИАЛОМ

*А.П. Никитин*

Рассматриваются проблемы нелинейного броуновского движения в «stochastic ratchets»-системах с асимметричным периодичным в пространстве потенциалом в приложении к задачам молекулярной биологии, радиофизики и нанотехнологии.

### Введение

«Stochastic ratchets» – это нелинейные системы, которые описывают броуновское движение в асимметричных, периодичных в пространстве потенциальных полях

$$M\ddot{x} + \beta\dot{x} + \partial/\partial x(g(t)V(x) - z(t)x) = \xi(t). \quad (1)$$

Здесь  $M$  – масса частицы;  $\beta$  – вязкость;  $x$  – координата частицы;  $V(x)$  – асимметричный периодичный потенциал<sup>1</sup>;  $\xi(t)$  – гауссов белый шум с нулевым средним значением и корреляционной функцией  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ ;  $D$  – спектральная интенсивность шума. В (1)  $g(t)$ ,  $z(t)$  – случайные коррелированные во времени процессы или детерминированные функции. Они вносят неравновесность в исследуемую систему.

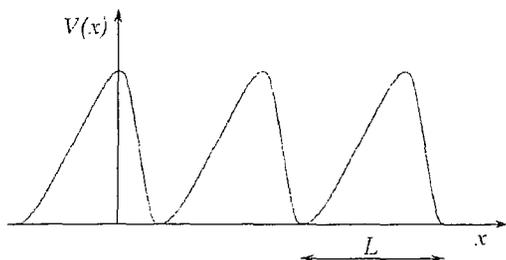


Рис.1. Типичный вид ratchet-потенциала

Задача о нелинейном броуновском движении имеет давнюю историю. Еще в 1912 году М.В.Смолуховский [1] рассмотрел возможность функционирования выпрямляющих устройств мезоскопических размеров: может ли клапан выпрямлять тепловые флуктуации, если он сам подвержен броуновскому движению?

Спустя полвека к этой проблеме вернулся Р.Фейнман [2]. Он рассмотрел

<sup>1</sup> Свое название «stochastic ratchets» получили из-за формы профиля анизотропного (асимметричного) периодичного потенциала (ratchet-потенциала) (рис.1)

модель теплового двигателя, который, предположительно, должен черпать энергию тепловых флуктуаций и превращать ее в полезную работу. Поясняя смысл второго закона термодинамики, Фейнман показал, что тепловая машина не может непрерывно совершать работу за счет охлаждения единственного резервуара теплоты.

А что произойдет, если этот единственный резервуар не будет находиться в тепловом равновесии? Подобная ситуация типична для биологических объектов. Например, в клетках тепловое равновесие нарушается постоянно протекающими химическими реакциями.

В «примитивных» клетках (прокариоты – клетки без ядер) перемещение молекул происходит, скорее всего, диффузионным способом. Для более совершенных клеток (ядерные клетки – эукариоты) такое объяснение не годится. Линейные размеры эукариотов достаточно велики: примерно на порядок больше, чем у прокариотов. Согласно формуле Эйнштейна для среднего квадрата

смещения броуновской частицы  $\overline{(x-x_0)^2} = 2D(t-t_0)$ , увеличение линейных размеров в 20 раз должно замедлить процессы в клетке в 400 раз! Но само существование эукариотов доказывает обратное – процессы не замедляются. Движение молекул в клетках, по-видимому, должно быть направленным, а не диффузионным.

M.Magnasco [3] исследовал броуновское движение макромолекул около молекулярных полимерных цепей в клетках. Он обнаружил, что асимметричное поле полимера ведет себя как вентиль, то есть выпрямитель неравновесных (вследствие химических реакций) флуктуаций. Magnasco с помощью модели «stochastic ratchets» объяснил направленное движение молекул в клетках в отсутствие постоянного теплового либо химического градиента.

Модель «stochastic ratchets» стала достаточно популярной. Например, в молекулярной биологии S.M.Simon, C.S.Peskin, G.F.Oster, W.Sung и P.J.Park используют ее для объяснения направленного перемещения полимеров через поры мембран клеток [4,5]. В работах [6–7] Д.Э.Постнов, В.С.Анищенко, А.Г.Баланов и автор настоящей работы показали, что радиотехническая система фазовой автоподстройки частоты может соответствовать уравнению (1) и проявлять соответствующие свойства «stochastic ratchets».

Кроме того, в настоящее время J.Rousselet, L.Salome, A.Ajdari, J.Prost, L.P.Faucheux, L.S.Bourdieu, P.D.Kaplan и A.J.Libchaber применяют «stochastic ratchets» в нанотехнологии для направленного перемещения и сортировки групп молекул [9,10]. Перспектива такого инженерного применения «stochastic ratchets», а также приложение результатов исследования этих систем к решению задач современной медицины являются стимулом для многих ученых.

Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы дать обзор наиболее интересных и важных результатов исследования нелинейных систем типа «stochastic ratchets».

Исследование уравнения (1) в общем случае представляет собой исключительно сложную задачу. Большинство ученых изучают не уравнение (1), а частные случаи, которые можно разделить на следующие группы.

«Correlation ratchet»,  $g(t) \equiv 1$ ; случайный процесс  $z(t)$  коррелирован во времени, имеет нулевое среднее значение и симметричную стационарную плотность вероятности;

«Rocking ratchet»,  $g(t) \equiv 1$ ; действует аддитивная периодическая сила  $z(t)$  с нулевым средним значением;

«Flashing ratchet»,  $z(t) \equiv 0$ ; периодический или стохастический процесс переключения  $g(t)$  между несколькими состояниями  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ .

Подавляющее число работ посвящено случаю передемпфирования, когда инерционные силы очень малы по сравнению с вязкими, и в уравнении (1) слагаемым, содержащим  $M$ , можно пренебречь. Такое упрощение способствует понижению порядка дифференциального уравнения и облегчает процедуру получения его решения. Кроме того, предположения о безынерционности процесса

и о пропорциональности силы трения скорости справедливы для очень широкого круга физических процессов.

В соответствии с представленной выше классификацией рассмотрим последовательно перечисленные частные случаи «stochastic ratchets».

## 1. Случай коррелированного процесса $z(t)$

Magnasco [3], исследуя уравнение Ланжевена

$$\dot{x} = -dV(x)/dx + z(t) + \xi(t), \quad (2)$$

обнаружил, что периодичный асимметричный потенциал  $V(x)$  может выпрямить коррелированные во времени флуктуации  $z(t)$  даже с симметричным распределением плотности вероятности  $q(z)$  и нулевым средним значением  $\langle z(t) \rangle = 0$ . С этого момента началось активное изучение уравнения (2)<sup>2</sup>. При этом очень эффективными оказались методы, основанные на теории марковских процессов [11,12]. Эти методы позволяют определять плотность вероятности координат нелинейной системы и поток этой плотности вероятности. Поскольку  $z(t)$  – коррелированный шум, то процесс  $x(t)$  в общем случае не обязан быть марковским. Если же мы сможем записать дополнительно к (2) стохастическое дифференциальное уравнение для шума  $z(t)$ , например, в виде

$$\dot{z} = F(z,t) + \xi_2(t), \quad (3)$$

где  $\xi_2(t)$  – независимый от  $\xi(t)$  гауссов белый шум с корреляционной функцией  $\langle \xi_2(t)\xi_2(t') \rangle = 2Q\delta(t-t')$ ,  $Q$  – спектральная интенсивность шума;  $F(z,t)$  – детерминированная функция, удовлетворяющая условию Липшица, то по теореме Дуба [13] двухкомпонентный процесс  $\{x, z\}$  будет марковским. Для него можно записать уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (уравнение эволюции плотности вероятности  $\rho(x,z,t)$ ). Представим его в виде уравнения непрерывности

$$\partial/\partial t \rho(x,z,t) = -\partial/\partial x J_x(x,z,t) - \partial/\partial z J_z(x,z,t), \quad (4)$$

$$J_x(x,z,t) = (-d/dx V(x) + z - D\partial/\partial x)\rho(x,z,t),$$

$$J_z(x,z,t) = (F(z,t) - Q\partial/\partial z)\rho(x,z,t).$$

Здесь  $J_x(x,z,t)$  и  $J_z(x,z,t)$  – составляющие вектора потока вероятности  $\mathbf{J}(x,z,t)$ . Проинтегрируем  $J_x$  по всем возможным  $z$  и найдем поток вероятности  $J(x,t)$  вдоль координаты  $x$

$$J(x,t) = -(d/dx V(x) + D\partial/\partial x)p(x,t) + \int z\rho(x,z,t)dz, \quad (5)$$

где  $p(x,t) = \int \rho(x,z,t)dz$ . Вследствие периодичности потенциала  $V(x)$  удобно выбрать для плотности вероятности  $p(x,t)$  условие нормировки  $\int_0^L p(x,t)dx=1$ , где  $L$  – длина периода потенциала, и граничное условие  $p(0,t) = p(L,t)$ . В стационарном случае, то есть при  $t \rightarrow \infty$ , поток вероятности  $J$  постоянен и не зависит от  $x$ . Причем

<sup>2</sup> Уравнение (2) исследовалось и ранее. Оно описывает широкий круг систем и явлений: системы фазовой синхронизации, синхронизируемый генератор, явления на контакте Джозефсона и др. Однако случай с асимметричным периодичным потенциалом специально до этого еще не рассматривался.

стационарный поток вероятности оказывается пропорциональным средней скорости движения  $\langle dx/dt \rangle = LJ$ .

Ch.R.Doering, W.Horsthemke, и J.Riordan [14], исследуя (2) для случая кусочно-линейного потенциала  $V(x)$  и дихотомического шума<sup>3</sup>  $z(t)$ , получили аналитическое решение, из которого видно, что стационарный поток  $J$  имеет резонансный характер зависимости от интенсивности шума  $z(t)$ . То есть существует некоторая оптимальная интенсивность шума, для которой поток вероятности будет максимальным по абсолютной величине<sup>4</sup>.

Для марковских процессов  $z(t)$  с малым временем корреляции  $\tau_c$  (приближение белого шума) в работе [14] представлена найденная приближенными методами зависимость направления потока  $J$  от величины, называемой коэффициентом гладкости («flatness»), которая определяется как отношение четвертого момента к квадрату второго

$$\phi = \langle z^4 \rangle / \langle z^2 \rangle^2,$$

$$\langle z^n \rangle = \int z^n q(z) dz,$$

где  $q(z)$  – стационарное распределение  $z$ . Эта зависимость имеет вид  $J \sim (2 - \phi)$ . Для дихотомического шума  $\phi = 1$ . Для гауссова шума  $\phi = 3$ . Ясно, что потоки вероятностей, вызванные дихотомическим и гауссовым шумами, при малых временах корреляции шумов будут направлены в противоположные стороны.

Кроме того, в [14] численным методом (методом Монте-Карло) установлено, что зависимость потока вероятности от интенсивности гауссова шума также имеет резонансный характер.

Аналогичные [14] результаты, но уже экспериментально, получили Д.Э.Постнов, А.П.Никитин и В.С.Анищенко [6]. В [6] показано, что система фазовой автоподстройки частоты (ФАП)<sup>5</sup> может соответствовать уравнению (2). Роль пространственной переменной в радиофизической «correlation ratchet» играет взаимная фаза двух генераторов: генератора сигнала и синхронизируемого гетеродина. Гармонические колебания генератора сигнала и синхронизируемого гетеродина воздействуют на фазовый детектор, напряжение на выходе которого зависит периодически (например, по закону синуса) от разности фаз колебаний генераторов. Через петлю обратной связи это напряжение изменяет частоту синхронизируемого гетеродина, приводя ее к совпадению с частотой генератора сигнала. При этом устанавливается некоторая разность фаз между колебаниями генераторов, обеспечивающая их синхронную работу. Отмечено, что если в петле обратной связи установить нелинейный элемент с соответствующими характеристиками, то система ФАП начинает проявлять анизотропные свойства по отношению к внешнему шумовому воздействию аналогично мезоскопическим «stochastic ratchets», при этом можно добиться совпадения их математических моделей. На рис.2 представлены экспериментальные результаты [6], полученные на системе ФАП, когда  $z(t)$  представляет собой дихотомический шум.

Следующий важный шаг в исследовании «stochastic ratchets» сделан в [16]. M.Vier очень удачно подобрал в качестве  $z$  дискретный марковский процесс с тремя состояниями  $+Z$ ,  $0$  и  $-Z$ . Это шум с относительно простой статистикой, у которого можно менять коэффициент гладкости в широких пределах  $\phi \in [1, +\infty)$ . Коэффициент гладкости характеризует относительное время пребывания  $z(t)$  в  $0$

<sup>3</sup> Дихотомический шум – дискретный марковский процесс с непрерывным временем и двумя равновероятными состояниями  $+Z$  и  $-Z$ .

<sup>4</sup> Под интенсивностью шума понимается средняя спектральная интенсивность  $D_z = \tau_c \langle z^2 \rangle$ , где  $\tau_c$  – время корреляции шума; под резонансным характером зависимости подразумевается в данном случае наличие такой оптимальной интенсивности шума.

<sup>5</sup> См. обзор по таким системам [15].

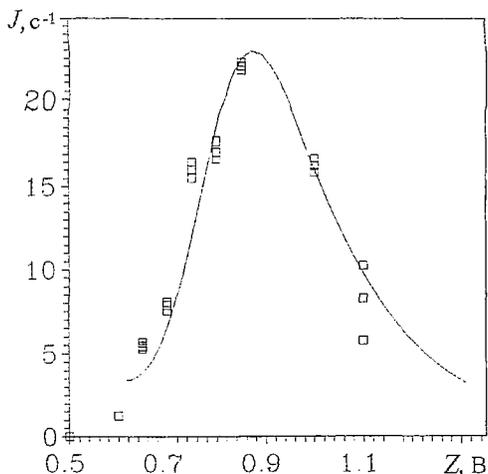


Рис. 2. Зависимость потока  $J$  от амплитуды  $Z$  дихотомического шума  $z(t)$  (физический эксперимент). Расстояния, соответствующие пологому и крутому склонам потенциала, составляют 65 и 35% от его периода  $L$

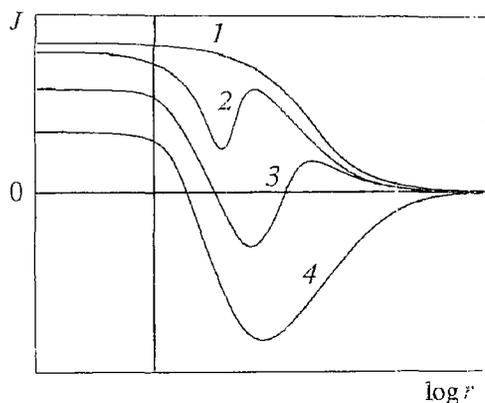


Рис. 3. Качественная зависимость потока от  $\gamma$  для различных коэффициентов гладкости  $\phi$ . Кривая 1 соответствует дихотомическому шуму,  $\phi=1$ ; 2 -  $\phi=1.2$ ; 3 -  $\phi=2.5$ ; 4 -  $\phi=3.5$

состоянии по отношению к  $+Z$  и  $-Z$  состояниям. Чем больше времени  $z$  находится в 0 состоянии по сравнению с  $+Z$  и  $-Z$ , тем больше  $\phi$ .

М. Вигер, воспользовавшись пакетом компьютерных программ «МАТНЕМА-ТИСА», исследовал зависимость потока от скорости  $\gamma$  переходов шума между его состояниями (величина, обратная времени корреляции шума). Он построил семейство зависимостей потока от  $\gamma$ , где параметром выступал коэффициент гладкости  $\phi$  (рис. 3). Выяснилось, что имеет место обращение (инверсия) потока, причем как на низких частотах (малые  $\gamma$ ), так и на высоких частотах (большие  $\gamma$ ).

Объяснить обращение потока в области низких частот при нулевой температуре можно следующим образом. Пусть  $+Z$  и  $-Z$  значительно больше сил потенциала  $V(x)$ . Будем считать  $\gamma$  достаточно малым, чтобы за время пребывания  $z$  в каждом из состояний плотность вероятности  $p(x,t)$  успевала релаксировать: в состояниях  $+Z$  и  $-Z$  она почти равномерно «размажется» вдоль координаты  $x$ , в состоянии 0 плотность  $p(x,t)$  релаксирует к  $\delta$ -функциям в состояниях равновесия. Сначала рассмотрим дихотомический шум и соответствующий ему механизм генерации потока. Поток можно представить в виде суммы  $J=J(-Z)+J(+Z)$ . Поскольку в состоянии  $-Z$  шум действует против сил более крутого склона потенциала, то  $|J(+Z)|$  будет больше, чем  $|J(-Z)|$ , и поток будет направлен в сторону пологого склона потенциала  $V(x)$ .

Если теперь включить 0 состояние, то, поскольку бассейн притяжения у пологого склона потенциала больше, чем у крутого, релаксация плотности вероятности к состояниям равновесия системы будет сопровождаться смещением центра масс (очевидно, плотность вероятности  $p(x,t)$  можно рассматривать как плотность невзаимодействующих частиц вдоль координаты  $x$ ) в сторону крутого склона потенциала  $V(x)$ . Это второй механизм генерации потока. То есть имеет место конкуренция между двумя механизмами генерации направленного движения. Для близких к единице значений  $\phi$  преобладает один механизм, а начиная с некоторого значения  $\phi > 1$ , побеждает второй механизм.

В [16] показано, что для определенных значений  $\phi$  при изменении времени корреляции шума  $z(t)$  поток  $J$  обращается в противоположный. Поскольку различные молекулы отличаются по размерам и им соответствуют неодинаковые по величине коэффициенты вязкого трения, то они по-разному должны «чувствовать» частотный спектр одного и того же шума. Можно подобрать шум с

такой статистикой, что две различные группы молекул будут двигаться в противоположных направлениях. Этому эффекту можно найти инженерное применение, например, в нанотехнологии для сортировки молекул.

## 2. Случай аддитивной периодической силы $z(t)$

То, что коррелированный шум способен вызвать поток в ratchet, показано в [3,14,16] и других работах. А что, если вместо коррелированного шума на ratchet будет действовать периодичная во времени сила с нулевым средним значением? Не поможет ли такое исследование вскрыть физический механизм направленного движения? R.Bartussek, P.Hänggi, J.G.Kissner [17] в связи с этим рассмотрели поведение мультстабильного осциллятора, возбуждаемого периодичной во времени силой

$$\dot{x} = -\partial/\partial x(V(x) - xA\sin(\omega t)) + \xi(t), \quad (6)$$

названного «rocking ratchet». В качестве асимметричного периодичного потенциала была выбрана функция

$$V(x) = -k^{-1}[\sin(kx) + 1/4\sin(2kx)]. \quad (7)$$

По-прежнему  $\xi(t)$  – гауссов белый шум. Для уравнения Ланжевена запишем уравнение непрерывности

$$\partial/\partial t p(x,t) = -\partial/\partial x J(x,t), \quad (8)$$

в котором поток вероятности

$$J(x,t) = [\cos(kx) + 1/2\cos(2kx) + A\sin(\omega t) - D\partial/\partial x] p(x,t). \quad (9)$$

Если определить средний поток как

$$\bar{J} = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/TL \int_0^T dt' \int_0^L dx J(x,t'), \quad (10)$$

где  $T=2\pi/\omega$  и  $L=2\pi/k$ , то в адиабатическом пределе ( $\omega \rightarrow 0$ ) поток можно представить следующим выражением:

$$\bar{J} = D/T \int_0^T dt \{ [1 - \exp(\Phi(L,t))]^{-1} \int_0^L dy \exp(\Phi(y,t) - \Phi(x,t)) - \int_0^L dx \int_0^x dy \exp(\Phi(y,t) - \Phi(x,t)) \}^{-1}. \quad (11)$$

Здесь  $\Phi(x,t) = [V(x) - xA\sin(\omega t)]/D$ . Проанализировав (11), можно видеть, что зависимости потока  $\bar{J}$  от амплитуды  $A$  периодичной силы и  $\bar{J}$  от интенсивности  $D$  белого шума имеют резонансный характер. Если теперь отойти от адиабатического предела, то зависимость  $\bar{J}$  от  $A$  приобретает несколько локальных минимумов. Кроме того, для определенных величин  $\omega$  поток инвертируется (рис.4), но не так, как в [14].

R.Bartussek, P.Hänggi, J.G.Kissner показали, что в отсутствие белого шума ( $D=0$ ) инверсии потока нет ни при каких величинах  $A$  и  $\omega$ , но сама зависимость

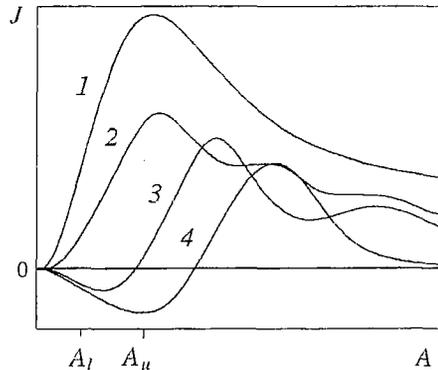


Рис. 4. Качественная зависимость потока от амплитуды  $A$ . Верхняя кривая (1) соответствует адиабатическому приближению,  $\omega=0.01$ ; 2 –  $\omega=4$ ; 3 –  $\omega=7$ ; 4 –  $\omega=10$

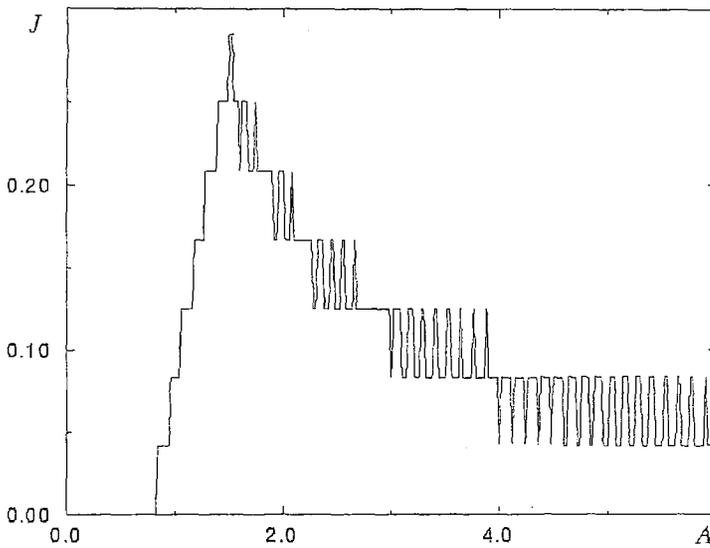


Рис. 5. Зависимость детерминированного потока от амплитуды  $A$

$J$  от  $A$  приобретает сложную ступенчатую структуру (рис. 5). Очевидно, чтобы в адиабатическом пределе переместиться на расстояние  $L$ , частице нужно время  $t$

$$t(\Theta) = \int_0^L dy / [\cos(ky) + 1/2 \cos(2ky) + A \sin\Theta]. \quad (12)$$

Здесь  $\Theta$  есть фаза медленно изменяющейся силы ( $\omega \rightarrow 0$ ). Интеграл по всем  $\Theta$  даст детерминированный поток

$$\bar{J} = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} d\Theta / t(\Theta). \quad (13)$$

Пока  $A$  меньше некоторой величины  $A_1$ , в общем случае зависящей от  $\omega$ , поток  $\bar{J} = 0$ .

Но стоит величине  $A$  превысить  $A_1$ , как появляется поток, направленный в сторону пологого склона потенциала, причем само движение можно разбить на две фазы: часть периода периодической силы  $A \sin\Theta$  частица преодолевает пологие склоны потенциала, другую часть периода она находится в пределах одного периода потенциала  $V(x)$ . Если  $A$  превышает некоторую величину  $A_2$ , которая, как и  $A_1$ , в общем случае зависит от  $\omega$ , то движение частицы будет представлено периодической сменой движений навстречу крутому и навстречу пологому склонам потенциала. Следует заметить, что максимум потока будет при величине  $A$ , близкой к  $A_2$ .

Другим замечательным свойством детерминированного потока является его квантование с шагом по высоте  $L\omega/(2\pi)$ . Ясно, что в системе, в которой с течением

времени устанавливается периодическое движение, когда  $\dot{x}(t)$  является периодической функцией  $t$  с периодом  $T$ , положение частицы в момент времени  $t$  отличается от положения во время  $t+T$  на целое число периодов  $L$ . Это и означает квантование. Кроме квантования по высоте, поток обладает некоторой «гребенчатой» зависимостью от амплитуды  $A$ : с ростом  $A$  сменяющие друг друга «гребни» потока монотонно убывают по своей ширине (см.рис.5).

Поскольку в случае детерминированного процесса и в адиабатическом приближении обращение потока отсутствует, R.Bartussek, P.Hänggi и J.G.Kiszner сделали вывод, что причина ранее упомянутой инверсии потока кроется во взаимодействии шума и сигнала с конечным спектром.

### 3. Случай периодического или стохастического процесса переключения $g(t)$

Одной из популярных моделей, описывающей молекулярные моторы, является «flashing ratchet». Пусть некоторая достаточно крупная молекула совершает тепловое броуновское движение около полимера. Благодаря периодичности структуры полимера его электростатическое поле также обладает периодичной структурой. Броуновская частица – молекула участвует в обратимой химической реакции [18,19], в результате которой частица приобретает и теряет случайным образом свою электронейтральность, то есть становится и перестает быть заряженной частицей. Когда частица заряжена, она взаимодействует с полем полимера, которое можно аппроксимировать периодичным в пространстве асимметричным потенциалом  $V(x)$ . Если частица стала электронейтральной, то она не взаимодействует с полем полимера и для нее можно считать потенциал нулевым. Для броуновской частицы запишем уравнение Ланжевена

$$\beta \dot{x} = -\partial/\partial x U(x,t) + \xi(t), \quad (14)$$

в котором

$$U(x,t) = g(t) V(x) = \begin{cases} V(x) \\ \uparrow \downarrow \\ 0 \end{cases}. \quad (15)$$

По-прежнему  $\xi(t)$  – гауссов белый шум,  $g(t)$  последовательно принимает значения 0 и 1 случайным во времени образом. Предположим, что процесс переключения  $g(t)$  между 0 и 1 является марковским. Запишем уравнение для вероятностей состояний 0 и 1 в матричном виде

$$d/dt \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_0(t) \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -b & a \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Здесь  $a$  и  $b$  вероятности переходов. Они характеризуют «времена жизни» в соответствующих состояниях. Частота  $\gamma$  является обратной величиной времени корреляции процесса  $g(t)$  ( $\tau_c = \gamma^{-1}$ ). Поведение броуновской частицы в переключающемся потенциале описывается парой уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова. Представим их в матричном виде

$$d/dt \begin{pmatrix} p_1(x,t) \\ p_0(x,t) \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} K_1 - b\gamma & a\gamma \\ b\gamma & K_0 - a\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$K_1 = 1/\beta \partial/\partial x \{d/dx V(x) + D\partial/\partial x\},$$

$$K_0 = D/\beta \partial^2/\partial x^2,$$

где  $p_1(x,t)$  – плотность вероятности найти частицу в координате  $x$  в момент времени  $t$  при «включенном» потенциале,  $p_0(x,t)$  – при «выключенном» потенциале. Поскольку частицы не рождаются и не исчезают, марковский процесс удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial/\partial t p(x,t) = -\partial/\partial x J(x,t), \quad (18)$$

в котором суммарная плотность вероятности  $p(x,t) = p_1(x,t) + p_0(x,t)$  нормирована на единицу на периоде потенциала  $[0,L]$ . Легко видеть, что в стационарном случае ( $t \rightarrow \infty$ ) поток вероятности перестает зависеть от  $x$ . Найти точное аналитическое решение для стационарного потока вероятности  $J$  не удастся. Однако поток  $J$  можно вычислить в приближении «медленного» либо «быстрого» переключения потенциала, раскладывая искомое решение в ряд по параметру  $\gamma$

или  $\tau_c = 1/\gamma$

$$J = \gamma J^{(1)} + \gamma^2 J^{(2)} + \dots \quad (19)$$

$$J = \tau_c J_{(1)} + \tau_c^2 J_{(2)} + \dots \quad (20)$$

В этих предельных случаях можно показать, что поток ведет себя резонансным образом в зависимости от интенсивности  $D$  белого шума  $\xi(t)$  [20] (рис. 6).

Появление потока в рассматриваемой системе можно объяснить следующими рассуждениями (рис. 7). Пусть первоначально включен периодический потенциал и имеется множество невзаимодействующих друг с другом частиц, положение которых характеризуется плотностью  $p(x,t)$ . Все частицы сначала локализованы в пределах одного периода потенциала около состояния равновесия<sup>6</sup>, то есть потенциальные барьеры очень высоки. Пусть теперь потенциал переключился и стал нулевым. Тепловые флуктуации с течением времени раскидают частицы на расстояния, соизмеримые по величине с периодом потенциала. Распределение частиц вдоль пространственной координаты будет близким к гауссову.

Если снова включится периодичный потенциал, то частицы локализуются около состояний равновесия, причем возле тех, в бассейнах притяжения которых они оказались. Из-за разницы в величине бассейнов притяжений, соответствующих крутым склонам потенциала и пологим склонам, будет иметь место смещение центра масс частиц, причем в сторону крутого склона потенциала. Понятно, если потенциал будет переключаться очень часто, то за короткие времена «выключенного» потенциала тепловые флуктуации не раскидают частицы на достаточное расстояние и они не окажутся в бассейнах притяжения соседних состояний равновесия, вследствие чего поток будет почти нулевым. Также, если потенциал будет переключаться очень редко, то редко будет нарушаться равновесность системы, и поэтому поток будет очень малым. Этим объясняется резонансная зависимость потока от  $\gamma$ .

Очевидно, если  $g(t)$  будет не случайным процессом, а периодической функцией времени, то сам механизм направленного движения сохранится. Этому посвящены экспериментальные работы [10,6]. В работе [10] периодический потенциал создавался лазерным излучением, в поле которого двигались броуновские частицы.

Однако для исследования общих свойств «flashing ratchet» вовсе не обязательно ставить эксперименты непосредственно на броуновских частицах. В

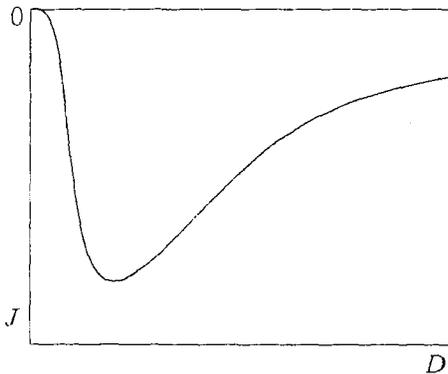


Рис. 6. Качественная зависимость потока от интенсивности белого шума

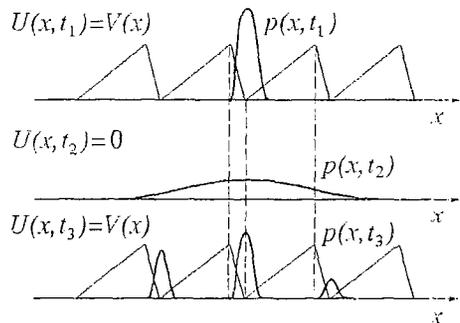


Рис. 7. Эволюция плотности вероятности в «flashing ratchet». Плотность  $p(x,t)$  изображена для трех моментов времени  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ , соответствующих разным фазам механизма генерации потока

<sup>6</sup> Состояние равновесия — минимум потенциала.

работах [6,8] Д.Э. Постнов, В.С. Анищенко и автор настоящей работы показали, как на основе мультистабильного осциллятора типа фазовой автоподстройки частоты можно построить модель «flashing ratchet». На рис. 8 представлены экспериментальные результаты [8], которые получены на ФАП, когда  $g(t)$  представляет собой процесс переключения между 0 и 1. Кривой 1 соответствует периодический, а кривой 2 – случайный процесс переключения  $g(t)$  – бинарный шум<sup>7</sup>. Сравним обе кривые. На высоких частотах  $f$  переключения  $g(t)$  кривая 1 лежит выше, чем кривая 2. Объясним этот экспериментальный факт на языке броуновского движения. На рис.8 одной и той же величине  $f$  соответствует частота периодического переключения  $g(t)$  и средняя частота случайных переключений  $g(t)$ . Случайный процесс  $g(t)$  обладает широким спектром времен пребывания в состояниях 0 и 1, кратных  $T_0$ , в то время как периодическому процессу  $g(t)$  будет соответствовать только один временной масштаб  $T_0$ . Следовательно, как показано выше, за короткие времена  $T_0$  «выключенного» потенциала тепловые флуктуации не раскидают частицы на достаточное расстояние, и они не окажутся в бассейнах притяжения соседних состояний равновесия. Поэтому для периодического переключения  $g(t)$  поток будет близким к нулевому, в то время как для случайного процесса из-за присутствия в его спектре времен пребывания в состояниях 0 и 1 компонентов с достаточно длительным временем, механизм генерации потока будет продолжать работать, и поток будет больше по абсолютной величине, чем при периодическом процессе переключений  $g(t)$ .

Очень интересной представляется работа [21]. В ней  $g(t)$  представляет собой дискретный случайный процесс с тремя возможными состояниями +1, 0 и -1.

$$U(x,t) = g(t) V(x) = \begin{cases} V(x) \\ \mu\lambda \uparrow \downarrow \mu\gamma \\ 0 \\ \lambda\gamma \uparrow \downarrow \gamma \\ -V(x) \end{cases} \quad (21)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  характеризуют вероятности переходов случайного процесса между состояниями +1 и -1, причем смена состояний возможна только в фиксированные моменты времени  $t_k = \Delta \pm kT_0$ , где  $T_0 = \text{const}$ ,  $k = 0, 1, 2 \dots$  – целое неотрицательное число,  $\Delta$  – случайная величина, не зависящая от  $z(t)$  и равномерно распределенная на отрезке  $[0, T_0]$ .

Выше мы рассмотрели механизм возникновения направленного движения в системе при переключении  $g(t)$  между состояниями 0 и 1. Очевидно, если бы  $g(t)$  переключалась между 0 и -1, направление потока было бы противоположным по отношению к рассмотренному случаю. Можно предположить, что для случайного

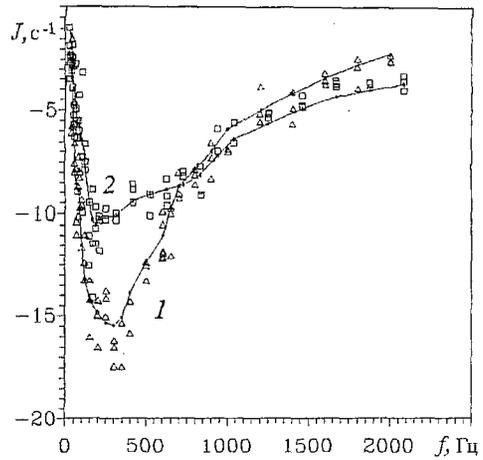


Рис. 8. Зависимость потока от частоты (для случайного процесса – средней частоты) переключения процесса  $g(t)$  между 0 и 1 (физический эксперимент). Расстояния, соответствующие пологому и крутому склонам потенциала, составляют 75 и 25% от его периода  $L$

<sup>7</sup> Бинарный шум – дискретный случайный процесс, имеющий два возможных равновероятных состояния  $+Z$  и  $-Z$ , причем смена состояний возможна только в фиксированные моменты времени  $t_k = \Delta \pm kT_0$ , где  $T_0 = \text{const}$ ,  $k = 0, 1, 2 \dots$  – целое неотрицательное число,  $\Delta$  – случайная величина, не зависящая от  $z(t)$  и равномерно распределенная на отрезке  $[0, T_0]$ .

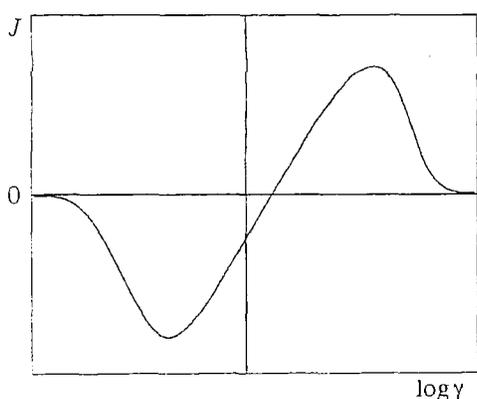


Рис. 9. Качественная зависимость потока от  $\gamma$  для шума с тремя состояниями

процесса трех состояний оба механизма возникновения направленного движения противостоят друг другу. Вследствие отличия «времен жизни» в состояниях  $+1$  и  $-1$ , каждый из механизмов побеждает в своей области частот  $\gamma$ . Отсюда должна следовать инверсия потока  $J$  при изменении скорости потока  $\gamma$ . Этому эффекту можно найти, также как и в случае «correlation ratchet», инженерное применение, например, в нанотехнологии для сортировки молекул.

### Заключение

В настоящей работе рассмотрены некоторые проблемы нелинейного броуновского движения в «stochastic ratchets». Сейчас ведутся активные исследования подобных систем. Несколько интересных, по мнению автора, работ по этому научному направлению еще не опубликованы, но о них хотелось бы упомянуть, поскольку они дают общее представление о направлениях и перспективах на ближайшее будущее в исследовании «stochastic ratchets»: о моделировании «stochastic ratchets» системой контактов Джозефсона [22]; о моделировании «stochastic ratchets» с учетом массы частицы системой, основанной на ФАП [8]; о сортировке частиц по признаку различия их масс (L.Schimansky-Geier и [23]); а также работа M.Bier о «stochastic ratchets» с двумерным потенциалом.

Автор выражает благодарность А.Г.Баланову, Д.Э.Постнову и В.С.Анищенко за интерес к работе и ценные замечания.

*Работа частично была поддержана Госкомвузом России по фундаментальному естествознанию (грант 95-0-8.3-66) и российско-германским грантом DFG and RFFI 436 RUS 113/334/0(R).*

### Библиографический список

1. Smoluchowski M.V. Experimentell nachweisbare, der Hüblichen Thermodynamik widersprechende Molekularphänomene // Phys. Zeitschr. 1912. Vol.13. P. 1069.
2. Feynman R.P., Leighton R.B. and Sands M. The Feynman Lectures on Physics. Addison-Westley Reading, 1963.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 4. Кинетика. Тепло. Звук. М.: Мир, 1965.
4. Magnasco M. Molecular Combustion Motors // Phys.Rev.Lett. 1994. Vol.72. P. 2656.
5. Simon S.M., Peskin C.S. and Oster G.F. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1992. Vol.89. P. 3770.
6. Sung W. and Park P.J. Polymer Transport through a Pore in Membrane // Submitted to Phys. Rev. Lett., 1996.
7. Постнов Д.Э., Никитин А.П., Анищенко В.С. Управление потоком вероятности в системе фазовой автоподстройки частоты // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, вып. 9. С. 24.
8. Postnov D.E., Nikitin A.P., Balanov A.G., Anishchenko V.S. Symmetric and asymmetric hopping dynamics in noisy electronic circuits // Book of abstracts. The Inter-

national Conference on Nonlinear Dynamics and Chaos (ICND-96). Saratov, Russia. July 8 – 14. 1996. P.195.

8. *Nikitin A.P., Postnov D.E., Anishchenko V.S.* Electronic simulation of stochastic ratchets // Submitted to IEEE Trans. on Circuits and Systems I.

9. *Rousselet J., Salome L., Ajdari A. and Prost J.* // Nature 1994. Vol.370. P. 113.

10. *Faucheux L.P., Bourdieu L.S., Kaplan P.D., and Libchaber A.J.* Optical Thermal Ratchet // Phys.Rev.Lett. 1995. Vol.74. P. 1504.

11. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов.радио, 1977.

12. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.

13. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.

14. *Doering Ch. R., Horsthemke W. and Riordan J.* Nonequilibrium Fluctuation-Induced Transport // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol.72. P. 2984.

15. *Шахильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: СВЯЗЬ, 1972.

16. *Bier M.* Reversals of noise induced flow // Phys. Lett. A. 1996. Vol.211. P.12.

17. *Bartussek R., Hänggi P. and Kissner J.G.* Periodically Rocked Thermal Ratchets // Europhys.Lett. 1994. Vol.28. P. 459.

18. *Astumian R.D., Bier M.* Fluctuation Driven Ratchets: Molecular Motors // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol.72. P. 1766.

19. *Prost J., Chauwin J.F., Peliti L., Ajdari A.* Asymmetric Pumping of Particles // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol.72. P. 2652.

20. *Doering Ch. R.* Randomly Rattled Ratchets // Proceedings of the Workshop on Fluctuations in Physics and Biology, Elba International Physics Center, 5–10 June, 1994.

21. *Bier M.* Reversals of noise induced flow in a 3-state fluctuating potential // Book of abstracts. The International Conference on Nonlinear Dynamics and Chaos (ICND-96). Saratov, Russia. July 8 – 14. 1996. P.33.

22. *Zapata I., Bartussek R., Sols F. and Hänggi P.* Voltage rectification by a SQUID ratchet // Submitted to Phys.Rev.Lett., 1996.

23. *Никитин А.П., Постнов Д.Э.* Влияние массы частиц на поведение «stochastic ratchets» // Направлено в «Письма ЖТФ».

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 10.02.97  
после переработки 18.03.97

## STOCHASTIC RATCHETS

*A.P. Nikitin*

In the present paper the problems of nonlinear Brownian motion in «stochastic ratchets», namely, the systems with asymmetric spatially periodic potential were considered in application to molecular biology, radiophysics and nanotechnology.



*Никитин Александр Петрович* – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры радиофизики СГУ. Область научных интересов – броуновское движение в нелинейных системах.